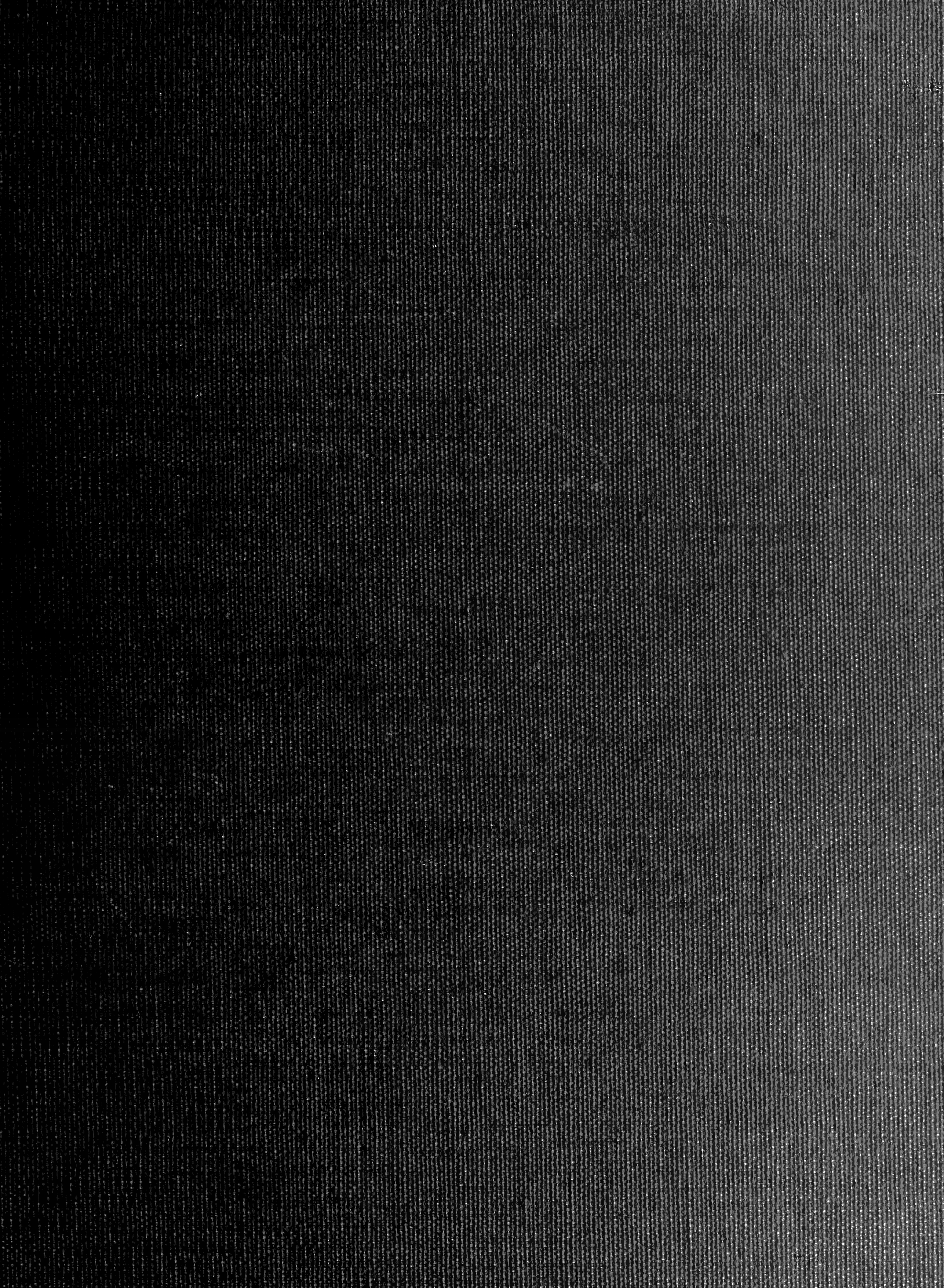


MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

VIme SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME I.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

SAINT-PÉTERSBOURG.

SIXIÈME SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES.

TOME III.

PREMIÈRE PARTIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

ST.-PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1838.

Se vend chez Graeff, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison propre, N°. 1.

Prix 18 R° pour la Russie; 6 Thlr. 18 Gr. pour l'étranger.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

SAINT-PÉTERSBOURG.

SIXIÈME SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME I.

ST.-PÉTERSBOURG.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1838.

Se vend chez GRAEFF, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison propre N° 1.

Prix 18 R° pour la Russie; 6 Thlr. 18 Gr. pour l'étranger.

PUBLIÉ PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

En Juin 1838.

Le secrétaire perpétuel P.-H. Fuss.

Lorsque l'Académie commença la publication de cette sixième série de ses mémoires, elle ne comptait dans son sein que deux naturalistes. Cette circonstance devait l'engager à réunir dans un même recueil et les mémoires de mathématiques et de physique, et ceux d'histoire naturelle. Maintenant, que sa classe des sciences naturelles a été complétée, elle s'est décidée de séparer ces deux parties tout-à-fait hétérogènes, en vouant à chacune d'entre elles un recueil séparé. Mais, pour ne point rompre la suite des volumes, le tome III et les suivans seront partagés en deux parties dont la première comprendra seulement des mémoires de mathématiques et de physique et la seconde, des mémoires d'histoire naturelle. Ces deux recueils, munis en outre de titres séparés, se composeront chacun de six livraisons et se vendront séparément.

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE VOLUME.

Page

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

VIme SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES.

TOME III.

PREMIERE PARTIE

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

UEBER DAS OPTISCHE VERHALTEN

DER

WEISSEN NAPHTA VON BAKU,

VON

E. LENZ.

(Gelesen den 19. September 1832.)

Da ich die Brechung und Zerstreuung des Lichtes in der sogenannten weissen Naphta oder dem natürlichen reinen Bergöhl noch nirgends angegeben fand, so benutzte ich die wenigen heitern Tage des Juli und August dieses Jahres dazu, diese Bestimmungen an derjenigen weissen Naphta vorzunehmen, welche ich selbst im Jahr 1830 aus Baku in wohl verschlossenen Flaschen mitgebracht hatte. — Sie hat ein gelbbraunes Ansehn, etwas dunkler als die Farbe des Madeira-Weins, ist vollkommen durchsichtig und bei 0° des Thermometers von einem spezifischen Gewichte = 0,800148.

Das hohle Glasprisma, welches ich damit füllte, war in München verfertigt. Zwei Spiegelglasplatten wurden durch Schrauben an eine gehörig zugeschnittene und an den dadurch entstandenen Rändern matt zugeschliffene Flasche von dickem Glase angepasst und bildeten die brechenden Flächen; der Boden der Flasche war matt geschliffen. — Zur Prüfung des Parallelismus der Flächen einer jeden Glasplatte brachte ich das leere Prisma vor das Fernrohr eines astronomischen Theodoliten

von Reichenbach und Ertel; nachdem ich das Fadenkreuz desselben auf ein fernes Object gerichtet hatte, kehrte ich das Prisma vor dem Fernrohr um, so dass die früher rechts sich befindende brechende Kante desselben jetzt links hingewandt war. Dadurch hätte sich die doppelte Ablenkung der Lichtstrahlen, wenn überhaupt eine statt fand, offenbaren müssen; allein es konnte durchaus keine bemerkt werden. Da nun für mich die Grenze der Ablesung am Theodoliten 5″ betrug (die unmittelbare Ablesung des Nonius geht bis auf 10″), so folgt aus obigem Versuch, dass ein hiervon herrührender Fehler bei Messung der Ablenkung der Lichtstrahlen höchstens nur 2″, 5 betragen könne.

Um den brechenden Winkel zu bestimmen, kittete ich auf den starken Ring, welcher sich auf dem Theodoliten bei seiner Aufstellung für horizontale Messungen befindet und an welchem die Arme befestigt sind, die das nach Art der Passagefernröhre aufruhende Fernrohr tragen, eine mattgeschliffene Glasplatte mit etwas Wachs fest; auf derselben befestigte ich ebenfalls aus Wachs 3 kleine abgestumpfte Kegel und auf diesen das Prisma, nachdem es zuvor mit reinem Quecksilber gefüllt war; durch Letzteres bot es 2 schöne spiegelnde Flächen dar. Nachdem ich nun zuerst den Kreis des Theodoliten mittelst der Libelle horizontal und die brechende Kante des Prisma auf die bekannte Weise senkrecht gestellt hatte (wobei ich es durch zweckmässiges Herabdrücken eines oder des andern der Wachskegel in die rechte Stellung brachte); maass ich den Winkel, um welchen ich den Alhidadenkreis drehen musste, bis das Fadenkreuz eines feststehenden Fernrohrs von dem Bilde eines sehr fernen Gegenstandes in der einen Fläche auf das desselben Gegenstandes in der andern Fläche fiel. — Der beschränkte Raum (auf dem Fensterbrette des physikalischen Kabinettes) erlaubte mir bei diesen Messungen nur einen Vernier abzulesen. Um daher die Theilungsfehler des Instrumentes zu eliminiren, wandte ich das von Struve in seiner Gradmessung angegebene Verfahren an, indem ich es nur auf den ganzen Kreis ausdehnte; ich liess die Messungen nämlich durch Drehung des Hauptkreises, der Reihe nach von Punkten anfangen, die um 30° von einander abstanden.

Die Messungen sind in folgender Tabelle enthalten:

Stand des Verniers bei Einstellung auf das Bild: der ersten Fläche.	der zweiten Fläche.	Differenzen.
0° 00′ 00″	233° 47′ 50″	126° 13′ 10″
30 00 00	263 47 45	— — 15
60 00 00	293 47 40	— — 20
90 00 00	323 47 30	— — 30
120 00 00	353 47 45	— — 25
150 00 00	23 47 43	— — 17
180 00 00	53 47 45	— — 15
210 00 00	83 47 45	— — 15
240 00 00	113 47 50	— — 10
270 00 00	143 47 50	— — 10
300 00 00	173 47 50	— — 10
330 00 00	203 47 50	— — 10
Mittlere Differenz = 126° 12′ 15,6″		

Da der brechende Winkel bekanntlich das Supplement des so eben gefundenen ist, so haben wir den brechenden Winkel oder

$$\psi = 53° \, 47' \, 44'',4.$$

Um nun den Brechungsexponenten der Naphta zu bestimmen, füllte ich das Prisma mit derselben an und stellte es auf eine getheilte Scheibe. Hierauf fixirte ich das Sonnenbild durch einen Heliostaten und liess die Sonnenstrahlen durch eine, $\frac{1}{2}$ Linie breite verticale Spalte auf das Prisma fallen; letzterer war von der Spalte circa 59 Fuss entfernt. — In der gehörigen Stellung hinter dem Prisma stand der Theodolit, so dass das Objectiv des Fernrohrs die durch das Prisma gebrochenen Strahlen auffing. Dann brachte ich die brechende Kante des Prisma durch Reflexion der leuchtenden Spalte auf seinen beiden brechenden Flächen mittelst eines besondern feststehenden Fernrohr in die verticale Stellung.

In dem Farbenspectrum, welches in dem Theodolitenfernrohr sichtbar wurde, fehlte die violette Farbe gänzlich; die übrigen Farben waren sehr gut sichtbar, nur konnte ich die Fraunhoferschen dunkeln Linien nicht erblicken. Die einzig

annehmbare Ursache davon schien mir die zu seyn, dass die verschiedenen horizontalen Schichten der Naphta wegen eines, wenn auch geringen, Unterschiedes der Temperatur von verschiedener Brechbarkeit seien (besonders da die Ausdehnung des Petroleums nach Muncke sehr bedeutend ist), dass also auch für jede ein besonderes Spectrum entstehen müsse, welches bei den unteren, dichteren weiter abgelenkt werde als bei den oberen, wobei sich denn beim Uebereinanderlegen der verschiedenen Spectra die dunkeln Linien verwischen müssen. Um hierüber zur Gewissheit zu gelangen, bedeckte ich die vordere Fläche des Prisma mit einer Pappscheibe, an der nur ein horizontaler, eine Linie breiter, Streifen ausgeschnitten war, so dass das ganze Farbenbild sich nur in einer so breiten Schicht der Flüssigkeit erzeugen konnte und in der That wurden die Striche nun sehr wohl sichtbar, von dem von Fraunhofer mit *A* bezeichneten bis zu *G*, welcher letztere sich fast an der Grenze des Farbenbildes nach der violetten Seite zu befand. Herschel, in seiner Optik, sieht den Strich *G* als etwa in der Mitte des Indigo befindlich an, so dass also hiernach ausser dem eigentlichen Violett, auch noch etwa $\frac{1}{3}$ der Indigo-Strahlen verschluckt werden. Um es mir noch deutlicher zu machen, wie die freien Linien durch Uebereinandergreifen der verschiedenen Spectra verschwinden, brauchte ich nur in der Pappe zwei solcher horizontaler Spalten, eine oben und eine unten anzubringen; in den dadurch entstehenden 2 Spectris war das untere bedeutend mehr abgelenkt als das obere.

Ehe ich jedoch an die Messung des Unterschiedes der Ablenkung ging, brachte ich das Prisma durch die sich drehende Scheibe, auf welcher es stand, in das Azimuth, wo die Ablenkung der Lichtstrahlen durch dasselbe ihr Minimum erreichte; dazu stellte ich die folgende Versuchsreihe an, in welcher ich das Azimuth des Prisma in der Nähe jener Stellung fortschreitend um 15′ vorstellte und die Ablenkung der Striche *B* und *F* bestimmte. Den Strich *G* wählte ich zu diesen Versuchen nicht, weil er nur sehr schwach sichtbar war. Ich konnte nämlich, wenn ich das Fernrohr auf diese Gegend des Farbenbildes richtete, das Fadenkreuz desselben nur dadurch sehen, dass ich es mittelst Kerzenlichts beleuchtete und da mir der von

Fraunhofer hierzu angewandte Beleuchtungsapparat nicht zu Gebote stand, so wurde bei der gewöhnlichen Beleuchtung (wie bei astronomischen Beobachtungen), wenn ich das Fadenkreuz deutlich sah, dagegen der ohnehin schwache Strich *G* unsichtbar. Es gelangen mir zwar die spätern Beobachtungen der Ablenkungen dieses Strichs durch mühsames Hin- und Herschieben der Kerze, aber aus den Beobachtungen selbst wird man sehen, dass hier die Unsicherheit der einzelnen Einstellungen viel grösser war, als bei den übrigen Strichen.

Die Beobachtungen über die Einstellungen des Prisma in das Azimuth der kleinsten Ablenkung sind folgende:

Azim. d. Prisma.	Ablenk. von *F*	Ablenk. von *B*
11° 30	11° 10′ 5″	10° 39′ 00″
15	9 55	38 50
00	9 40	38 30
10 45	9 30	38 15
30	9 30	38 5
15	9 30	38 5
00	9 40	38 5
9 45	9 40	38 5
30	9 55	38 15

Hieraus ersehen wir, dass beim Azim. = 10° 30′ das Prisma für beide Strahlen ***F*** und ***B***, also auch für alle zwischenliegenden, die Stellung des Minimums der Ablenkung hatte. Für den Strahl *G* wird bei dieser Stellung des Prisma die gemessene Ablenkung vielleicht etwas grösser als in ihrem Minimum seyn, allein aus obigem Grunde konnte ich dieses nicht wohl ändern.

Das Prisma ward also in das Azimuth 10° 30′ gebracht und bei diesem Azimuthe sind alle folgenden Messungen gemacht. Jetzt konnte ich die Ablenkung der Strahlen messen, sowohl wenn die Pappspalte oben, als wenn sie unten war; in ersterem Falle wurden die Strahlen um 40″ weniger abgelenkt als in letzterem, kein Wunder also wenn bei gänzlich zur Seite gelegter Pappspalte auch die Striche nicht sichtbar waren.

Ich wählte nun zur Ermittelung des Brechungsexponenten die mittlere horizontale Schicht der Naphta, d. h. ich schob die Pappspalte in die Mitte der vordern Glasfläche des Prisma und setzte in dasselbe, und in derselben horizontalen Höhe, die Kugel eines empfindlichen Thermometers. Hierauf maass ich, zur Bestimmung der absoluten Brechung, die Ablenkung des Strahles *D*

Mittel aus allen vier Vernieren		Ablenkung.	Temperat. R.
Strahl *D*.	Directe Lichtspalte.		
0° 0′ 5″,0	333° 24′ 20″,0	26° 35′ 45″,0	16,85
15 0 6,25	348 24 13,75	— 35 52,5	16,9
30 0 6,25	3 24 2,5	— 36 3,75	16,9
45 0 3,75	18 23 58,75	— 36 5,0	16,9
60 0 6,25	33 23 53,75	— 36 12,5	16,9
75 0 5,00	48 24 2″,5	— 36 2,5	16,95
	Mittel	26° 36′ 0″,21	16,90 R.

Die Formel für die Bestimmung des Brechungsexponenten *n* ist bekanntlich

$$n = \frac{\sin.\left(\frac{\varkappa+\lambda+\psi}{2}\right)}{\sin.\frac{\psi}{2}}$$

wo $\varkappa$ den gemessenen Ablenkungswinkel, λ den Winkel, den der directe Lichtstrahl mit dem gebrochenen vor seiner Brechung macht und ψ den Brechungswinkel des Prisma bedeutet. $\varkappa$ und ψ kennen wir für unsern Fall, es muss also nur noch λ bestimmt werden. Zu dessen Bestimmung stand mir kein andres Mittel zu Gebote, als dasselbe aus der Messung der Entfernung des Mittelpunktes des Theodoliten von der leuchtenden Spalte und von der Mitte des Prisma abzuleiten. — Diese Messungen stellte ich mit aller möglichen Sorgfalt an und fand die erste Entfernung, nämlich die des Theodoliten von der leuchtenden Spalte . . . . = 714,03 Zoll
und die des Theodoliten von der Mitte des Prisma . . . . = 9, 9 —
Hieraus und aus dem Ablenkungswinkel = 26° 36′ 0″,2 ergiebt sich

$$\lambda = 21' 37''.$$

Auf die Sicherheit dieser Bestimmung hat vorzüglich die Richtigkeit des Abstandes $= 9{,}9$ Einfluss; eine 5malige Messung gab die grösste Abweichung vom Mittel $= 0{,}8$ Zoll; ein solcher Fehler bringt aber bei der Bestimmung der Brechungsexponente eine Unrichtigkeit von nicht ganz 2 Einheiten in der 4ten Decimalstelle hervor.

Wir haben also

$$\begin{aligned} \varkappa &= 26^\circ\, 36'\, 0'', 2 \\ \lambda &= \quad 21\;\, 37'' \\ \psi &= 53\;\, 47\;\, 44, 4 \\ \hline \frac{\varkappa+\lambda+\psi}{2} &= 40^\circ\, 22'\, 40, 8 \\ \frac{\psi}{2} &= 26\;\, 53\;\, 52'', 2 \end{aligned}$$

folgl. Brechungsexponent $n = 1{,}431976$

wenn der Strahl aus Luft in die Naphta tritt; folglich wenn der Eintritt aus dem leeren Raum geschieht

$$\varkappa = 1{,}432391 \text{ bei } 16^\circ, 9 \text{ R.}$$

wo der Brechungsexponent der Luft $= 1{,}00029$ gesetzt werden musste. Legt man die von Munke für's rectificirte Steinöhl gegebene Ausdehnung durch die Wärme zum Grunde, so ergiebt sich aus meiner Abwägung das specifische Gewicht der Naphta bei 16,9 R.

$$s = 0{,}784026$$

folglich die brechende Kraft der Naphta, oder

$$\frac{\varkappa^2 - 1}{s} = 1{,}341467$$

d. h. sie steht in der Mitte zwischen dem Terpentinöhl und Bernstein.

Die Dispersion bestimmte ich, indem ich die Entfernung der Striche des Spectrums, die Fraunhofer mit *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* bezeichnete, mittelst des Theodoliten, wie folgt, maass:

Nummer d. Versuchs.	B — C	C — D	D — G	E — F	F — G
1	3′ 5″	9′ 00″	11′ 50″	10′ 35″	20′ 15″
2	3 10	8 50	11 50	10 25	20 15
3	3 15	8 50	11 50	10 30	20 25
4	3 20	8 50	11 55	10 25	20 20
5	3 15	9 00	11 50	10 20	20 5
6	3 30	8 50	11 50	10 30	20 00
7	3 30	8 55	11 55	10 20	20 20
8	3 45	8 45	11 55	10 30	20 5
9	3 25	8 55	12 00	10 25	20 15
10	3 30	8 40	11 55	10 30	20 5
11	3 30	9 00	11 45	10 35	20 5
12	3 25	9 00	11 45	10 35	19 55
13	3 10	8 55	11 55	10 25	20 5
14	3 20	9 00	11 45	10 25	20 25
15	3 15	9 50	11 55	10 20	20 5
Mittel =	3′ 20″	8 55,3	11 51,7	10 27,3	20 10,7

Da wir aber oben die Ablenkung des Strahles *D* fanden

$$= 26° \; 36' \; 0'', 2$$

so sind die Ablenkungen der verschiedenen Strahlen folgende:

von *B* ····· 26° 23′ 44,96
von *C* ····· 26 27 4,9
von *D* ····· 26 36 0,2
von *E* ····· 26 47 51,9
von *F* ····· 26 58 19,2
von *G* ····· 27 18 29,9

folglich sind die Brechungsexponenten für die verschiedenen Strahlen, wenn sie mit $n(B)$, $n(C)$, $n(D)$ u. s. w. bezeichnet werden

		Differenzen.
$n(B)$ ·····	1,429386	
		····· 0,000818
$n(C)$ ·····	1,430204	
		····· 0,002187
$n(D)$ ·····	1,432391	
		····· 0,002903
$n(E)$ ·····	1,435294	
		····· 0,002557
$n(F)$ ·····	1,437851	
		····· 0,004923
$n(G)$ ·····	1,442774	

Diese Differenzen $n(C) \cdot n(B)$ u.s.w. giebt Fraunhofer für Wasser und Terpentin folgendermassen an

Wasser.	Terpentin.
$n'(C) - n'(B) = 0,000754$	$n''(C) - n''(B) = 0,001034$
$n'(D) - n'(C) = 0,001867$	$n''(D) - n''(C) = 0,002904$
$n'(E) - n'(D) = 0,002273$	$n''(E) - n''(D) = 0,003919$
$n'(F) - n'(E) = 0,001953$	$n''(F) - n''(E) = 0,003383$
$n'(G) - n'(F) = 0,003474$	$n''(G) - n''(F) = 0,006462$

Hieraus ergiebt sich folgende Tafel der Verhältnisse der partiellen Dispersion zwischen Naphta und Wasser, und Terpentin und Naphta

Naphta und Wasser.	Terpentin und Naphta.
$\frac{n(C) - n(B)}{n'(C) - n'(B)} = 1,0849$	$\frac{n''(C) - n''(B)}{n(C) - n(B)} = 1,2641$
$\frac{n(D) - n(C)}{n'(D) - n'(C)} = 1,1714$	$\frac{n''(D) - n''(C)}{n(C) - n(B)} = 1,3278$
$\frac{n(E) - n(D)}{n'(E) - n'(D)} = 1,2772$	$\frac{n''(E) - n''(D)}{n(C) - n(D)} = 1,3500$
$\frac{n(F) - n(E)}{n'(F) - n'(E)} = 1,3093$	$\frac{n''(F) - n''(E)}{n(F) - n(E)} = 1,3230$
$\frac{n(G) - n(F)}{n'(G) - n'(F)} = 1,4171$	$\frac{n''(G) - n''(F)}{n(G) - n(F)} = 1,3126$

Hieraus ersehen wir, dass dieses Verhältniss für Terpentin und Naphta für die verschiedenen Farbenstrahlen ziemlich dasselbe bleibt; beim Wasser aber nimmt es mit den mehr brechbaren Strahlen bedeutend zu.

Als Maass der zerstreuenden Kraft gilt bekanntlich die Differenz der äussersten Strahlen (in Bogen) dividirt durch den um die Einheit verminderten Brechungsexponente des mittleren Strahls. Da hier die äussersten violetten Strahlen fehlen, so nehme ich die Differenz der Strahlen B v. G und dividire sie durch den um 1 verminderten Brechungsexponenten von D; wenn ich dasselbe auch für Wasser und

Terpentin thue, so erhalte ich die Zerstreuungskraft dieser 3 Substanzen vergleichsweise. Das Resultat ist:

Zerstreuende Kraft der Naphta = 0, 03096
— — — d. Terpentins = 0, 03731
— — — d. Wassers = 0, 03094

Hier stimmen das Wasser und die Naphta auffallend überein, und wir haben daher gefunden:

> dass die weisse Naphta von Baku fast die zerstreuende Kraft des Wassers und fast dieselben partiellen Dispersionsverhältnisse als das Terpentin hat, so wie es an absoluter brechender Kraft ebenfalls dem Letztern am nächsten steht.

Aus dem ähnlichen Verhalten des Terpentins und der Naphta in den beiden letztern Hinsichten, hielt ich es wohl der Untersuchung werth, ob nicht die Naphta eben so wie jenes Oehl die Eigenschaft besitze, einem durch dasselbe hindurchgehenden polarisirten Strahle seine Polarisationsebene abzulenkeu, allein ich erhielt ein negatives Resultat.

ПРИБАВЛЕНІЕ КЪ РАЗСУЖДЕНІЮ

ОБЪ

ОСТАТОЧНЫХЪ СРАВНЕНІЯХЪ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ;

СОЧИНЕНІЕ

В. БУНЯКОВСКАГО.

(Читано 31 Мая 1833.)

Въ Разсужденіи, напечатанномъ подъ симъ заглавіемъ въ Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Tom. II, pag. 373, мы доказали, что всегда возможно удовлетворить цѣлыми величинами x, y, z остаточному сравненію

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\, p),$$

гдѣ p изображаетъ какое ни есть простое число, а A, B, C и D числа цѣлыя, нераздѣляющіяся на p. Сіе предложеніе можетъ быть распространено и на тотъ случай, когда, вмѣсто простаго модуля p, разматривается какой ни есть сложный модуль, не дѣлящійся только на 9. И такъ, вышеупомянутая теорема можетъ быть представлена въ слѣдующемъ, болѣе общемъ видѣ:

Теорема. *Изобразимъ чрезъ N какое ни есть цѣлое число, но только нераздѣляющееся на 9, а чрезъ A, B, C и D цѣлыя числа, не имѣющія никакихъ общихъ дѣлителей съ N. При таковыхъ условіяхъ, всегда можно будетъ удовлетворить остаточному сравненію*

$$(1)\qquad Au^3 + Bv^3 + Cw^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ N),$$

цѣлыми величинами для u, v, w.

Доказательство. Пусть будетъ $N = p_1^{\lambda} \cdot p_2^{\mu} \cdot p_3^{\nu} \cdots$, гдѣ $p_1, p_2, p_3 \cdots$ изображаютъ числа простыя, отличныя одни отъ другихъ, а λ, μ, $\nu \cdots$ какія ни есть цѣлыя положительныя числа. Сверхъ того мы полагаемъ, что между числами $p_1, p_2, p_3 \cdots$ не находится простое число 3.

Докажемъ сперва, что всегда возможно удовлетворить сравненіямъ:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} Au_1^3 + Bv_1^3 + Cw_1^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1^{\lambda}) \\ Au_2^3 + Bv_2^3 + Cw_2^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_2^{\mu}) \\ Au_3^3 + Bv_3^3 + Cw_3^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_3^{\nu}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{array}\right.$$

потомъ, выведемъ справедливость сравненія

$$(3)\qquad Au^3 + Bv^3 + Cw^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1^{\lambda} \cdot p_2^{\mu} \cdot p_3^{\nu} \cdots)$$

послѣ чего легко будетъ доказать возможность сравненія

$$Au^3 + Bv^3 + Cw^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ 3\, p_1^{\lambda} \cdot p_2^{\mu} \cdot p_3^{\nu} \cdots),$$

относящагося къ тому случаю, когда N дѣлится на 3.

Такъ какъ сравненія (2) имѣютъ всѣ одинъ и тотъ же видъ, то достаточно будетъ доказать возможность одного изъ оныхъ, напримѣръ слѣдующаго:

$$(4)\qquad Au_1^3 + Bv_1^3 + Cw_1^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1^{\lambda}).$$

Разсмотримъ сперва случай $\lambda = 2$, и положимъ что величины α, β, γ опредѣлены такъ, что оныя удовлетворяютъ сравненію

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1);$$

сверхъ того, пусть будетъ

$$(5)\qquad A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D = p_1 E;$$

мы полагаемъ, что количество E, опредѣляемое формулою

$$E = \frac{A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D}{p_1}$$

не дѣлится на p_1.

Изъ трехъ величинъ α, β, γ, по крайней мѣрѣ одна не будетъ дѣлится на p_1; положимъ что α не дѣлится на p_1. и возмемъ

$$u_1 = \alpha + p_1 z_1, \quad v_1 = \beta, \quad w_1 = \gamma;$$

теперь разсмотримъ, возможно ли опредѣлить z_1 такъ, чтобы удовлетворить сравненію

(6) $$A(\alpha + p_1 z_1)^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D \equiv o \text{ (mod. } p_1^2).$$

Когда отбросимъ, по разложеніи $(\alpha + p_1 z_1)^3$, члены дѣлящіеся на p_1^2, то сіе сравненіе приметъ такой видъ

$$3A\alpha^2 p_1 z_1 + A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D \equiv o \text{ (mod. } p_1^2);$$

раздѣливъ же оное на p_1, получимъ

$$3A\alpha^2 z_1 + \frac{A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D}{p_1} \equiv o \text{ (mod. } p_1),$$

или

(7) $$3A\alpha^2 z_1 + E \equiv o \text{ (mod. } p_1).$$

Но, по положенію, ни коеффиціентъ A, ни α^2, не дѣлятся на p_1; сверхъ того, p_1 изображаетъ число простое, отличное отъ 3: слѣдовательно и произведеніе $3A\alpha^2$ не будетъ дѣлиться на p_1, а посему всегда возможно найти такую величину для z_1, которая будетъ удовлетворять сравненію (7). И такъ, для $\lambda = 2$, формула (4) имѣетъ мѣсто.

Положимъ теперь $\lambda = 3$. Пусть будетъ $\alpha' = \alpha + p_1 z_1$. Сравненіе (6), справедливость котораго теперь доказана, обратится въ слѣдующее:

$$A\alpha'^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D \equiv o \text{ (mod. } p_1^2).$$

Взявъ

$$u_1 = \alpha' + p_1^2 z_2, \quad v_1 = \beta, \quad w_1 = \gamma,$$

и положивъ

$$\frac{A\alpha'^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D}{p_1^2} = E'$$

увидимъ, что срав. (4), по сокращеніи и по раздѣленіи на p_1^2, приметъ видъ

(8) $$3A\alpha'^2 z_2 + E' \equiv o \text{ (mod. } p_1).$$

Но сіе сравненіе совершенно подобно срав. (7); слѣдовательно будетъ возможно. Изъ сего заключаемъ, что формула (4), для $\lambda = 3$, также возможна.

Продолжая точно такимъ образомъ, удостовѣримся въ справедливости срав. (4) для всякой величины показателя λ; сверхъ того видимъ, что рѣшеніе онаго будетъ заключаться въ формулахъ

$$u_1 = \alpha + p_1 z_1 + p_1^2 z_2 + \cdots\cdots + p_1^{\lambda-1} z_{\lambda-1}, \quad v_1 = \beta, \quad w_1 = \gamma,$$

гдѣ α, β, γ опредѣляются сравненіемъ (5), а z_1, $z_2 \cdots\cdots$ сравненіями (7), (8) $\cdots\cdots$

Положимъ, что подобнымъ образомъ опредѣлены величины u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3; $\cdots\cdots$ удовлетворяющія сравненіямъ (2). Пусть будетъ сперва $N = p_1^\lambda p_2^\mu$. Въ такомъ случаѣ надобно будетъ доказать возможность сравненія

$$Au^3 + Bv^3 + Cw^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1^\lambda p^\mu),$$

зная, что слѣдующія два

$$Au_1^3 + Bv_1^3 + Cw_1^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1^\lambda)$$
$$Au_2^3 + Bv_2^3 + Cw_2^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_2^\mu)$$

отдѣльно имѣютъ мѣсто.

Для сего, даю сперва чимъ двумъ сравнененіямъ слѣдующій видъ:

$$A(u_1 + p_1^\lambda l_1)^3 + B(v_1 + p_1^\lambda m_1)^3 + C(w_1 + p_1^\lambda n_1)^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_1^\lambda)$$
$$A(u_2 + p_2^\mu l_2)^3 + B(v_2 + p_2^\mu m_2)^3 + C(w_2 + p_2^\mu n_2)_2 - D \equiv o \ (\text{mod.}\ p_2^\mu),$$

гдѣ l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 изображаютъ цѣлыя числа, совершенно произвольныя. Опредѣлимъ сіи шесть количествъ такъ, чтобы оныя удовлетворяли слѣдующимъ уравненіямъ:

$$(9) \qquad \begin{cases} u_1 + p_1^\lambda l_1 = u_2 + p_2^\mu l_2 \\ v_1 + p_1^\lambda m_1 = v_2 + p_2^\mu m_2 \\ w_1 + p_1^\lambda n_1 = w_2 + p_2^\mu n_2. \end{cases}$$

Очевидно, что каждому изъ сихъ уравненій всегда можно будетъ удовлетворить цѣлыми значеніями для l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2, ибо, давъ симъ уравненіямъ видъ

$$(10)\qquad \begin{cases} p_1^\lambda l_1 - p_2^\mu l_2 = u_2 - u_1 \\ p_1^\lambda m_1 - p_2^\mu m_2 = v_2 - v_1 \\ p_1^\lambda n_1 - p_2^\mu n_2 = w_2 - w_1 \end{cases}$$

видимъ, что каждое изъ нихъ есть уравненіе первой степени о двухъ неопредѣленныхъ, коеффиціенты которыхъ не имѣютъ никакихъ общихъ дѣлителей между собою.

Опредѣливъ величины l_1, m_1, n_1, найдемъ и количества

$$u_1 + p_1^\lambda l_1 = u$$
$$v_1 + p_1^\lambda m_1 = v$$
$$w_1 + p_1^\lambda n_1 = w,$$

которыя, очевидно, будутъ удовлетворять сравненію

$$(11)\qquad Au^3 + Bv^3 + Cw^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\, p_1^\lambda \cdot p_2^\mu).$$

Если $N = p_1^\lambda p_2^\mu p_3^\nu$, тогда опредѣлимъ величины u_3, v_3, w_3 такъ, чтобы оныя удовлетворяли сравненію

$$Au_3^3 + Bv_3^3 + Cw_3^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\, p_3^\nu);$$

потомъ, представимъ сравненіе (11) и сіе послѣднее въ слѣдующихъ видахъ:

$$(12)\ \begin{cases} A(u+p_1^\lambda p_2^\mu L_1)^3 + B(v+p_1^\lambda p_2^\mu M_1)^3 + C(w+p_1^\lambda p_2^\mu N_1)^3 - D \equiv o\,(\text{mod.}\,p_1^\lambda p_2^\mu) \\ A(u_3+p_3^\nu l_3)^3 + B(v_3+p_3^\nu m_3)^3 + C(w_3+p_3^\nu n_3)^3 - D \equiv o\ (\text{mod.}\, p_3^\nu), \end{cases}$$

а количества L_1, M_1, N_1, l_3, m_3, n_3 опредѣлимъ такимъ образомъ, чтобы оныя удовлетворяли уравненіямъ

$$u + p_1^\lambda p_2^\mu L_1 = u_3 + p_3^\nu l_3$$
$$v + p_1^\lambda p_2^\mu M_1 = v_3 + p_3^\nu m_3$$
$$w + p_1^\lambda p_2^\mu N_1 = w_3 + p_3^\nu n_3,$$

которыя всегда возможны, Въ такомъ предположеніи, первыя части каждой изъ двухъ формулъ (12), будутъ дѣлимы на $p_1^\lambda p_2^\mu p_3^\nu = N$. И такъ, положивъ

$$u + p_1^\lambda p_2^\mu L_1 = U,\quad v + p_1^\lambda p_2^\mu M_1 = V,\quad w + p_1^\lambda p_2^\mu N_1 = W,$$

видимъ, что сіи количества U, V и W будутъ удовлетворять сравненію

$$AU^3 + BV^3 + CW^3 - D \equiv o \pmod{p_1^{\lambda} p_2^{\mu} p_3^{\nu}}.$$

Продолжая точно такимъ образомъ, докажемъ справедливость сравненія (3).

Для примѣра возмемъ сравненіе

$$2x^3 + 5y^3 + 5z^3 - 6 \equiv o \pmod{637}.$$

Здѣсь $N = 637 = 7^2 \cdot 13$; слѣдовательно можно взять $p_1 = 7$, $p_2 = 13$ $\lambda = 2$, $\mu = 1$. И такъ надлежитъ рѣшить сперва слѣдующія сравненія:

$$2\alpha^3 + 5\beta^3 + 5\lambda^3 - 6 \equiv o \pmod{7}$$

$$2u_1^3 + 5v_1^3 + 5w_1^3 - 6 \equiv o \pmod{7^2}$$

(13) $$2u_2^3 + 5v_2^3 + 5w_2^3 - 6 \equiv o \pmod{13}.$$

Первому удовлетворяемъ полагая

$$\alpha = 2; \quad \beta = 3, \quad \gamma = 3;$$

второму, принявъ

$$u_1 = 2 + 7z_1, \quad v_1 = 3; \quad w_1 = 3.$$

Количество z_1 опредѣляется посредствомъ срав. (7), которое, въ настоящемъ случаѣ, обратится въ

$$24z_1 + 40 \equiv o \pmod{7};$$

отсюда

$$z_1 = 3,$$

слѣдовательно

$$u_1 = 23, \quad v_1 = 3, \quad w_1 = 3.$$

Сравненію (13) удовлетворяемъ полагая

$$u_2 = 8, \quad v_2 = 4, \quad w_2 = 2.$$

И такъ, имѣемъ два сравненія

$$2 \cdot 23^3 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^3 - 6 \equiv o \pmod{7^2}$$

$$2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 2^3 - 6 \equiv o \pmod{13}.$$

Теперь, составляемъ уравненія (9)

$$23 + 7^2 l_1 = 8 + 13 l_2$$
$$3 + 7^2 m_1 = 4 + 13 m_2$$
$$3 + 7^2 n_1 = 2 + 13 n_2$$

и получаемъ изъ оныхъ

$$l_1 = 5, \quad m_1 = 4, \quad n_1 = 9.$$

Слѣдовательно

$$x = 23 + 7^2 \cdot 5 = 268$$
$$y = 3 + 7^2 \cdot 4 = 199$$
$$z = 3 + 7^2 \cdot 9 = 444,$$

а посему

$$2 \,.\, 268^3 + 5 \,.\, 199^3 + 5 \,.\, 444^3 - 6 \equiv o \ (\text{mod. } 637);$$

и дѣйствительно, первая часть сего сравненія равна

$$515542573 = 637 \cdot 809329.$$

Если $N = 3 p_1^{\lambda} p_2^{\mu} p_3^{\nu} \cdots$, то положимъ что величины a, b и c удовлетворяютъ сравненію

$$Aa^3 + Bb^3 + Cc^3 - D \equiv o \ (\text{mod. } 3),$$

а виличины α, β, и γ слѣдующему

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 - D \equiv o \ (\text{mod. } p_1^{\lambda} p_2^{\mu} p_3^{\nu} \cdots)$$

опредѣлимъ и величины U, V и W, удовлетворяющія сравненію

$$AU^3 + BV^3 + CW^3 - D \equiv o \ (\text{mod. } N).$$

Для сего, стоитъ только рѣшить, какъ было сказано выше, слѣдующія неопредѣленныя уравненія первой степени

$$a + 3l_1 = \alpha + p_1^{\lambda} p^{\mu}_2 p_3^{\nu} \cdots \ l_2$$
$$b + 3m_1 = \beta + p_1^{\lambda} p^{\mu}_2 p_3^{\nu} \cdots m_2$$
$$c + 3n_1 = \gamma + p_1^{\lambda} p^{\mu}_2 p_3^{\nu} \cdots n_1.$$

Когда величины l_1, m_1 и n_1 будутъ выведены изъ сихъ уравненій, тогда получатся величины количествъ U, V, W, посредствомъ формулъ

$$U = a + 3l_1, \quad V = b + 3m_1, \quad W = c + 3n_1.$$

Сіи величины U, V, W будутъ удовлетворять сравненію

$$AU^3 + BV^3 + CW^3 - D \equiv o \ (\text{mod. } 3p_1^{\lambda} p_2^{\mu} p_3^{\nu} \cdots).$$

*

Но если модуль N будетъ дѣлиться на высшую степень числи 3, напримѣръ на вторую, то сравненію

$$Au^3 + Bv^3 + Cw^3 - D \equiv o \pmod{N}$$

не всегда можно будетъ удовлетворить.

Напримѣръ, сравненіе

$$u^3 + v^3 + w^3 - 5 \equiv 0 \pmod{9}$$

невозможно, ибо сумма трехъ кубовъ $u^3 + v^3 + w^3$ относительно дѣлителя 9, можетъ быть только котораго нибудь изъ слѣдующихъ семи видовъ:

$$9k$$
$$9k + 1$$
$$9k - 1$$
$$9k + 2$$
$$9k - 2$$
$$9k + 3$$
$$9k - 3,$$

а слѣдовательно выраженіе $u^3 + v^3 + w^3 - 5$ будетъ котораго нибудь изъ видовъ

$$9k - 5$$
$$9k - 4$$
$$9k - 6$$
$$9k - 3$$
$$9k - 7$$
$$9k - 2$$
$$9k - 8,$$

а посему и не можетъ дѣлиться на 9 безъ остатка. Легко усмотрѣть, что кромѣ приведеннаго здѣсь сравненія, есть еще и другія, которыя подлежатъ тому же самому исключенію.

NOTICE

SUR LES

DIAMANS DE L'OURAL,

PAR

M. PARROT.

(Lu le 21 Mars 1832.)

L'on sait que ce fut M. le Professeur Engelhardt de Dorpat qui a prédit le premier, d'après les connaissances géognostiques qu'il avait puisées dans son voyage à l'Oural, que ces monts devaient recéler des diamans. Les indices livrées par ce célèbre minéralogue avaient engagé le gouvernement russe à ordonner des fouilles qui furent sans effet. M. le Comte Polié, propriétaire de terrains où l'on exploite de l'or et du platine, fut plus heureux, et l'époque du voyage de M. Humboldt dans la Russie asiatique fut signalé par la trouvaille des premiers diamans russes, comme si l'Oural s'était plu à faire hommage de ses nouveaux trésors à l'illustre voyageur. Cette découverte intéressa vivement l'Europe savante et industrielle, et la Russie se félicita de posséder une pierre précieuse, qui jusqu'alors avait été la possession exclusive des Indes orientales et du Brésil. J'ose donc espérer que quelques observations nouvelles sur les diamans trouvés jusqu'à présent dans l'Oural ne seront pas sans intérêt, d'autant plus qu'elles contiennent des données importantes sur la formation de ce fossile aussi rare que précieux.

La mort prématurée de M. le Comte Polié, si vivement regretté de tous ceux qui l'ont connu, ne mit pas fin aux fouilles qu'il avait commencées. Mme la Comtesse Polié les fit continuer, bien moins dans l'idée d'augmenter les revenus de ses

mines *) que par un tendre souvenir pour un époux chéri dont elle déplore la perte avce une doulenr toujours nouvelle.

Ce fut d'abord une simple curiosité scientifique qui m'engagea à prier M[me] la Comtesse Polié de me permettre l'inspection des diamans trouvés dans l'Oural jusqu'alors. Elle eut la bonté de m'accorder cette inspection dans sa maison et, par la suite, d'en emporter chez moi deux qui me parurent mériter une attention toute partculière. Comme il est très rare qu'un physicien ou même un minéralogue, ait l'occasion d'examiner un seul diamant brut, je fus charmé de l'avantage d'en voir une trentaine à la fois, et je m'empresse d'en offrir le tribut public de ma reconnaissance à M[me] la Comtesse Polié.

Chacun des 30 diamans que j'ai examinés sous plus d'une loupe, était enveloppé dans un papier sur lequel étaient notés le numéro et le poids en Karats de chacun. Comme le même numéro se trouve répété quelque fois, j'ai ajouté dans les notes que je prenais une lettre à ces numéros pour distinguer les individus. Ces cristaux ont tous 24 faces triangulaires, bombées, plus ou moins irrégulières et la plupart striées. Ils appartiennent au genre du dodécaëdre rhomboïdal dont chaque rhomboïde est comme plié sur la diagonale qui passe par les angles obtus. Plusieurs de ces diamans ont une teinte jaunâtre.

N°. 19. — poids $\frac{3}{8}$ Karat; passablement régulier. Les arêtes sont enlevées, formant une espèce de facette très étroite, visible seulement à la loupe. Très légère teinte jaunâtre.

N°. 2^a. — poids $1\frac{1}{8}$ Karat; plus irrégulier que le précédent. Teinte à peine sensible.

N°. 28. — $\frac{25}{32}$ Karat; très irrégulier. Il se trouve dans l'intérieur une fissure qui ne paraît pas atteindre les limites du cristal. Teinte à peine sensible.

N°. 29. — poids $\frac{13}{16}$ Karat; passablement régulier. Il a une fente considérable à l'extérieur. Teinte jaunâtre très marquée.

*) L'on assure que la trouvaille de 34 ou 35 petits diamans a coûté plus de 80,000 Rbl. par la distraction d'une partie des ouvriers employés à exploiter l'or.

N°. 6. — poids $\frac{9}{32}$ Karat; presque régulier. Sans couleur.

N°. 21. — poids $\frac{17}{32}$ Karat; presque régulier. Sans couleur.

N°. 10. — poids $\frac{7}{32}$ Karat; ce diamant est cassé, de sorte qu'il en manque presque la moitié. Teinte jaune-verdâtre.

N°. 7. — poids $\frac{1}{2}$ Karat; irrégulier. Les faces plus fortement bombées que dans les autres. Teinte jaunâtre.

N°. 1[a]. — poids $1\frac{1}{4}$ Karat; très irrégulier et plus aplati que les autres. Point de couleur.

N°. 18. — poids $\frac{3}{8}$ Karat; presque régulier. Cassure à un des angles solides. Incolore.

N°. 25. — poids $\frac{1}{8}$ Karat; cristal bien plus alongé que les autres, de sorte qu'il a l'air d'un prisme hexagonal terminé par deux pyramides à 6 côtés. Toutes les faces sont moins bombées que dans les autres exemplaires. Sans couleur.

N°. 8. — poids $\frac{1}{4}$ Karat; irrégulier. Presque incolore.

N°. 3[a]. — poids $1\frac{1}{16}$ Karat; irrégulier. Presque incolore.

N°. 4[a]. — poids $\frac{3}{4}$ Karat; irrégulier; fendu à deux endroits. Sans couleur.

N°. 3[b]. — poids inconnu. Il ressemble beaucoup au N°. 25. Seulement la partie qui paraît prismatique, un peu aplatie. Teinte jaunâtre.

N°. 3[c]. — poids $\frac{1}{4}$ Karat. Un côté cassé. Point de couleur.

N°. 5. — poids $\frac{1}{2}$ Karat. Il ressemble au N°. 25; mais un des bouts est plus gros que l'autre; les 12 faces latérales plus bombées. Incolore.

N°. 11[a]. — poids $\frac{11}{32}$ Karat; très irrégulier. Point de couleur.

N°. 13. — poids $\frac{17}{32}$ Karat; irrégulier; faces très bombées. Incolore.

N°. 1[b]. — poids $2\frac{17}{32}$ Karat; très irrégulier. Eau trouble sans couleur marquée

N°. 27. — poids $\frac{9}{32}$ Karat; très régulier. D'une belle eau. Sans couleur.

N°. 20. — poids $\frac{25}{32}$ Karat. Ce cristal est cassé sur sa longueur, en sorte que la moitié manque. Couleur très jaunâtre.

N°. 2[b]. — poids $\frac{9}{32}$ Karat; assez régulier par un bout, très irrégulier par l'autre. Belle eau. Incolore.

N°. 24. poids $\frac{5}{16}$ Karat; peu irrégulier. Sur une des faces se trouve un enfoncement plat en forme de coeur, provenant peut-être d'un éclat lancé hors de cette surface. La loupe ne pouvait pas décider si cet enfoncement offrait les rides naturelles aux faces ou une cassure raboteuse. Belle eau. Sans couleur.

N°. 16. — poids $1\frac{4}{32}$ Karat; peu irrégulier. Sans couleur sensible.

N°. 4. — poids $\frac{12}{32}$ Karat; très irrégulier. Sans couleur.

N°. 11^b. — poids 1 Karat; presque régulier à un bout, irrégulier à l'autre. Point de couleur.

N°. 22. — poids $\frac{1}{4}$ Karat; presque régulier. Fente à sa plus grande surface. Il contient plusieurs petits corps noirs; d'ailleurs sans couleur et d'une belle eau.

N°. 23. — poids $\frac{21}{32}$ Karat; peu irrégulier; fortement ridé et raboteux à sa surface. Il contient des corps noirs plus que le N°. 22.

La somme de tous les poids nommés est $16\frac{29}{32}$ Karats et le poids moyen d'un de ces diamans est entre $\frac{18}{32}$ et $\frac{19}{32}$ de Karat.

Tous ces diamans sont oblongs et plus ou moins aplatis, de sorte qu'à une distance où l'oeil ne distingue plus les arêtes des surfaces supérieures, ils offrent l'image d'une lentille ovale. J'ai jugé l'irrégularité plus ou moins grande selon que les arêtes se terminaient moins ou plus près du sommet dans lequel elles ne se réunissent presque nulle part. Le N°. 22, dont je livre les contours, est un des moins irréguliers. Les circonstances ne m'ayant pas permis d'en mesurer les angles (ce qui n'eût pas été sans difficultés à cause de la courbure des surfaces) et n'ayant d'ailleurs pas le dessein de faire des observations cristallographiques, je m'en suis tenu aux observations générales que je viens de communiquer, pour m'attacher à l'observation de deux exemplaires, les numéros 22 et 23, à cause des taches noires qu'ils offrent. Mme la Comtesse Polié a eu la complaisance de me confier ces deux pour les examiner chez moi.

Je m'assurai à la première inspection sous le microscope, que les taches noires provenaient de corps contenus dans l'intérieur de ces cristaux, sans qu'aucune partie ne touchât la circonférence. Mais je me persuadai en même tems que le N°. 23.

ne pouvait servir à aucune observation microscopique, ses surfaces étant très rudes et un peu opaques. Par contre je vouai beaucoup de soin à l'observation du N° 22 qui a des surfaces, surtout la supérieure, presque entièrement lisse, et dont la masse est bien transparente et sans couleur. J'en ai copié dans la figure ci-jointe l'image que m'en offrait le microscope, le cristal étant placé dans la position où il fournissait les contours les mieux dessinés. Je l'avais pour cet effet muni d'un manche *A* de cire blanche fixée à une aiguille mobile en tout sens. Le grand microscope de l'institut optique de Munich m'a servi à ces observations et l'instrument micrométrique qui y est adapté, à dessiner la figure que je livre, dont la dimension linéaire est à celle du cristal = 28 : 1, de sorte que la plus grande longueur du cristal est 1,58, et la plus grande largeur 1,01 de la ligne de Paris. Afin que l'on puisse trouver facilement toutes les dimensions de la figure, j'ai exécuté l'échelle, où une des grandes divisions correspond à 0,144 de la ligne de Paris.

Pour dessiner avec le plus d'exactitude possible les contours du cristal et les figures qu'il contient j'ai tracé deux paires de coordonnées, l'une pour les contours et l'autre pour les figures, et marqué au moyen de l'instrument micrométrique la position de chaque point nécessaire à ce dessin, après avoir fait une copie approximée sur laquelle je marquais les nombres du micromètre. J'ai également mis le plus grand soin dans l'expression des teintes et reflets et du caractère des contours des figures, de sorte que je puis assurer que ce dessin est à tous égards ressemblant à l'original. L'extrême rareté de l'objet m'a engagé à cette exactitude, de crainte de faire naître de fausses idées chez ceux qui n'ont pas vu ce diamant, ou quelque autre de cette espèce, et parce que ces corps noirs donneront occasion à des conclusions dont on ne peut pas retracer les données avec trop de précision. J'avoue avoir encore été porté à ce soin extrême par la singularité des figures que ce diamant offre, dont l'une des deux grandes ressemble assez à une hure de sanglier, la partie supérieure de la seconde à la tête d'un oiseau hupé qui hérisse les plumes de son cou, et la troisième près de celle-ci, à un oiseau qui prend une attitude fière

comme pour se préparer au combat, toutes choses qui pourraient faire naître l'idée que le dessinateur s'est un peu abandonné à l'essor de son imagination.

Il a déjà été dit que ces figures proviennent de corps de couleur noire disséminés dans l'intérieur du cristal, et recouverts entièrement par la masse cristalline. Je n'ai pu déterminer l'épaisseur de ces petits corps, parce que, lorsque je plaçai le diamant dans la position la plus favorable pour l'observer, je n'obtins que des contours diffus qui variaient considérablement, pour peu que la position du cristal changeât, sans jamais offrir des limites bien dessinées. Je ne puis rien conclure de ces observations, sinon que l'épaisseur des deux grandes masses est beaucoup moindre que leur longueur et largeur.

La tache entre le museau et l'oeil de la hure, et l'oeil lui-même, paraissent jaunes, s'éclaircissant de gauche à droite jusqu'au blanc. Les autres taches blanches dans l'intérieur du noir étaient incolores.

La courbe *BCD* est une fente oblique qui ne dépasse pas les limites que le dessin lui donne. La loupe en a fait connaître de semblables dans quelques autre diamans décrits. Cette fente n'offre point de couleur.

Je devais présumer que la courbure des surfaces a eu quelque influence sur les teintes. Pour apprécier cette influence, je plongeai le diamant dans de l'huile très limpide et observai les changemens suivants :

Les parties noires *ax* de la hure disparurent en se réunissant à la tache claire voisine, la partie inférieure noire resta.

La pointe *y* se rétrécit et pâlit.

Les parties *zv* sur la hure devinrent plus claires.

La partie grise, *o*, au bas de la grande figure, devint plus foncée, tandis que les deux taches parfaitement blanches ne subirent aucun changement, se présentant toujours comme des trous dans la masse noire.

Les parties disséminées *p*, *q* parurent plus noires et avec des contours mieux prononcés.

A l'endroit *m*, près du bord, parurent quelques fines taches noires détachées qui n'avaient pas été aperçues auparavant.

A l'endroit *nkhl* parurent des taches noires linéaires et parallèles; par contre les taches noires *i* du coin disparurent.

Sur la ligne *de* et sur les angles *f* et *g* parurent de nouvelles taches plus ou moins noires et un peu diffuses.

Les côtés du rhomboïde supérieur avaient presque disparu; du reste rien ne s'était changé, soit dans les contours, soit dans les teintes *).

Après avoir décanté l'huile, laissant au reste la couche adhérente au cristal et une petite portion au fond du vase, je renouvelai les observations.

La tache *ax* reparut aussi noire qu'auparavant.

Les particules dans la contrée *de* se conservèrent et offrirent des dessins plus nets.

En *d'*, hors du rhomboïde, il se forma un groupe de petites figures dessinées correctement.

En *m* le groupe de petites figures se changea en une tache diffuse.

En *o'* il parut une groupe nettement dessiné qui remplissait l'angle.

Après avoir enlevé l'huile superflue au fond du verre et laissé la couche adhérente au diamant, j'observai:

Les figures en *o'* gagnèrent en étendue et devinrent diffuses. L'on observait immédiatement au dessous une image réflêchie de ces objets mais plus foncée que les objets mêmes.

Toute la surface *E* parut striée et tachée jusques en *e*. De même tout le triangle *F* et les taches *f* et *g*, seulement celles-ci plus foncées.

Du reste aucun autre changement.

---

*) On sait que lorsque l'on plonge un corps transparent et incolore dans un liquide incolore et de même pouvoir réfringent, l'on ne voit plus ni ses contours ni ses arêtes; le corps disparaît totalement. Si le pouvoir réfringent de l'huile eût été égal à celui du diamant, le diamant aurait disparu, et il ne serait resté que l'image de tous les corps étrangers dispersés dans son intérieur, régulièrement dessinée.

Cette seconde modification de la vision n'apporta donc aucun changement dans le rhomboïde qui contient les figures, mais seulement dans les côtés adjacens du cristal. Ni cette modification ni la première n'ont apporté aucun changement dans l'aspect de la fente *BCD*. Ainsi il est certain que les corps noirs contenus dans notre diamant ont réellement la figure et la couleur indiquées par notre dessin et que la forme bombée et rompue du rhomboïde sous le quel ils se trouvent n'y apportent pas de changemens sensibles; ce qui n'a pas lieu pour les petits corps qui se trouvent au delà du rhomboïde et que l'huile nous a rendus visibles en changeant par réfraction la voie de la lumière de ces corps.

Un seul coin de ces figures, le museau de la hure de sanglier, offrit des changemens marquants; car la tache *o* et les bords *zv* étant devenus, la première plus foncée, les autres plus claires, indiquent seulement que, la réfraction étant changée, il est arrivé à ces points plus ou moins de lumière qu'auparavant par la réflection postérieure.

Quant à la tache jaunâtre et blanche sur le museau, j'employai une plus forte lentille objective et découvris que cette tache et les trois cornes adjacentes, l'une en haut et deux en bas, ne sont pas autre chose que des fractures, des surfaces inégales dont il a été violemment enlevé des écailles de la masse du diamant et que par conséquent elles n'appartiennent nullement aux corps noirs. Je m'en assurai complettement d'abord en observant qu'elles réfléchissaient la lumière très irrégulairement, produisant des rayes et des taches et anamorphosant la figure noire sous elles; puis, en tournant le diamant sur son axe, de façon que la lumière de ces surfaces soit réfléchie hors du champ de la lentille du microscope; car alors la tache jaunâtre disparaît et le tout devient noir, en perdant au reste un peu de sa largeur.

En parcourant la surface du rhomboïde sous une troisième amplification plus grande que les deux premières, je m'aperçus de quantité de groupes de surfaces écaillées à la manière de la tache du museau, mais beaucoup plus petites, qui réfléchissaient plus ou moins de lumière blanche. J'en vis nommément une file près de la diagonale du rhomboïde plus marquante que les autres. Il ne me paraît pas

douteux que c'est à ces groupes de petites surfaces irrégulières que nous devons les teintes moins foncées que nous observons dans nos figures noires, et que, par conséquent, *les masses qui forment ces figures sont homogènes et parfaitement noires.* Et voilà la première conséquence que nous tirons des observations citées.

Mais quelle est cette matière noire qui se trouve dans ces deux diamans de l'Oural? Cette question importante, dont la solution nous instruirait peut-être complètement sur la nature et la formation du diamant, n'a peut-être encore jamais été faite; car il est probable que l'on n'a j'amais décrit un diamant de ce genre; au moins aucune description n'en est parvenue à ma connaissance ou à celle de quelques minéralogues auprès desquels j'ai pris des informations. S'il m'eut été permis de détruire un de ces deux diamans la solution de cette question eut été facile.

Nous avons quantité de masses cristallines qui contiennent des corps étrangers, comme par exemple le cristal de roche sillonné par des cristaux de schörl en forme d'aiguilles, plusieurs agathes parsemées de petits corps de forme de mousse que M. Raspail déclare être réellement des mousses végétales, et que d'autres minéralogues regardent comme des oxides de fer ou de manganèse, des saphirs qui contiennent de l'oxidule de fer aimanté, etc.

Les corps noirs, observés dans notre diamant à la plus forte amplification, ne sont nullement cristallisés, et peuvent être comparés aux corps en forme de mousse dans les agathes.

Pour m'assurer s'ils ne seraient peut-être pas du fer oxidulé, aimanté ou non, j'ai suspendu chacun de ces diamans à un fil de cocon dans un petit tube de verre où il pouvait osciller librement, et en ayant approché le pôle d'un aimant qui porte 8 livres, je n'ai pas aperçu le moindre mouvement du diamant.

La première idée qui vient à l'esprit est que cette matière noire est du carbone informe et elle cadrerait fort bien avec les figures décrites. Mais le tritoxide de fer en poudre, par exemple, pourrait fort bien former des figures de ce genre, et la minéralogie peut apparemment nous offrir plusieurs autres oxides auxquels on pour-

rait les attribuer. Ainsi il paraît impossible de découvrir la nature de cette substance noire par la seule observation des figures.

J'aurais pu soumettre le diamant décrit à l'épreuve de la balance hydrostatique; mais j'avais plus d'une raison de m'en dispenser. La première est que ce diamant est si petit, que la différence de sa pesanteur spécifique à celle d'un diamant ordinaire ne pourrait guères être aperçue avec sûreté, que la petite portion de matière étrangère qu'il contient fut du carbone ou un oxide *). La seconde est que la pesanteur spécifique des diamans n'est pas absolument la même pour tous les individus, et que cette différence peut surpasser de beaucoup la différence qui se trouverait entre notre diamant hétérogène et un diamant homogène. Une troisième raison est que la vraie pesanteur spécifique du charbon végétal, dénué des pores grossiers qui le rendent en apparence si léger, est presque égale à celle du diamant. Car j'ai fixé, il y a déjà plus de 20 ans, celle du charbon de bouleau à 3,453, et Haüy celui du diamant oriental à 3,52, ce qui fait à peu près $\frac{1}{50}$ de différence.

L'analyse chimique du diamant ayant prouvé que cette pierre précieuse est composée presque en entier de carbone et de très peu d'hydrogène, comme le charbon végétal, il est très vraisemblable que la matière noire de notre diamant est une espèce de charbon végétal sous une forme quelconque non cristalline. L'on sait en outre

---

*) Le Karat pesant 4 grains, poids de Troys, notre diamant ne pesait que 1 grain. L'eau qu'il eut déplacée eut pesé 0,28 grain; et comme le volume des corps noirs fait à peine $\frac{1}{20}$ de celui de tout le cristal, ce serait sur un poids de $\frac{1}{71}$ grain sur lequel l'opération hydrostatique eut roulé. Or les diamans n'ayant pas tous la même pesanteur spécifique, il est clair que les résultats de la pesée n'eussent rien prouvé.

On eut pu à la vérité obvier à cet inconvenient en cherchant la pesanteur spécifique moyenne de tous ces diamans à la fois qui ne sont ni tachés ni colorés. Ils sont au nombre de 14 et j'aurais pu m'assurer si cette moyenne est vraimant la pesanteur spécifique de chacun en faisant de ces pesées de 4 à 4 et 3 à 3 Après avoir obtenu cette sûreté, j'aurais pu, au moyen de la balance de notre cabinet de Physique, qui, chargée de 83 grains, indique avec sûreté une différence de $\frac{1}{3000}$ grain, apprendre avec certitude si les deux cristaux, qui contiennent la substance noire, sont plus pesants que les autres, ou non Si le dernier cas eut eu lieu, alors il eut été décidé que les corps noirs ne sont pas des oxides métalliques, mais une substance de la même pesanteur spécifique que le diamant, c'est-à-dire du carbone. Mais je n'ai pas eu la faculté d'emporter ces diamans chez moi pour faire ces expériences délicates.

que les joailliers qui reçoivent des diamans à tailler qui ont des taches noires ou jaunâtres inhérentes à la surface, les font disparaître en faisant rougir ces diamans au feu, ce qui n'aurait pas lieu, si ces taches ne provenaient pas d'un composé de carbone et d'hydrogène. Cette observation sur les taches extérieures qui font masse avec les couches extérieures du diamant, nous fournit une nouvelle analogie pour admettre avec un haut degré de vraisemblance que *la matière noire des deux diamans que nous avons observés est une substance carbonique hydrogénée, et que ces diamans eux-mêmes sont des diamans encore imparfaits.*

Mais ce qui paraît décider la question, c'est que les petites masses noires du cristal que nous examinons sont isolées, entièrement renfermées dans la masse cristallisée sans toucher à aucune de ses faces ou de ses angles. Si elles étaient des corps hétérogènes, antérieurs à la cristallisation, elles eussent été placées sur une base quelconque et recouvertes ensuite par la masse cristalline, comme cela à lieu par exemple dans les cristaux de quartz, dans les agathes, etc., où le corps étranger, cristallisé ou non, semble partir d'un angle ou d'une surface de cristal. Ainsi nos taches noires sont homogènes à la masse avant qu'elle ait été modifiée pour former le cristal; c'est un reste de carbone hydrogène qui n'avait pas encore obtenu la transparence lorsque le reste, déjà transparent, s'est cristallisé.

Les cristaux de l'Oural nous offrent encore un phénomène très intéressant. Parmi les trente que j'ai observés, il s'en est trouvé huit qui ont des fentes ou même des cassures formelles dans toute sorte de directions. D'où peuvent provenir ces fentes et ces cassures dans des corps aussi durs? Un choc entre deux roches de quartz, s'il eut pu altérer la cohésion du diamant, l'eut complètement cassé et n'aurait pu produire uniquement des fentes et bien moins encore ces nombreuses traces d'écaillures que nous avons observées au microscope et qui attestent, aussi bien que les fentes, un effort très violent. Rien ne peut, selon moi, avoir produit ces effets qu'une chaleur très considérable, telle que la chaleur rouge à laquelle a succédé un refroidissement subit. Cette cause explique très naturellement les écaillures, les fentes et les ruptures formelles que ces diamans nous offrent. Le physicien désirera à peine

que cette opinion soit confirmée par des expériences directes, tant elle est simple et conforme aux lois de la physique et à tant d'expériences analogues. Au reste, je les eusse faites si j'avais eu des diamans à ma disposition.

Il paraît donc décidé que ces huit diamans ont été exposés à de hauts degrés de chaleur, et par conséquent aussi les autres trouvés dans la même contrée et qui sont de même origine, avec la différence que ceux-là ont été réfroidis subitement, c'est-à-dire à nu, ou enveloppés de très peu d'autres matières, les autres lentement ou enveloppés d'une plus grande masse étrangère, qui ensuite a été délitée ou bien enlevée par les frottemens.

Mais où trouver cette chaleur rouge, si ce n'est au sein des volcans? Ainsi, nous en voilà à pouvoir prononcer avec quelque certitude que *les diamans sont des produits de l'action volcanique exercée sur de petites portions de charbon ou de substance composée de beaucoup de carbone et de très peu d'hydrogène* *).

Si l'on se rappelle les principes de la théorie des volcans, la grande profondeur à laquelle se trouvent les cavernes volcaniques et surtout la pression énorme exercée dans ces cavernes par l'élasticité de la vapeur, l'on ne s'étonnera pas qu'un charbon ou un morceau de houille, ammené de manière ou d'autres dans cet antre, ait obtenu par cette pression excessive son degré naturel de densité, qui est celui du diamant, et qu'il ait pu se prêter à une fusion qui lui aura donné la transparence que nous admirons en lui sous la forme de diamans.

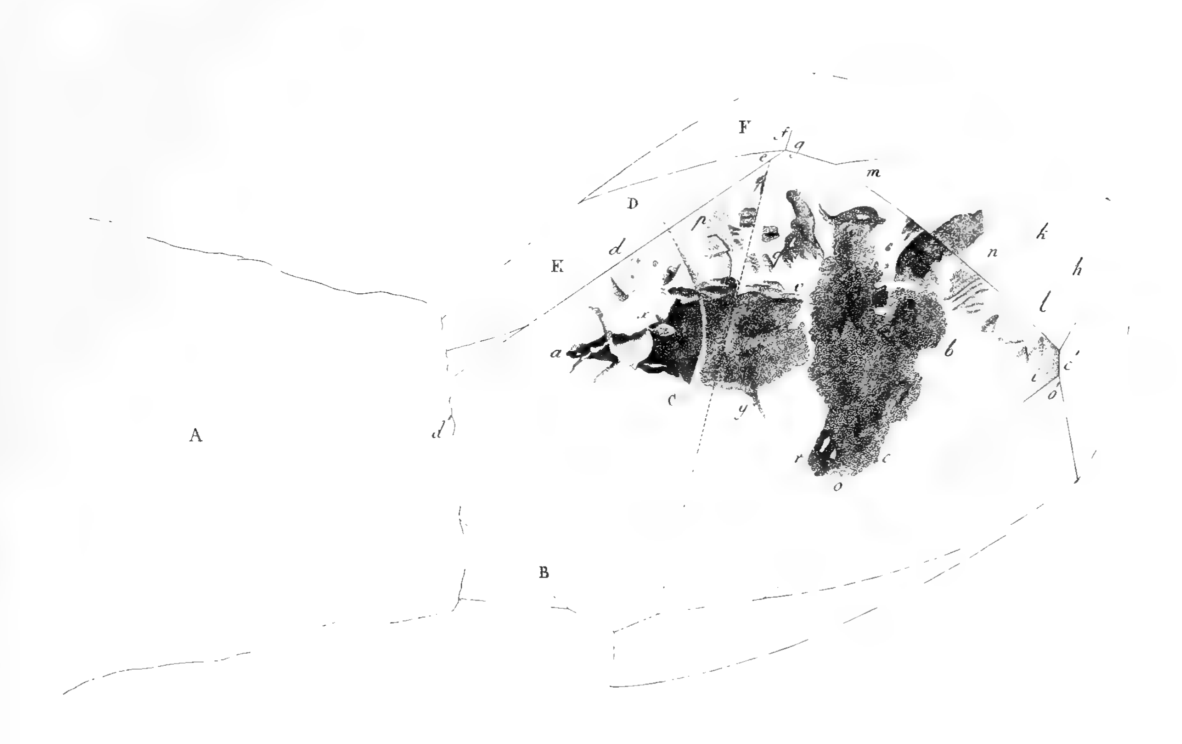
Nous ne savons rien de géognostique sur les diamans de Vésapour et de Golconde que ce que les Indiens veulent bien nous en raconter pour tromper notre curiosité. M. Eschwege nous a dit tout ce qu'il a pu apprendre et observer lui-même sur les diamans du Brésil; mais comme il n'a point découvert les monts qui leur ont donné naissance, et qu'il croit même qu'ils ont été détruits ou ensevelis, ce qu'il

*) Fondé sur d'autres principes qu'il est inutile de répéter ici, j'avais déjà publié cette opinion il y a 16 ans dans mon système géologique. L'ensemble de toutes ces raisons me paraît faire une preuve complète, qui gagnerait le dernier degré d'évidence par l'examen chimique de la masse noire des deux diamans décrits.

nous apprend, n'est que peu de chose. Mais ce peu est de grande importance et a guidé M. Engelhardt assez sûrement pour prédire l'existence des diamans dans les monts Ourals et est suffisant pour établir avec la plus grande vraisemblance que ces diamans ont existé autrefois dans des montagnes volcaniques.

Le géognoste russe peut se placer dans une position bien plus avantageuse relativement à l'origine primitive des diamans de l'Oural; les montagnes où ils ont été formés sont encore là; et si l'on suit la trace des courans qui ont charié les diamans où on les trouve, jusqu'aux montagnes où ces traces aboutissent, il n'est pas douteux que l'on n'arrive au gite primordial des diamans. Des fouilles exécutées surtout, ou même exclusivement, là où l'on découvrira des lits de produits volcaniques ou des filons, seront probablement couronnées de succès, et l'onpeut espérer de trouver des diamans incomparablement plus gros que ceux que les sables ont livrés jusqu'ici. S'il était permis de conclure des grosses masses d'or et de platine trouvées sur le versant de l'Oural, comparées à celles de l'Amérique, on pourrait même concevoir l'espoir de trouver dans ces montagnes des diamans supérieurs à ceux du Brésil.

Ainsi, si M^e. la Comtesse Polié a eu raison de faire cesser les fouilles si couteuses dans les dépots des torrens, l'on ne peut que lui conseiller d'organiser de nouvelles fouilles dans les montagnes. Les productions volcaniques conduiront le plus sûrement le géognoste qui se chargera de ce travail. Ces nouvelles fouilles ne seront probablement ni longues ni très couteuses. Car les diamans trouvés dans les lavages sont ceux qui, lors de l'éruption volcanique, se sont trouvés à la superficie de la masse éjetée et se sont subitement refroidis par l'eau de la mer qui couvrait encore alors cette contrée. La roche enveloppante ayant été félée et brisée par le même refroidissement subit, a été facilement entrainée par le retrait postérieur de la mer. Les diamans trouvés dans les sables chariés sont en quelque sorte des messagers envoyés par des personnages bien plus importans qu'eux comme pour nous annoncer qu'ils attendent une visite de notre part. Il serait inconséquent de la leur refuser et fâcheux que les diamans trouvés jusqu'à présent sur le territoire russe ne fussent qu'une apparition éphémère.



1 division est = 0,144 de la ligne de Paris.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

MÉMOIRE

SUR

LE CALCUL DES VARIATIONS DES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 24 Janvier 1834.)

L'APPLICATION de la méthode des variations aux fonctions qui ne renferment que les intégrales relatives à une seule variable, ne laisse rien à désirer ni du côté de la simplicité, ni de celui de la généralité. Mais il n'en est pas de même dans le cas, où il s'agirait de rechercher la variation d'un intégrale multiple, prise par rapport aux variables différentes. Certaines questions, relatives à ce cas, semblent exiger plus de généralité que n'en comporte la méthode des variations, telle que Lagrange l'a exposée. Ce qui pourrait faire croire, que les principes de ce grand géomètre n'ont pas été convenablement appliqués, ou bien que les principes mêmes ne sont pas toujours suffisants.

C'est pour cela, sans doute, que M. Poisson, dans un mémoire qu'il a lu le 10 novembre 1831 à l'académie des sciences de Paris, a cru devoir ajouter aux principes du calcul des variations, posés par Lagrange, une espèce de nouveau principe qui consiste à considérer les variables indépendantes de la question, comme fonctions d'autres variables accessoires. Ces dernières disparaissent d'elles-même dans le cours du calcul; mais par leur considération, dans le cas de deux variables indépendantes x et y, M. Poisson a évité de supposer les variations δx et δy, la pre-

*

mière indépendante de la quantité y, et la seconde indépendante de la quantité x, hypothèse que tous les géomètres, qui ont cherché la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, ont été, en quelque sorte, forcé de faire par la nature même de leurs calculs.

Cependant la supposition δx indépendante de y, et δy indépendante de x, semble résulter des principes du calcul différentiel les plus simples et les plus élémentaires; et tant qu'on n'a pas prouvé, que ces principes sont insuffisants, ou que l'application qu'on en avait faite est inexacte, il restera à décider, si l'on doit préférer les formules de M. Poisson pour la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, à celles d'Euler et d'autres géomètres relativement au même objet. A la vérité, les dernières sont un cas particulier des premières; mais ce cas particulier est, peut-être, celui qui doit toujours avoir lieu.

Cette question, nous la décidons pour les formules de M. Poisson. Nous démontrons, que les géomètres qui ont traité le calcul des variations des intégrales doubles, y compris Euler lui-même, n'ont pas convenablement différentié avec la caractéristique δ les différences partielles de la variable principale. Mais on verra aussi, que l'introduction des variables accessoires dans cette sorte de questions n'est point nécessaire. Le mémoire de M. Poisson sur le calcul des variations sera toujours cité dans l'histoire de l'analyse différentielle. C'est dans ce mémoire que l'on trouve, pour la première fois, la variation complète d'une intégrale double. Elle y est déduite de la considération des variables accessoires. Mais on peut s'en tenir aux principes de l'immortel auteur de la Mécanique analytique, principes qui réunissent toute la généralité désirable et la plus grande simplicité.

Nous montrerons d'abord, dans ce qui va suivre, en quoi consiste l'inexactitude échappée aux géomètres qui ont cherché la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, et nous indiquerons ensuite un moyen pour trouver la variation d'une intégrale multiple quelconque.

I. Désignons par z une fonction de deux variables indépendantes x et y, et faisons $\frac{dz}{dx} = z'$, $\frac{dz}{dy} = z_{,}$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = z''$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = z'_{,}$, $\frac{d^2 z}{dy^2} = z_{,,}$, et ainsi de suite;

puis donnons aux quantités x, y, z, respectivement, les accroissements simultanés δx, δy, δz, que nous regarderons comme fonctions infiniment petites et arbitraires de x et de y; par l'effet de ces accroissements, les quantités z', $z_{,}$, z''..... deviendront, respectivement, $z'+\delta z'$, $z_{,}+\delta z_{,}$, $z''+\delta z''$.....; proposons nous de trouver les variations z, $\delta z_{,}$, $\delta z''$.....

Considérons d'abord $\delta z'$. Comme $z' = \frac{dz}{dx}$, on avait cru que pour avoir $\delta z'$ il fallait différentier à l'ordinaire, selon δ, la quantité $\frac{dz}{dx}$, ce qui avait fourni un résultat inexact $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx}$. Pour découvrir la source de l'erreur il n'y a qu'à remonter à l'origine de la quantité $\delta z'$; si l'on désigne, pour un instant, $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, respectivement, par X, Y, Z, on aura évidemment

$$z' + \delta z' = \frac{dZ}{dX}$$

et

$$\delta z' = \frac{dZ}{dX} - z';$$

les différences partielles z' et $\frac{dZ}{dX}$ sont prises, la première, en regardant comme constante y, et la seconde, en considérant Y, c'est-à-dire $y+\delta y$, comme invariable; or, on avait cru, que les deux différences $\frac{dZ}{dX}$ et z' devaient être rapportées à la même hypothèse $dy = o$, c'est en cela que l'on n'était pas exact.

Remettons pour X, Y, Z leurs valeurs $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$. Nous aurons

$$\delta z' = \frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)} - z' = \frac{d(z+\delta z) - z' d(x+\delta x)}{d(x+\delta x)},$$

les différentielles $d(z+\delta z)$ et $d(x+\delta x)$ sont prises en faisant $d(y+\delta y) = o$

Or

$$d(z+\delta z) = \left(z' + \frac{d\delta z}{dx}\right) dx + \left(z_{,} + \frac{d\delta z}{dy}\right) dy$$

$$d(x+\delta x) = \left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$$

$$d(y+\delta y) = \frac{d\delta y}{dx} dx + \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) dy;$$

en substituant les valeurs précédentes de $d(z+\delta z)$ et de $d(x+\delta x)$ dans la dernière expression de $\delta z'$, nous aurons

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx}\right)dx + \left(z_{,} + \frac{d\delta z}{dy} - z'\frac{d\delta x}{dy}\right)dy}{\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)dx + \frac{d\delta x}{dy}dy}$$

et en même temps

$$o = \frac{d\delta y}{dx}dx + \left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)dy;$$

en éliminant dx et dy, on trouve

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx} - z_{,}\frac{d\delta y}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right) - \left(\frac{d\delta z}{dy} - z'\frac{d\delta x}{dy} - z_{,}\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{d\delta y}{dx}}{\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right) - \frac{d\delta x}{dy}\frac{d\delta y}{dx}},$$

ou bien, en ne tenant compte que des infiniment petites du premier ordre

$$\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx} - z_{,}\frac{d\delta y}{dx}.$$

Si l'on compare cette valeur de $\delta z'$ à celle de $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx}$, on remarquera, qu'en rapportant la différence $\frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)}$ à l'hypothèse $dy = o$, au lieu de $d(y+\delta y) = o$, on supprime dans $\delta z'$ le terme $z_{,}\frac{d\delta y}{dy}$ qui est du même ordre de grandeur que $\delta z'$, et qui, par les principes du calcul différentiel, devait y être conservé.

Supposons que la quantité δy soit indépendante de x; nous aurons $\frac{d\delta y}{dx} = o$ et $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx}$, comme on le trouve par la différentiation ordinaire, selon δ, de la quantité $\frac{dz}{dx}$; or, il est facile de voir, que dans l'hypothèse $\frac{d\delta y}{dx} = o$, la différentiation ordinaire est permise; car, comme alors $d(y+\delta y) = \left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)dy$, en faisant $d(y+\delta y) = o$, on aura évidemment $dy = o$; donc dans l'expression $\delta z' = \frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)} - z'$ les deux différences partielles z' et $\frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)}$ sont toutes deux relatives à une même hypothèse $dy = o$.

Il est évident que

$$\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx} - z_{,} \frac{d\delta y}{dx} = z''\delta x + z'_{,}\delta y + \frac{d(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dx}.$$

On trouvera de la même manière

$$\delta z_{,} = z'_{,}\delta x + z_{,,}\delta y + \frac{d(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dy}.$$

Pour passer aux différences secondes, on remarquera que

$$\delta z'' = \frac{d(z' + \delta z')}{d(x + \delta x)} - z''$$

$$\delta z'_{,} = \frac{d(z' + \delta z')}{d(y + \delta y)} - z'_{,} = \frac{d(z_{,} + \delta z_{,})}{d(x + \delta x)} - z'_{,}$$

$$\delta z_{,,} = \frac{d(z_{,} + \delta z_{,})}{d(y + \delta y)} - z_{,,}.$$

Donc on trouvera les variations $\delta z''$, $\delta z'_{,}$, $\delta z_{,,}$ en changeant convenablement, dans les valeurs de $\delta z'$ et $\delta z_{,}$, z en z' ou en $z_{,}$. On aura d'abord

$$\delta z'' = z'''\delta x + z''_{,}\delta y + \frac{d(\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y)}{dx}$$

$$\delta z'_{,} = z''_{,}\delta x + z'_{,,}\delta y + \frac{d(\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y)}{dy}$$

$$\delta z'_{,} = z''_{,}\delta x + z'_{,,}\delta y + \frac{d(\delta z_{,} - z'_{,}\delta x - z_{,,}\delta y)}{dx}$$

$$\delta z'_{,} = z'_{,,}\delta x + z_{,,,}\delta y + \frac{d(\delta z_{,} - z'_{,}\delta x - z_{,,}\delta y)}{dy}$$

ensuite

$$\delta z'' = z'''\delta x + z''_{,}\delta y + \frac{d^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dx^2}$$

$$\delta z'_{,} = z'_{,,}\delta x + z'_{,,}\delta y + \frac{d^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dx\,dy}$$

$$\delta z_{,,} = z'_{,,}\delta x + z_{,,,}\delta y + \frac{d^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dy^2}.$$

On trouvera avec la même facilité les variations des différences supérieures.

II. Ce qui précéde montre suffisamment, comment par l'application immédiate de la caractéristique δ aux différences partielles z', $z_{,}$, $z''\cdots$ on trouve les variations de ces différences. Mais il est préférable de chercher les variations $\delta z'$, $\delta z_{,}$, $\delta z''\cdots$ par l'emploi des différences totales.

En effet, pour considérer la chose d'une manière générale, désignons par u une fonction d'autant de quantités $x, y, z \cdots\cdots$ que l'on veut, et supposons que la variable u ainsi que les quantités indépendantes $x, y, z \cdots\cdots$ reçoivent simultanément les accroissements $\delta u, \delta x, \delta y, \delta z \cdots\cdots$, que nous regarderons comme fonctions entièrement arbitraires de toutes les variables indépendantes.

Pour trouver les variations $\delta \cdot \frac{du}{dx}$, $\delta \cdot \frac{du}{dy}$, $\delta \cdot \frac{du}{dz} \cdots\cdots$ dues aux accroissemens $\delta u, \delta x, \delta y, \delta z \cdots\cdots$ prenons l'équation fondamentale,

$$\delta du = d\delta u,$$

mettons y pour $d\delta u$ sa valeur

$$\frac{d\delta u}{dx} dx + \frac{d\delta u}{dy} dy + \frac{d\delta u}{dz} dz + \cdots\cdots,$$

pour du sa valeur

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \cdots\cdots$$

puis développons $\delta du = \delta\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \cdots\cdots\right)$ comme il suit

$$\begin{aligned} \delta du = & \left(\delta \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dx} + \cdots\cdots\right) dx \\ & + \left(\delta \frac{du}{dy} + \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dy} + \cdots\cdots\right) dy \\ & + \left(\delta \frac{du}{dz} + \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dz} + \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dz} + \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dz} + \cdots\cdots\right) dz \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et comparons les coëfficients des quantités arbitraires $dx, dy, dz \cdots\cdots$ Nous aurons sur le champ :

$$\begin{aligned} \delta \frac{du}{dx} &= \frac{d\delta u}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dx} - \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dx} - \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dx} - \cdots\cdots \\ \delta \frac{du}{dy} &= \frac{d\delta u}{dy} - \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dy} - \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dy} - \cdots\cdots \\ \delta \frac{du}{dz} &= \frac{d\delta u}{dz} - \frac{du}{dx}\frac{d\delta x}{dz} - \frac{du}{dy}\frac{d\delta y}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{d\delta z}{dz} - \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Il est facile de donner à ces expressions la forme suivante:

$$\delta\frac{du}{dx}=\frac{d^2u}{dx^2}\delta x+\frac{d^2u}{dxdy}\delta y+\frac{d^2u}{dxdz}\delta z+\cdots+\frac{d\left(\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dy}\delta y-\frac{du}{dz}\delta z-\cdots\right)}{dx}$$

$$\delta\frac{du}{dy}=\frac{d^2u}{dxdy}\delta x+\frac{d^2u}{dy^2}\delta y+\frac{d^2u}{dydz}\delta z+\cdots+\frac{d\left(\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dy}\delta y-\frac{du}{dz}\delta z-\cdots\right)}{dy}$$

$$\delta\frac{du}{dz}=\frac{d^2u}{dxdz}\delta x+\frac{d^2u}{dydz}\delta y+\frac{d^2u}{dz^2}\delta z+\cdots+\frac{d\left(\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dy}\delta y-\frac{du}{dz}\delta z-\cdots\right)}{dz}.$$

. . . .

Donc, en faisant pour abréger

$$\delta u=\frac{du}{dx}\delta x+\frac{du}{dy}\delta y+\frac{du}{dz}\delta z+\cdots+Du,$$

on trouve

$$\delta\frac{du}{dx}=\frac{d^2u}{dx^2}\delta x+\frac{d^2u}{dxdy}\delta y+\frac{d^2u}{dxdz}\delta z+\cdots+\frac{dDu}{dx}$$

$$\delta\frac{du}{dy}=\frac{d^2u}{dxdy}\delta x+\frac{d^2u}{dy^2}\delta y+\frac{d^2u}{dydz}\delta z+\cdots+\frac{dDu}{dy}$$

$$\delta\frac{du}{dz}=\frac{d^2u}{dxdz}\delta x+\frac{d^2u}{dydz}\delta y+\frac{d^2u}{dz^2}\delta z+\cdots+\frac{dDu}{dz}$$

. . . .

Observons que les termes indépendants de Du, dans les formules précédentes, reviennent aux différentielles ordinaires des quantités u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}\cdots\cdots$ considérées comme fonctions de $x, y, z, \cdots$ et en supposant que les différences des $x, y, z\cdots$ soient $\delta x, \delta y, \delta z\cdots\cdot$ Si donc nous désignons par la caractéristique $\varDelta$ la différentielle d'une fonction de $x, y, z\cdots$, différentielle due aux accroissements $\delta x, \delta y, \delta z\cdots$, nous pourrons écrire

$$\delta u=\varDelta u+Du$$

$$\delta\frac{du}{dx}=\varDelta\frac{du}{dx}+\frac{dDu}{dx}$$

$$\delta\frac{du}{dy}=\varDelta\frac{du}{dy}+\frac{dDu}{dy}$$

$$\delta\frac{du}{dz}=\varDelta\frac{du}{dz}+\frac{dDu}{dz}$$

. . . .

Il n'est pas difficile de trouver la variation des différences supérieures $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdz}$, ...; on verra avec facilité que l'on a en général

$$\delta \frac{d^i u}{dx^l dy^m dz^n \dots} = \varDelta \frac{d^i u}{dx^l dy^m dz^n \dots} + \frac{d^i Du}{dx^l dy^m dz^n \dots}$$

III. Ce qui précède suffit pour trouver la variation d'une fonction U de $u, x, y, z \cdots$ et des différences partielles de la variable principale u par rapport aux quantités $x, y, z \cdots$ Il n'y a qu'à différentier U en y faisant croître toutes les quantités $x, y, z \cdots$ et toutes les fonctions u, $\frac{du}{dx} \cdots$ de leurs variations δ. Or, les variations δu, $\delta \frac{du}{dx} \cdots$ étant composées chacune de deux parties infinement petites, on peut, par les principes du calcul différentiel, en augmentant $x, y, z \cdots$ respectivement de $\delta x, \delta y, \delta z \cdots$, ne faire croître d'abord les fonctions u, $\frac{du}{dx} \cdots$ que des premières parties $\varDelta u$, $\varDelta \frac{du}{dx} \cdots$ de leurs variations. Il en résultera dans U un accroissement qui formera la première partie de la variation δU; puis, sans varier $x, y, z \cdots$, on augmentera la fonction u et ses différences des secondes parties Du, $\frac{dDu}{dx} \cdots$ de leurs variations; l'augmentation qu'en recevra la fonction U, formera la seconde partie de sa variation.

La première partie de la variation δU sera évidemment

$$\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \dots$$

en faisant varier dans les différences $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz} \cdots$ dans la première, tout ce qui varie avec x, dans la seconde, tout ce qui varie avec y, dans la troisième, tout ce qui varie avec z, ainsi de suite. Désignons par DU la seconde partie de la variation δU; cette partie est due à l'accroissement Du de la quantité u, accroissement qu'on doit appliquer à u partout où cette fonction se trouve dans U; nous aurons

$$\delta U = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \dots + DU.$$

Nous nous dispensons d'écrire le développement de la différentielle DU.

IV. Proposons nous de trouver la variation de l'intégrale définie

$$V = \int U dx\, dy\, dz \cdots$$

prise pour toutes les valeurs de $x, y, z \cdots$ qui satisfassent à l'inégalité

$$L < o$$

L étant une fonction de $x, y, z \cdots\cdots$

La variation de l'intégrale $\int U dx\, dy\, dz \cdots\cdots$ est, bien évidemment, égale à la somme des variations de tous ses élémens différentiels; ainsi, pour avoir δV, il n'y a qu'à prendre l'intégrale de la variation $\delta(U dx\, dy\, dz \cdots)$, ce qui donnera

$$\delta V = S\delta(U dx\, dy\, dz \cdots).$$

Or, on a, par le principe du calcul différentiel

$$\delta(U dx\, dy\, dz \cdots) = \delta U dx\, dy\, dz \cdots + U\delta(dx\, dy\, dz \cdots),$$

c'est-à-dire, en vertu du § précédent,

$$\delta(U dx\, dy\, dz \cdots) = \left(\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \cdots\right) dx\, dy\, dz \cdots$$
$$+ U\delta(dx\, dy\, dz \cdots) + DU dx\, dy\, dz \cdots;$$

donc

$$\delta V = S\left[\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \cdots + U\frac{\delta(dx\, dy\, dz \cdots)}{dx\, dy\, dz}\right] dx\, dy\, dz \cdots\cdot$$
$$+ SDU\, dx\, dy\, dz \cdots\cdots$$

Nous démontrerons tout-à-l'heure que

$$\delta(dx\, dy\, dz \cdots) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \cdots\right) dx\, dy\, dz \cdots$$

il en résultera

$$\delta V = S\left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \cdots\cdot\right] dx\, dy\, dz \cdots\cdots$$
$$+ SDU\, dx\, dy\, dz \cdots\cdot$$

Dans les différentielles $\frac{d(U\delta x)}{dx}$, $\frac{d(U\delta y)}{dy}$, $\frac{d(U\delta z)}{dz} \cdots\cdot$ on doit faire varier, dans la première, tout ce qui varie avec x, dans la seconde, tout ce qui varie avec y, dans la troisième, tout ce qui varie avec z, ainsi de suite

IV. Nous allons nous occuper maintenant de la variation $\delta(dx\,dy\,dz\cdots)$

Supposons $x + \delta x = X$, $y + \delta y = Y$, $z + \delta z = Z\cdots\cdots$; nous aurons

$$\delta(dx\,dy\,dz\cdots\cdot) = dX\cdot dY\cdot dZ\cdots\cdot - dx\,dy\,dz\cdots\cdot$$

Les quantités $X, Y, Z\cdots$ étant fonctions de $x, y, z\cdots$, pour avoir une des différentielles dX, dY, $dZ\cdots\cdot$, par exemple dX, il n'y a qu'à différentier à l'ordinaire la quantité X, en regardant $Y, Z\cdots\cdot$ comme constantes, ce qui donnera

$$dX = \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy + \frac{dX}{dz}dz + \cdots\cdots$$

$$o = \frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy + \frac{dY}{dz}dz + \cdots\cdots$$

$$o = \frac{dZ}{dx}dx + \frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dz}dz + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on tirera

$$dX = \frac{S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\cdots\cdot\right)}{S\left(\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\cdots\cdots\cdots\right)}dx.$$

On a désigné, d'après M. Cauchy, par la notation

$$S(a, b, c\cdots\cdot)$$

le résultat de l'élimination des quantités $p, q, r\cdots$ satisfaisant aux équations

$$o = ap + a_1 q + a_2 r + \cdots\cdots$$

$$o = bp + b_1 q + b_2 r + \cdots\cdots$$

$$o = cp + c_1 q + c_2 r + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On suppose que le terme $a\,b_1\,c_2\cdots$ de ce résultat soit pris avec le signe $+$.

Pour trouver dY, il faut différentier Y en faisant $dX = o$, $dZ = o\cdots\cdot$ c'est-à-dire, en faisant $dx = o$, $dZ = o\cdots\cdot$ ce qui donne

$$dY = \frac{dY}{dy}dy + \frac{dY}{dz}dz + \cdots\cdots$$

$$o = \frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dz}dz + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où

$$dY = \frac{S\left(\frac{dY}{dy} \cdot \frac{dZ}{dz} \cdots\right)}{S\left(\frac{dZ}{dz} \cdots\right)}\, dy;$$

on trouvera de la même manière

$$dZ = \frac{S\left(\frac{dZ}{dz} \cdots\right)}{S\,(\cdots)}\, dz,$$

ainsi de suite. Le dénominateur de la dernière différentielle sera l'unité; car, si par exemple, Z était la dernière variable, on aurait eu

$$dZ = \frac{dZ}{dz}\, dz.$$

En faisant le produit $dX \cdot dY \cdot dZ \cdots$ on trouve

$$dX\, dY\, dZ \cdots = S\left(\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots\right) dx\, dy\, dz \cdots$$

donc

$$\delta\,(dx\, dy\, dz \cdots) = \left[S\left(\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots\right) - 1\right] dx\, dy\, dz \cdots.$$

Les principes de l'analyse différentielle exigent que dans le calcul du coëfficient

$$S\left(\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots\right) - 1$$

on ne tienne compte que des infiniment petits du premier ordre, car $\frac{\delta\,(dx\, dy\, dz \cdots)}{dx\, dy\, dz \cdots}$ est une quantité infiniment petite de cet ordre. Or, si l'on excepte $\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots$, tous les autres termes de la somme $S\left(\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots\right)$ sont infiniment petits au moins du second ordre; donc, aux quantités de cet ordre près, on aura

$$S\left(\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots\right) = \frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots$$

et par suite

$$\delta\,(dx\, dy\, dz \cdots) = \left(\frac{dX}{dx}\, \frac{dY}{dy}\, \frac{dZ}{dz} \cdots - 1\right) dx\, dy\, dz \cdots.$$

Remettons pour $X, Y, Z \cdots$ leurs valeurs $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z \cdots\cdots$; nous aurons

$$\delta\,(dx\, dy\, dz \cdots) = \left[\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right)\left(1 + \frac{d\delta z}{dz}\right) \cdots - 1\right] dx\, dy\, dz \cdots$$

ou bien, en ne tenant compte que des infiniment petits du premier ordre,

$$\delta(dx\,dy\,dz\cdots) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \cdots\right) dx\,dy\,dz\ldots.$$

VI. Déterminons, avant d'aller plus loin, quelles doivent être les limites des variables $x, y, z\cdots$ dans l'intégrale

$$\int U\,dx\,dy\,dz\cdots\cdot$$

étendue à toutes les valeurs de $x, y, z\cdots\cdot$ qui satisfassent à l'inégalité $L > o$, ensorte qu'aux limites de cette intégrale on aura $L = o$. On se propose d'intégrer d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à y, après par rapport à z, ainsi de suite.

Admettons que l'équation $L = o$, résolue par rapport à x, ne fournisse pour cette variable que deux valeurs X_0 et X. Ces valeurs sont les limites de la variable X et, en supposant que la fonction L reste négative pour les quantités x comprises entre X_0 et X, on intégrera l'expression

$$\int U\,dx\,dy\,dz\cdots$$

depuis $x =$ à la plus petite des deux racines X_0 et X, jusqu'à $x =$ à la plus grande de ces racines. Quant aux quantités $y, z\cdots$, on doit leur donner toutes les valeurs qui fournissent pour X_0 et X des quantités réelles, et, au contraire, on doit exclure les valeurs de $y, z\cdots$, qui rendent imaginaires X_0 et X; or, dans le passage du réel à l'imaginaire, les racines X_0 et X deviennent, comme on le sait par la théorie des équations, égales entr'elles; donc aux limites de $y, z\cdots$ on aura à la fois

$$L = o,\quad \frac{dL}{dx} = o,$$

En éliminant x de ces deux équations, on en obtiendra une en $y, z\cdots$ qui appartiendra aux limites de ces variables, et qui fournira, supposons le, pour y deux valeurs Y_0 et Y, valeurs qui seront les limites entre lesquelles il faudra intégrer $\int U\,dx\,dy\,dz\cdots$ par rapport à y; on prendra l'intégrale depuis la plus petite des deux quantités Y_0 et Y jusqu'à la plus grande.

On parviendra à la même conclusion de la manière suivante: après avoir intégré par rapport à x, ou doit intégrer par rapport à y, évidemment depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de cette variable, en supposant x et y liées par l'équation $L = o$, et en considérant $z \cdots$ comme constantes; en différentiant dans cette hypothèse, on trouve

$$o = \frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dx};$$

or, pour que y soit maximum ou minimum, il faut qu'on ait $\frac{dy}{dx} = o$, ce qui donne pour la limite de y la même équation $\frac{dL}{dx} = o$, que nous avons déjà trouvée.

Pour avoir les limites relatives à la variable z, on traitera l'équation qui résulte de l'élimination de x entre $L = o$ et $\frac{dL}{dx} = o$, comme on a traité l'équation $L = o$; or, on peut supposer que le résultat de l'élimination de la variable x entre $L = o$ et $\frac{dL}{dx} = o$ est l'équation même $L = o$, dans laquelle on a mis pour x sa valeur tirée de $\frac{dL}{dx} = o$; donc, pour trouver les limites de z, on différentiera $L = o$ par rapport à y, en considérant x comme fonction de y; ce qui donnera

$$\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dy} = o,$$

ou bien $\frac{dL}{dy} = o$, à cause de $\frac{dL}{dx} = o$. En éliminant y entre $L = o$ et $\frac{dL}{dy} = o$, on trouvera une équation qui fournira les limites pour z. En continuant de la même manière, on trouvera les limites pour toutes les variables qui entrent dans l'intégrale

$$\int U\, dx\, dy\, dz \cdots\cdots$$

Ainsi, en résumant, les limites de x sont immédiatement données par la résolution, par rapport à cette variable, de l'équation $L = o$; on trouve les limites de y en resolvant, par rapport à cette variable, l'équation résultante de l'élimination de x entre $L = o$, $\frac{dL}{dx} = o$; on trouve les limites de z en résolvant, par rapport à cette variable, l'équation résultante de l'élimination de x et y entre $L = o$, $\frac{dL}{dx} = o$, $\frac{dL}{dy} = o$, ainsi de suite.

Nous avons supposé que les équations relatives aux limites de l'intégrale

$$\int U dx\, dy\, dz \cdots$$

ne fournissaient pour chaque quantité $x, y, z \cdots$ que deux valeurs; mais il serait facile, d'après ce qui précède, de traiter le cas où les équations dont il s'agit, fourniraient plus de deux racines. Le nombre de valeurs limites pour chaque variable $x, y, z \cdots$, en y comprenant, s'il est nécessaire, les quantités infinies, doit être pair.

VII. Reprenons la variation

$$\delta V = \int \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \cdots\right] dx\, dy\, dz \cdots + \int DU dx\, dy\, dz \cdots;$$

faisons y pour abréger $U\delta x = P$, $U\delta y = Q$, $U\delta z = R$, nous aurons

$$\delta V = \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \cdots\right) dx\, dy\, dz \cdots + \int DU dx\, dy\, dz \cdots$$

Considérons d'abord la partie

$$\int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \cdots\right) dx\, dy\, dz \cdots$$

de la variation précédente; supposons que de deux valeurs X_0 et X, que fournit pour x l'équation $L = o$, X soit la plus grande; nous aurons

$$\int \frac{dP}{dx} dx\, dy\, dz \cdots = \int (P_X - P_{X_0})\, dy\, dz \cdots.$$

On désigne par P_X ce que devient P quand on y met X pour x, et par P_{X_0} ce que devient P pour $x = X_0$.

Comme la fonction L a une valeur positive avant de s'évanouir pour $x = X_0$, et une valeur négative avant de s'évanouir pour $x = X$, il s'ensuit que la dérivée $\frac{dL}{dx}$ est négative pour $x = X_0$ et qu'elle est positive pour $x = X$: donc, en prenant le radical $\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}$ positivement, on aura

$$-P_{X_0} = \frac{P \frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} \text{ pour } x = X_0$$

$$P_X = \frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} \text{ pour } x = X.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $\int \frac{dP}{dx} dx dy dz \cdots = \int (P_X - P_{X_0}) dy dz \cdots$ nous aurons

$$\int \frac{dP}{dx} dx\, dy\, dz \cdots\cdots = \int \frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy\, dz \cdots\cdots$$

L'intégrale du second membre ne comprend que les valeurs de $x, y, z \cdots$ qui satisfont à l'équation $L = o$.

On trouvera de la même manière

$$\int \frac{dQ}{dy} dx\, dy\, dz \cdots\cdots = \int \frac{Q\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} dx\, dz \cdots\cdots$$

$$\int \frac{dR}{dz} dx\, dy\, dz \cdots\cdots = \int \frac{R\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}} dx\, dy \cdots\cdots$$

et par suite

$$(A) \cdots \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \cdots\cdots\right) dx\, dy\, dz \cdots\cdots$$

$$= \int \frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy dz \cdots + \int \frac{Q\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} dx dz \cdots + \int \frac{R\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}} dx dy \cdots + \cdots\cdots$$

Les intégrales du second membre de cette équation doivent être étendues à toutes les valeurs de $x, y, z \cdots$ qui satisfassent à l'équation $L = o$. Considérons deux de ces intégrales, par exemple

$$\int \frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy\, dz \cdots \text{ et } \int \frac{Q\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}} dx\, dz \cdots\cdots$$

D'après l'article précédent, on peut facilement s'assurer que leurs limites relatives aux variables $z,\cdots$ sont les mêmes. De plus l'on aura

$$\frac{dL}{dx}\,dx+\frac{dL}{dy}\,dy=o$$

pour tous les élémens de ces intégrales où les variables $z\cdots$ restent les mêmes; ensorte que les différentielles $\frac{dL}{dx}dx$ et $\frac{dL}{dy}dy$ sont égales, au signe près; donc, en prenant positivement les accroissements dx et dy, et les radicaux $\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}$, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}=\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}},$$

ou bien, en multipliant par $dz\cdots\cdot$,

$$\frac{dy\,dz\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}=\frac{dx\,dz\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}}.$$

Il est facile d'en conclure qu'on aura en général

$$\frac{dy\,dz\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}=\frac{dx\,dz\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}}=\frac{dx\,dy\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}}=\cdots\cdot\cdot,$$

d'où, en faisant pour abréger $ds=\sqrt{(dy^2dz^2\cdots+dx^2dz^2\cdots+dx^2dy^2\cdots+\cdots)}$,

$$\frac{dy\,dz\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}=\frac{dx\,dz\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dy^2}\right)}}=\frac{dx\,dy\cdots\cdot}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dz^2}\right)}}=\cdots=\frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\cdots\right)}}.$$

En vertu de ces égalités, l'équation (A) deviendra

$$(B)\cdots\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}+\cdots\right)dxdydz\cdots=\int\frac{\left(P\frac{dL}{dx}+Q\frac{dL}{dy}+R\frac{dL}{dz}+\cdots\right)ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\cdots\cdot\right)}}.$$

On peut, pour rendre plus facile l'intégration de la différentielle

$$\frac{\left(P\frac{dL}{dx}+Q\frac{dL}{dy}+R\frac{dL}{dz}+\cdots\cdot\right)ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\cdots\cdot\cdot\right)}}$$

à la place des variables $x, y, z\cdots$, liées par l'équation $L = o$, introduire d'autres variables $a, b\cdots$ indépendantes entr'elles.

On transformera, par la méthode connue, tous les élémens $dydz\cdots$, $dxdz\cdots$, $dxdy\cdots$, en élémens proportionnels au produit $dadb\cdots$; on trouvera $dydz\cdots = Adadb\cdots$, $dxdz\cdots = Bdadb\cdots$, $dxdy\cdots = Cdadb\cdots$, $\cdots$ $A, B, C\cdots$ étant fonctions finies de $a, b\cdots$; ce qui donnera

$$ds = dadb\cdots\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 + \cdots)}$$

Si l'on veut, par exemple, intégrer par rapport aux variables $y, z\cdots$ on fera attention à ce que dans les élémens $dxdz\cdots$, $dxdy\cdots$, $\cdots$ on doit prendre la différentielle de la variable x en considérant, dans la première, la quantité y comme seule variable, dans la seconde, la quantité z comme seule variable, ainsi de suite; il en résultera que $dxdz\cdots = \frac{dx}{dy}dydz\cdots$, $dxdy\cdots = \frac{dx}{dz}dydz\cdots$, $\cdots$; donc

$$ds = dydz\cdots\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dx^2}{dz^2} + \cdots\right)} = dydz\cdots\frac{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}$$

en sorte que

$$(C)\cdots\int\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \cdots\right)dxdydz\cdots = \int\frac{\left(P\frac{dL}{dx} + Q\frac{dL}{dy} + R\frac{dL}{dz} + \cdots\right)dydz\cdots}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}}.$$

Remettons dans la formule (B) pour $P, Q, R\cdots$ leurs valeurs $U\delta x$, $U\delta y$, $U\delta z\cdots$ nous aurons:

$$\int\left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \cdots\right]dxdydz\cdots = \int\frac{U\left(\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \cdots\right)ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}$$

ou bien

$$\int\left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \cdots\right]dxdydz\cdots = \int\frac{U\delta L\,ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}$$

et par suite

$$\delta V = \int\frac{U\delta L\,ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}} + \int DU\,dx\,dy\,dz\cdots\cdots$$

VIII. Nous allons maintenant indiquer les réductions à faire dans le terme $\int DU\,dx\,dy\,dz\cdots$ de la variation δV, réductions qui consistent à faire disparaître, autant que possible, les différences partielles de la quantité DU sous le signe $\int$.

Au moyen de la formule (B) de l'article précédent, il sera facile de remplacer l'intégrale $\int DU dx dy dz\cdots$ par la somme de deux autres intégrales $\int W Du\,dx dy dz\cdots$ et $\int \Theta ds$, dont la première est, comme $\int DU dx dy dz\cdots$ relative à toutes les valeurs de $x, y, z\cdots$ qui satisfassent à l'inégalité $L < o$, et dont la seconde ne comprend que les valeurs des mêmes variables, qui satisfont à l'équation $L = o$. La fonction W ne renferme point la variation Du; la fonction Θ au contraire la renferme, ainsi que ses différences partielles par rapport à $x, y, z\cdots$; quant à la différentielle ds, elle est la même que dans l'article précédent, c'est-à-dire

$$ds = \sqrt{(dy^2 dz^2\cdots + dx^2 dz^2\cdots + dx^2 dy^2\cdots + \cdots}.$$

Ainsi nous aurons

$$\int DU\,dx dy dz\cdots = \int W Du\,dx dy dz\cdots + \int \Theta ds,$$

et par suite

$$\delta V = \int W Du\,dx dy dz\cdots + \int \frac{U\delta L ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}} + \int \Theta ds$$

Les intégrales $\int W Du\,dx dy dz\cdots$ et $\int \frac{U\delta L ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}$ ne sont susceptibles d'aucune réduction, mais l'intégrale $\int \Theta ds$ peut encore être réduite.

Pour opérer la réduction de $\int \Theta ds$, il faut avant tout remplacer les variables $x, y, z\cdots$, liées entr'elles par l'équation $L = o$, par d'autres quantités $a, b\cdots$ indépendantes entr'elles. Le nombre des quantités $a, b\cdots$, doit être inférieure d'une unité à celui des variables primitives $x, y, z\cdots$.

En regardant $x, y, z\cdots$ comme fonctions de $a, b\cdots$, transformons l'élément ds en élément proportionnel au produit $da\,db\cdots$, on trouvera

$$ds = K\,da\,db\cdots$$

K étant une fonction finie de a, $b\cdots$; transformons aussi les différentielles $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots$ en $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{da^2}$, $\frac{d^2Du}{da\,db}$, $\cdots$; nous aurons pour cet objet

$$\frac{dDu}{da}=\frac{dx}{da}\frac{dDu}{dx}+\frac{dy}{da}\frac{dDu}{dy}+\frac{dz}{da}\frac{dDu}{dz}+\cdots\cdot\cdot$$

$$\frac{dDu}{db}=\frac{dx}{db}\frac{dDu}{dx}+\frac{dy}{db}\frac{dDu}{dy}+\frac{dz}{db}\frac{dDu}{dz}+\cdots\cdot\cdot$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2Du}{da^2}=\frac{dx^2}{da^2}\frac{d^2Du}{dx^2}+2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2Du}{dx\,dy}+\cdots\cdot\cdot$$

$$\frac{d^2Du}{da\,db}=\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\frac{d^2Du}{dx^2}+\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)\frac{d^2Du}{dxdy}+\cdots\cdot\cdot$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mais comme les équations précédentes ne sont pas en nombre suffisant pour en tirer la valeur de toutes les quantités $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots$, quelques unes de ces différentielles resteront indéterminées, les autres s'exprimeront au moyen de celles-ci et des quantités $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{da^2}$, $\frac{d^2Du}{dadb}$, $\cdots$. Au lieu de considérer comme indéterminées quelques unes des différentielles $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots$ il convient, pour plus de symétrie dans le calcul, d'introduire autant de fonctions linéaires $p, q, r\cdots$ de $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots$ qu'il en faudra pour exprimer toutes les quantités $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots$ en $p, q, r, \cdots$, $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{da^2}$, $\frac{d^2Du}{da\,db}$, $\cdots$, et ce sont les fonctions $p, q, r\cdots$ qu'on laissera arbitraires.

Or, introduire les quantités $p, q, r\cdots$ revient évidemment à feindre parmi les variables $a, b\cdots$ une variable ω de plus; alors, le nombre des quantités $\omega, a, b\cdots$

étant égal à celui des variables $x, y, z \cdots$, en considérant $x, y, z \cdots$ comme fonctions de $\omega, a, b \cdots$, on trouve autant d'équations

$$\frac{dDu}{d\omega} = \frac{dx}{d\omega}\frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{d\omega}\frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{d\omega}\frac{dDu}{dz} + \cdots\cdots$$

$$\frac{dDu}{da} = \frac{dx}{da}\frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{da}\frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{da}\frac{dDu}{dz} + \cdots\cdots$$

$$\frac{dDu}{db} = \frac{dx}{db}\frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{db}\frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{db}\frac{dDu}{dz} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2Du}{d\omega^2} = \frac{dx^2}{d\omega^2}\frac{d^2Du}{dx^2} + 2\frac{dx}{d\omega}\frac{dy}{d\omega}\frac{d^2Du}{dx\,dy} + \cdots\cdots$$

$$\frac{d^2Du}{d\omega\,da} = \frac{dx}{d\omega}\frac{dx}{da}\frac{d^2Du}{dx^2} + \left(\frac{dx}{d\omega}\frac{dy}{da} + \frac{dx}{da}\frac{dy}{d\omega}\right)\frac{d^2Du}{dx\,dy} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qu'il en faut pour exprimer toutes les différentielles $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots\cdots$ en $\frac{dDu}{d\omega}$, $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, $\cdots\cdots$ $\frac{d^2Du}{d\omega^2}$, $\frac{d^2Du}{d\omega\,da}$, $\cdots\cdots$ mais comme la variable ω réellement n'existe pas, on doit regarder les différentielles $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{dz}{d\omega}$, $\cdots\cdots$ comme quantités dont on pourra disposer pour simplifier l'expression de $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$ $\cdots$. Quant aux différentielles $\frac{dDu}{d\omega}$, $\frac{d^2Du}{d\omega^2}$, $\cdots$, elles doivent rester entièrement indéterminées.

Ayant exprimé les différentielles $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, $\cdots\cdots$ $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$, $\cdots\cdots$ en $\frac{dDu}{d\omega}$, $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, $\cdots\cdots$ $\frac{d^2Du}{d\omega^2}$, $\frac{d^2Du}{d\omega\,da}$, $\cdots\cdots$ il faut mettre leurs valeurs dans l'intégrale $\int \Theta ds = \int \Theta K da db \cdots$, après quoi on pourra, en faisant usage de la formule (B) et en supposant pour abréger $ds' = \sqrt{(db^2 \cdots + da^2 \cdots + \cdots)}$, remplacer l'intégrale $\int \Theta K da db \cdots$ par la somme

$$\int \left(PDu + Q\frac{dDu}{d\omega} + R\frac{d^2Du}{d\omega^2} + \cdots\right) da db \cdots + \int \Phi ds'$$

de deux intégrales $\int \left(PDu + Q\frac{dDu}{d\omega} + R\frac{d^2Du}{d\omega^2} + \cdots\cdots\right) da\, db \cdots\cdots$ et $\int \Phi ds'$,

dont la première n'est plus susceptible d'aucune réduction, et dont la seconde peut être réduite de la même manière que l'intégrale $\int \Theta ds$.

Nous aurons

$$\delta V = \int W Du\, dx dy dz \cdots + \int \frac{U \delta L\, ds}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}$$

$$+ \int \left(P Du + Q \frac{dDu}{d\omega} + R \frac{d^2 Du}{d\omega^2} + \cdots\right) da db \cdots + \int \Phi ds'.$$

L'on traitera l'intégrale $\int \Phi ds'$ comme on a traité $\int \Theta ds$; on la décomposera en deux autres dont l'une sera entièrement réduite, et l'autre encore susceptible de réductions; en continuant de la même manière on épuisera, en quelque sorte, toutes les réductions à faire dans les intégrales qui se présenteront les unes après les autres; alors la variation δV aura reçu la forme propre aux applications.

IX. Comme l'intégrale $\int \Theta ds$ de l'article précédent est relative aux valeurs de $x, y, z \cdots$ qui satisfont à l'équation $L = o$, on peut regarder une de ces quantités comme fonction de toutes les autres, et celles-ci comme indépendantes entr'elles. Considérons, par exemple, x comme fonction de $y, z \cdots$, nous aurons d'après l'article VII

$$ds = \frac{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} dy\, dz \cdots$$

et en faisant pour abréger

$$\frac{\Theta \sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \cdots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\right)}} = \Psi$$

nous trouverons

$$\int \Theta ds = \int \Psi dy\, dz \cdots$$

On obtiendra l'équation relative aux limites de $y, z \cdots$ en éliminant x entre $L = o$ et $\frac{dL}{dx} = o$.

La fonction Ψ renferme les différences partielles $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$.... $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dx\,dy}$,.... prises relativement à x, y, z..... dans l'hypothèse que ces variables sont indépendantes entr'elles; mais après la différentiation on doit y mettre pour x sa valeur, fournie par l'équation $L = o$. Il est bon d'éliminer autant que possible les différences dont nous parlons; pour cet objet, en considérant x comme fonction de $y, z\cdots$ nous aurons

$$\frac{dDu}{dy} = \left(\frac{dDu}{dy}\right) + \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$\frac{dDu}{dz} = \left(\frac{dDu}{dz}\right) + \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dz}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy} = \left(\frac{d^2Du}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz} = \left(\frac{d^2Du}{dx\,dz}\right) + \left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dz}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^2Du}{dy^2} = \left(\frac{d^2Du}{dy^2}\right) + 2\left(\frac{d^2Du}{dx\,dy}\right)\frac{dx}{dy} + \left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dy^2} + \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dy^2}$$
$$\frac{d^2Du}{dy\,dz} = \left(\frac{d^2Du}{dy\,dz}\right) + \left(\frac{d^2Du}{dx\,dy}\right)\frac{dx}{dz} + \left(\frac{d^2Du}{dx\,dz}\right)\frac{dx}{dy} + \left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy}\frac{dx}{dz} + \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dy\,dz}$$
$$\frac{d^2Du}{dz^2} = \left(\frac{d^2Du}{dz^2}\right) + 2\left(\frac{d^2Du}{dx\,dz}\right)\frac{dx}{dz} + \left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dz^2} + \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dz^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous avons entouré de parenthèses les différences partielles de la quantité Du, prises en considérant $x, y, z\cdots$ comme indépendantes entr'elles.

On tire des équations précédentes

$$\left(\frac{dDu}{dy}\right) = \frac{dDu}{dy} - \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$\left(\frac{dDu}{dz}\right) = \frac{dDu}{dz} - \left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dz}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dx\,dy}\right)=\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}-\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy}$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dx\,dz}\right)=\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}-\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dz}$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dy^2}\right)=\frac{d^2Du}{dy^2}-2\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dy^2}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dy^2}$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dydz}\right)=\frac{d^2Du}{dydz}-\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}\frac{dx}{dz}-\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy}\frac{dx}{dz}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dx\,dy}$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dz^2}\right)=\frac{d^2Du}{dz^2}-2\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}\frac{dx}{dz}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dz^2}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dz^2}$$

. . . .

ou bien, en mettant pour $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dz}$ .... $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^2x}{dy\,dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ .... leurs valeurs, tirées de l'équation $L=o$,

$$\left(\frac{dDu}{dy}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\frac{dDu}{dy}+\frac{dL}{dy}\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

$$\left(\frac{dDu}{dz}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\frac{dDu}{dz}+\frac{dL}{dz}\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dxdy}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}+\frac{dL}{dy}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dxdz}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\frac{d\left(\frac{dDu}{dz}\right)}{dz}+\frac{dL}{dz}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)}{\frac{dL}{dx}}$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dy^2}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\left[\frac{dL^2}{dx^2}\frac{d^2Du}{dy^2}+2\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dy}\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}+\frac{dL^2}{dy^2}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\right]+\left(\frac{dL^2}{dx^2}\frac{d^2L}{dy^2}-2\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dy}\frac{d^2L}{dxdy}+\frac{dL^2}{dy^2}\frac{d^2L}{dx^2}\right)\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}}$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dydz}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\left[\frac{dL^2}{dx^2}\frac{d^2Du}{dydz}+\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dz}\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}+\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dy}\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}+\frac{dL}{dy}\frac{dL}{dz}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\right]}{\frac{dL^3}{dx^3}}$$

$$+\frac{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\frac{d^2L}{dydz}-\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dz}\frac{d^2L}{dxdy}-\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dy}\frac{d^2L}{dxdz}+\frac{dL}{dy}\frac{dL}{dz}\frac{d^2L}{dx^2}\right)\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}}$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dz^2}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\left[\frac{dL^2}{dx^2}\frac{d^2Du}{dz^2}+2\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dz}\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}+\frac{dL^2}{dz^2}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\right]+\left(\frac{dL^2}{dx^2}\frac{d^2L}{dz^2}-2\frac{dL}{dx}\frac{dL}{dz}\frac{d^2L}{dxdz}+\frac{dL^2}{dz^2}\frac{d^2L}{dx^2}\right)\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}}$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans

$$\int \Theta ds = \int \Psi dydz\cdots$$

et en employant la formule (C) de l'article VII, on remplacera l'intégrale $\int \Psi dydz\cdots$ par la somme

$$\int\left[PDu+Q\left(\frac{dDu}{dx}\right)+R\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)+\cdots\right]dydz\cdots+\int\Phi dz\cdots$$

de deux intégrales $\int\left[PDu+Q\left(\frac{dDu}{dx}\right)+R\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)+\cdots\right]dydz\cdots$ et $\int\Phi dz\cdots$ dont la première est toute réduite, et dont la seconde peut être encore susceptible de réductions. Cette dernière est relative aux variables $z\cdots$ Ses limites dépendent de l'équation qu'on obtiendra en éliminant x et y entre $L=o$, $\frac{dL}{dx}=o$, $\frac{dL}{dy}=o$; enfin elle est toute semblable à l'intégrale $\int\Psi dydz\cdots$, et on la traitera de la même manière.

Nous n'avons fait qu'indiquer les transformations qu'on doit faire subir à la partie $\int DUdxdydz\cdots$ de la variation δV; parce que ces transformations, se réduisant à l'intégration par parties, appartiennent plutôt au calcul intégral, qu'à la méthode des variations. A la vérité, un des principes fondamentaux de cette dernière méthode consiste à faire dispaîratre, autant que possible, les différentielles des variations qui se trouvent sous un signe intégral; mais le calcul des variations ne fait qu'indiquer cette opération et en laisse l'exécution au calcul intégral.

GEOGRAPHISCHE, MAGNETISCHE UND HYPSOMETRISCHE BESTIMMUNGEN,

ABGELEITET

AUS BEOBACHTUNGEN AUF EINER REISE,

DIE IN DEN JAHREN 1830, 1831 UND 1832 NACH SIBIRIEN UND DEM CHINESISCHEN REICHE, AUF KOSTEN DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, UNTERNOMMEN WURDE;

VON

G. VON FUSS.

Die Reise, deren Ergebnisse ich hier dem wissenschaftlichen Publico vor Augen lege, unternahm ich im Jahre 1830 im Dienste der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Die Veranlassung dazu gab eine, zur Ablösung der letzten, nach Peking sich begebende neue Mission; ein Umstand, der seit dem Beginne dieser Missionen immer nach Verlauf von 10—11 Jahren statt findet.

Ein Besuch in diese Länder von beobachtenden Reisenden musste auffallend und ungewöhnlich, und daher mit Schwierigkeiten und Hindernissen verbunden, erscheinen; denn nur unter Kan-ssi's liberaler Regierung sah man die Jesuiten frei und von ihr beschützt, das grosse Chinesische Reich nach allen Richtungen, Orte astronomisch bestimmend und Höhen messend, durchziehen; die grausame Vertreibung dieser Männer auf Befehl des letztverstorbenen Kaisers Kia-King musste jede Erwartung eines günstigen Erfolges solcher Unternehmungen zweifelhaft machen. Daher erhielt ich, nebst den Instructionen die vorzunehmenden Operationen betreffend, eine, dieselben mit möglichster Geheimhaltung zu vollführen; das beträcht-

liche Personal der Mission so wie der formelle Gang der ganzen Reise begünstigte diese Haltung; es ward nicht schwer in den Verzeichnissen des Personals einen Posten zu fingiren.

Dieser Umstand war eine der Hauptursachen, warum das vom Herrn Akademiker Parrot in Vorschlag gebrachte doppelte Nivellement zur Vereinigung des Baikalsees mit dem Golfe von Petschely unterblieb, doch war auch das einfache so glücklich, den Gegenstand dunkler Voraussetzungen in diesen noch unerforschten Gegenden ins Licht zu stellen.

Von den Instrumenten, mit denen ich versorgt wurde, und aus welchen auch zugleich der Zweck der Reise zu ersehen ist, nenne ich alle der Reihe nach.

Zu geographischen Bestimmungen erhielt ich einen Sextanten von Troughton mit dem dazu gehörigen Quecksilberapparat, Stativ, etc. —; ein tragbares Passageninstrument von Ertel mit gebrochner Röhre, und einen Dollond von $2\frac{1}{2}$ Fuss Focallänge mir gehörig, endlich drei Chronometer von Magnin in Petersburg, Leack und Finer und Nowland in London, von denen ersterer, von Herrn Hauth zu Petersburg reparirt, durchgängig vor den beiden andern den Vorzug verdient. Die Instrumente zur Bestimmung der magnetischen Coordinaten bestanden in einem Inclinatorium mit zwei Nadeln und einem Declinatorium, beide von Gambey aus Paris; ausserdem wurde zur sonstigen Bestimmung der magnetischen Abweichung eine kleine Boussole, die sich nach Bessels Vorschlage an's Passageninstrument anbringen liess, beim hiesigen Mechaniker Rospini verfertigt, so wie ein Schwingungsapparat mit 6 magnetischen Cylindern (von denen übrigens nur 2 vorzugsweise gebraucht wurden), und magnetisirte Stangen zur Bestreichung der Inclinationsnadeln. Vier Reise-Barometer aus Dorpat und 7 Thermometer mit Centesimalskale aus Åbo beschliessen die Reihe; eine Anzahl, die ohne Zweifel für eine so ausgedehnte und schwierige Reise zu gross war. Zur festen und sichern Aufstellung der Instrumente war ein schwerer Dreifuss aus Eichenholz mit zweckmässiger Einrichtung zum Transportiren verfertigt.

Fast beängstigend war es, diese Masse von schweren doch zarten und zerbrechlichen Sachen einem monatelangem Rütteln und dem Einflusse aller Wetterverän-

derungen blosgestellt zu sehen, und es bedurfte einer ununterbrochenen Aufmerksamkeit, keine der Schrauben im losen Zustande verweilen zu lassen. Bis Irkutsk war der Transport sicher und bequem, die Instrumente waren in einer Ressortequipage zweckmässig aufgestellt und befestigt; doch schon jenseits des Baikals, wo eine zerstörende Ueberschwemmung des Selenga-Flusses das fernere Reisen zu Lande unmöglich machte, begannen die Schwierigkeiten, die ihren höchsten Gipfel in den Schluchten des Chinesischen Gebirges vor Peking erreichten, wo der Weg mit grossen Felstrümmern besäet war.

Nur an der Declinationsboussole von Rospini und am Inclinatorium traf es sich, dass ich mich genöthigt sah neue Stützpuncte anzubringen. Wie die Inclinatorien eingepackt werden, erhält der verticale Gradkreis eine zu schwebende Lage, er musste oben und unten leicht gestützt werden; doch hatte diese Vorsichtsmaasregel den Nachtheil, dass dort, wo die Stützpuncte (mit Leder beschlagene am Kastengebäude fest genagelte Stücke Holz) an den Limbus lehnten, der Firniss abgerieben wurde. Auf meiner zweiten Reise durch Ostsibirien, liess ich, da jene Stützen mir nicht mehr hinlänglich schienen, die Schrauben, durch die der Verticalkreis an den Stützsäulen haftet, anlöthen; die Folge davon war, dass eine von den starken Schrauben die die Säulen festhalten, wahrscheinlich schon beschädigt, brach, und das Instrument in kurzem Zeitraume gänzlich unbrauchbar wurde.

Die beste Maassregel solche Fälle zu verhüten wäre wohl die, den Kreis jedesmal nach einer Beobachtung vom Stative abzuschrauben und in einem separaten Behälter oder in einer am Kasten anzubringenden Schieblade sorgfältig zu bewahren.

Der nachfolgende Aufsatz enthält eine Uebersicht der aus den Beobachtungen gezogenen Resultate, rubricirt nach dem dreiartigen Zweck dieser Reise.

1) Geographische Beobachtungen *a)* am Passageninstrument *b)* am Sextanten.

2) Magnetische Beobachtungen *a)* Abweichung *b)* Neigung *c)* Intensität.

3) Orognostische, barometrische und thermometrische Beobachtungen.

Passageninstrument.

Das Passageninstrument, welches ich zum Behuf geographischer Ortsbestimmungen mit auf die Reise erhielt, gehörte dem Kaiserlichen Generalstaabe, und wurde gegen ein aus München neuverschriebenes des Drangs der Abreise wegen zu erwähntem Zwecke abgetreten. Es war ein Ertel'sches und von der an diesen Instrumenten üblichen Einrichtung und Dimension. Das Fernrohr war gebrochen, das Ocular an dem einen Ende der Axe des Instruments angebracht und der Collimationsfehler wurde vermittelst eines Spiegels berichtigt. Die Brennweite des Objectivs war 13 Zoll, seine Oeffnung = 13 Linien. Der Höhen - sowohl wie Horizontalkreis waren von 15 zu 15 Minuten getheilt und hatten keine Nonien, sondern einen blossen Strich zum Ablesen, am Horizontalkreise wurde grösserer Genauigkeit halber eine Loupe angebracht. Die Libelle war zum Aufstellen auf die Axe des Instruments eingerichtet.

Vor meiner Abreise bestimmte ich den Werth des Theilstrichs an der Libelle, indem ich sie auf der Axe des Instruments, der Verbindungslinie zweier Fussschrauben parallel stellte, und dann die eine dieser Schrauben zum Einstellen der Blase, die andere, deren ein Umgang dadurch in Theilstrichen ausgedrückt werden sollte, zum Ablesen ihrer Verrückung brauchte. So erhielt ich folgenden Werth willkührlicher Winkel eines Schraubenumganges von 0°—360° in Theilstrichen

Rechts	Links	Rechts	Links
Th.	Th.	Th.	Th.
11,500	10,833	13,000	13,050
11,000	11,000	14,250	14,542
13,625	13,500	16,125	16,250
11,948	11,833	14,500	14,583
12,600	12,667	13,875	14,000
12,750	12,875	15,750	15,750
14,458	14,467	13,750	13,950

Daraus folgt, dass ein Schraubenumgang 189, 215 Theilstriche giebt. Dieser Werth in Verbindung mit dem Werthe einer Schraubenhöhe = 0,2 Linien und den Entfernungen der drei Fussschrauben = 9^{z} 5′375, 4′958, 4′650, giebt den Werth des Theilstriches in Bogensecunden = 2″, 641.

Diesen Werth habe ich bei Berechnung der Beobachtungen, die in die Zeit meiner ersten Reise fallen, durchgängig gebraucht; bei der zweiten in Ostsibirien hatte die Flüssigkeit in der Libelle durch monatlanges Rütteln beim Transport der Instrumente besonders in der steinigen mongolischen Wüste, endlich eine geringe Abnahme erhalten, und konnte der Länge der Blase wegen nur mit geringer Genauigkeit gebraucht werden.

Derselbe Grund bietet sich dar zur Erklärung einer kleinen Wandelbarkeit der Collimationsschraube, die ich später am Instrumente wahrnahm, was übrigens bei seiner Anwendung von keinem bösen Einflusse seyn konnte.

Die Fadenintervalle fanden sich zu verschiedenen Perioden, wie folgt:

	In St. Petersburg	*In Peking*		*In Sibirien*	
	Polaris	*δ Urs. min.*	*Polaris*	*β Urs. min.*	*α. β. Cephei α. Urs. maj.*
I — III.	50″75	50″70	50″50	50″78	50″75
II — III.	24 09	24 20	24 20	23 85	24 15
III — IV.	25 00	25 33	25 20	25 40	25 32
III — V.	52 06	52 26	52 30	52 34	51 97

Es erhellt daraus eine Aenderung der Intervalle die bis auf 0″, 3 steigt, und wohl einer Krümmung der Spinnfäden zugeschrieben werden muss, eine Differenz, die indessen den Beobachtungsfehler eines einzelnen Durchgangs durch den Faden nicht übersteigt. Die anscheinend zu grosse Dicke der Fäden glaube ich für vortheilhaft bei Beobachtung von Polarsternen und Sternen bis zur 4ten Grösse inclusive halten zu können, denn es lässt sich besonders bei ruhiger Luft, der Durchgang eines Polarsterns, nach Gleichheit der Lichtstärke zu beiden Seiten des Fadens, mit Genauigkeit schätzen. Bei Beobachtung kleinerer Mondsterne ist dies freilich ein Nachtheil.

Zur genauen Bestimmung der Zeit, namentlich zur Bestimmung des Collimationsfehlers, sind in der Regel nebst andern Fundamentalsternen die beiden Polarsterne beobachtet worden, oder an ihrer Statt β Urs. min. und α Urs. maj. oder α und β Cephei in ihren unteren Culminationen. Nur an zwei Tagen bin ich rücksichtlich des Collimationsfehlers, also auch der Zeitbestimmung, in Zweifel geblieben, da an beiden nur Sterne von geringeren Declinationen zum Grunde liegen, es waren der $\frac{14}{26}$ May 1831 und der $\frac{27 \text{ Juni}}{9 \text{ Juli}}$ 1832; doch, da an beiden Tagen $\left(\frac{C}{\cos. \delta^*} - \frac{C}{\cos. \delta☾}\right)$ (wo cos. δ^* den zeitbestimmenden südlicheren Sternen gehört) eine sehr kleine Grösse war, so hat dieser Umstand nichts weiter auf sich. An drei andern Tagen, wo derselbe Umstand vorwaltete, nämlich den $\frac{22 \text{ Juni}}{4 \text{ Juli}}$, $\frac{14}{26}$ December und $\frac{15}{27}$ December 1830 glaube ich sicher diesen Fehler annullirt. Die Libelle wurde immer vor und nach einem, oder wenn sie bald nach einander folgten, mehreren Durchgängen abgelesen, und zeigte fast durchgängig eine wünschenswerthe Beständigkeit, was mitunter auch auf eine unverrückte Lage des Statives wies, zu deren Prüfung ich, während meiner regelmässigen Beobachtungen in Peking, ungünstiger Umtsände wegen, keine Meridianmarke errichten konnte, woher denn auch das Instrument stets von neuem in die Mittagslinie gestellt werden musste.

Um den jedesmaligen Stand des Chronometers gegen mittlere Zeit zu erhalten habe ich die Stundenwinkel der Fundamentalsterne, vermittelst des Azimuths des grössten Kreises des Fernrohrs gesucht, nach der bekannten Formel

$$\Theta = T + m \frac{\sin.(\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + n \frac{\cos. (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + \frac{C}{\cos. \delta}$$

wo Θ die Culminations-Zeit, T die beobachtete Durchgangszeitam Chronometer bedeutet.

Das erste Glied der Bedingungsgleichungen, durch Beobachtungen erhalten, von dem das Azimuth m, so wie der Fehler der Collimation C abhängen, war immer aus den Durchgängen zweier Sterne abgeleitet $= (\Delta\ AR) - (\Delta\ T) \pm \Delta n$ in mittlerer Zeit ausgedrückt, wo Δn der Unterschied des Einflusses der Niveaufehler auf die Stundenwinkel, und $(\Delta\ T)$ der, der Durchgangszeiten ist. Wo die Zahl der Bedingungsgleichungen zweie überstieg, verfuhr ich nach der Methode der kleinsten Quadrate. Daraus ergaben sich folgende Zeitbestimmungen:

Name des Orts.	Datum.	Stern.	Mittlere Zeit.	Uhrcorrection.	Gang in 1^h	Reduction.	Anmerkungen.
Omsk	22 Juni / 4 Juli	α Lyrae	Finer: $11^h,42',2$	$9^h, 5', 29'', 63$		29″, 90	*m* fand sich =
1830.		γ Aquilae	12, 49, 0	29, 93	+	29, 95	10″,13 } 10″335
		α Aquilae	12, 53, 3	29, 84	0″, 255	29, 84	10, 54 } östlich
			12, 50, 0			29, 90	*c* = 0
Peking	$\frac{14}{26}$ Dec.	α Ceti	Leack: 8, 35, 40	6, 5, 20,40 }			Da Leack in grösseren Zwischenzeiten keinen regelmässigen Gang hatte, und der ☾ bald nach α Persei durchging, so benutzte ich für den ☾ dessen Uhrcorrection mit α Tauri. *m* aus α Pers. und Ceti = 1″60; die drei letzten Sterne gaben 1″,725.
1830.		α Persei	8, 54, 23	20,54 }			
		α Tauri	10, 7, 95	19, 40			
		α Aurig.	10, 45, 85	18, 16			
		β Orionis	10, 48, 03	18, 41			
		β Tauri	10, 57, 20	18, 13			
Peking	$\frac{15}{27}$ Dec.	α Tauri	Leack: 10, 4, 02	6, 5, 18, 42			Es schien mir rathsamer bei dem unsichern Gange Leacks α Persei nicht zu benutzen und *m* aus α Aur. und β Or. Tauri abzuleiten, es ist = $\frac{7''34 + 6''84}{2} = 7''09$
1830.		α Aurigae	10, 41, 91	18, 51			☾ Durchgang fällt gleich nach α Tauri.
		β Orionis	10, 44, 10	18, 31			
		β Tauri	10, 53, 27	18, 50			
Peking	$\frac{11}{23}$ Jan.	β Urs. mir.	6, 43, 1	4, 16, 54, 80	+ 2″, 66 Magnin.	55″, 73	Es fand sich:
1831.		α Ceti	6, 45, 3	54, 92		55, 75	*m* = 0″, 91 westl.
		α Persei	7, 4.15	55, 75		55, 75	*c* = 0″,111 —
			7, 4, 15			55, 74	
Peking	$\frac{12}{24}$ Jan.	α Persei	7, 0, 2	4, 18, 6, 84	3″, 174 Magnin.	12, 87	*m* = 1″,00 östlich
1831.		α Tauri	8, 13, 9	10, 59		12, 71	*c* = 0″,173 westl.
		β Orionis	8, 54, 0	12, 78		12, 78	Der Uhrgang ab-
		α Orionis	9, 33, 5	14, 95		12, 89	geleitet aus 2^h,
		δ Urs. min.	10, 13, 88	15, 94		11, 72	555 : 8″,11.
			8, 54, 0			12, 81	

Name des Orts.	Datum.	Stern.	Mittlere Zeit.	Uhrcorrection.	Gang in 1^h	Reduction.	Anmerkungen.
Peking 1831.	$\frac{13}{25}$ Jan.	β Orionis	$8^h, 50', 10$	$4^h, 19', 23'', 18$	+ 3″, 40 Magnin.	25″, 42	$m = 1''21$ westl.
		β Tauri	8, 59, 25	23, 63		25, 35	$c = 0,138$ östl.
		α Orionis	9, 29, 60	25, 63		25, 63	Uhrg. abgeleitet
		δ Urs. min.	10, 9, 95	27, 73		25, 44	aus $1^h 517{:}5''12$.
		α Can. maj.	10, 21, 10	28, 30		25, 37	
			9, 29, 60			25, 44	
Peking 1831.	$\frac{14}{26}$ Jan.	δ Urs. min.	10, 6, 0	4, 20, 51, 10	3″, 081 Magnin.	51″, 67	$m = 2'', 39$ westl.
		α Can. maj.	10, 17, 2	51, 67		51, 67	$c = 0,628$ östl.
		α Geminor.	11, 3, 15	54, 10		51, 74	
		α Can. min.	11, 9, 8	54, 60		51, 90	
			10, 17, 2			51,745	
Peking 1831.	$\frac{8}{20}$ Feb.	α Orionis	7, 47, 3	4, 54, 23, 27	3″,348 Magnin.	26″, 15	$m = 1''473$ östl.
		δ Urs. min.	8, 27, 8	25, 48		26, 10	$c = 0,16$ westlich
		α Can. maj.	8, 38, 9	26, 40		26, 40	
			8, 38, 9			26, 22	
Peking 1831.	$\frac{9}{21}$ Feb.	α Orionis	7, 43, 4	4, 55, 51, 88	2″,963	51″, 88	$m = 6'', 90$ östlich
		δ Urs. min.	8, 23, 9	53, 47		51, 47	$c = 1, 38$ westl.
		α Can. maj.	8, 34, 95	55, 16		52, 62	
			7, 43, 4			51, 99	Da der Mond $1\frac{1}{2}'$ nach α Orion. durchging, so ist wahrscheinlich 51″,99 ein der Wahrheit sehr naher Werth.
Peking	$\frac{11}{23}$ Feb.	α Orionis	7, 35, 55	4, 59, 1, 10	3″,590	4″, 19	$m = 7'',70$ westl.
		δ Urs. min.	8, 16, 00	3, 68		4, 30	$c = 2, 60$ östlich
		α Can. maj.	8, 27, 10	4, 35		4, 35	
			8, 27, 10			4, 28	
Peking	$\frac{12}{24}$ März	α Cephei	9, 9, 45	5, 42, 59, 64			$m = 9'',00$ östlich
							$c = 0, 50$ westl.

Name des Orts.	Datum.	Stern.	Mittlere Zeit.	Uhrcorrection.	Gang in 1^h	Reduction.	Anmerkungen.
		α Hydrae	9^h, 14′, 21	5^h,42′,59″,64			Da der Mond gleich nach α Hydrae culminirt, so fällt ein Zweifel, hinsichtlich des ihm zukommenden Uhrstandes, weg.
		α Leonis	9, 54, 20	59, 63			
Peking	$\frac{12}{24}$Apr.	η Virginis	10, 3, 83	6, 2, 18, 90	+ 2″,78		m = 3″55 östlich;
		Polaris	10, 51, 80	20, 80			c = 0″13 westl.
		α Virginis	11, 8, 70	22, 84			Für den Mond ist die Uhrcorrection Spica gebraucht. In Ermangelung eines Fundamentalsterns ist η m benutzt worden.
Peking	$\frac{11}{23}$May	Polaris	8, 88, 0	0, 14, 42, 95	1″,915	45″,12	m = 4″50 westl.
		α Virginis	9, 14, 7	44, 02		45, 67	c = 1″53 —
		α Bootis	10, 6, 2	45, 35		45, 35	Die Uhrcorrection aus α Bootis und α Virginis abgeleitet.
			10, 6, 2			45, 51	
Peking	$\frac{14}{26}$May	α Coronae	11, 13, 8	0, 17, 9, 11	2″,733	9, 46	m = 9″25 östlich;
		α Serpent.	11, 22, 15	9, 40		9, 40	c unbekannt.
		α Herculis	12, 52, 90	13, 60		9, 48	
			11, 22, 15			9, 45	
Pogromnoi 1832.	$\frac{3}{15}$Apr.	Polaris	11, 24, 27	1, 54, 19, 3	1″,91		m = 12″30 westl.
		2α Librae	13, 6, 11	24, 96		24″,96	c = 2″62 —
		β Urs. min.	13, 15, 81	25, 50		25, 20	
			13, 6, 11			25, 08	
Argunskoi	$\frac{1}{13}$May	α Bootis	10, 42, 62	1, 56, 50, 20	3″, 333	52, 06	m = 1″828 westl.
		2α Librae	11, 16, 13	52, 03		52, 03	c = 1″003 östl.
		β Urs. min.	11, 25, 83	52, 60		52, 07	
		α Serpent.	12, 10, 38	55, 10		52, 09	
			11, 16, 13			52, 06	

Name des Orts.	Datum.	Stern.	Mittlere Zeit.	Uhrcorrection.	Gang in 1^h	Reduction.	Anmerkungen.
Gorbiza	30 Mai / 11 Juni	β Urs. min.	$9^h, 31', 80$	$2^h, 38', 1'', 08$	+ $2'', 327$	$2'', 81$	$m = 7''07$ westl.
		α Serpent.	10, 16, 35	2, 56		2, 56	$c = 0$
		α Hercul.	11, 47, 10	6, 34		2, 82	Uhrgang aus:
							$2^h, 15', 3 : 5'', 26$.
Kirkun	27 Juni / 9 Juli	α Hercul.	9, 56, 9	3, 50, 49, 2	$3'', 43$	$49'', 2$	$m = 5', 43'', 7$ westl.
		α Ophiuchi	10, 17, 0	50, 1		49, 0	Uhrgang abgeleitet aus: $1^h, 4' : 4'', 8$.
		α Lyrae	11, 20, 96	54, 0			
			9, 56, 9			49, 1	per Compas in den Mer. gestellt.
Twaragowa	28 Juli / 9 Aug.	δ Urs. min.	9, 14, 42	4, 48, 59, 97	$3'', 51$	$4'', 18$	$m = 10'', 40$ westl.
		α Lyrae	9, 19, 01	49, 0, 30			$c = 0'', 057$ östl.
		γ Aquilae	10, 25, 86	3, 63		3, 63	
		1 α Capricor.	10, 55, 83	5, 77		4, 20	Uhrg. abgel. aus:
		2 α Capricor.	10, 56, 23	6, 10			$1^h, 39', 33 : 5'', 81$.
			10, 25, 86			4, 00	
Tunká	27 Aug. / 8 Sept.	α Cygni	9, 25, 13	5, 15, 20, 70	$0'', 696$	$21'', 64$	$m = 6'', 73$ östlich
		α Cephei	10, 3, 90	21, 97		22, 45	$c = 2'', 154$ —
		β Cephei	10, 15, 77	22, 02		22, 37	Das Chronometer hatte in der letzten Zeit einen vom früheren völlig verschiedenen Gang angenommen.
		α Aquarii	10, 46, 35	22, 00		22, 00	
		α Urs. maj.	11, 42, 27	21, 70		21, 06	
			10, 46, 35			22,115	

Aus diesen zusammengestellten Uhrcorrectionen ersieht man den Gang des Chronometers Magnin, welches seiner grösseren Sicherheit wegen, vorzugsweise gebraucht worden war, während einer weitumfassenden Periode. Der Gang hatte nicht die gehörige Regelmässigkeit, wie es auch von einem vielgebrauchten Instrumente, da es überdem noch die Beschwerden einer langwierigen Continentalreise und dann den halbjahrlangen Einfluss eines feinen allesdurchdringenden Tonstaubes

auszudauern gehabt hatte, nicht anders zu erwarten stand. So z. B. findet sich ein Vorrücken in einem Sterntage: den 11—12 Januar 1831 $= + 71''1$, den 12—13 $= 70''7$, den 13—14 $= 83''4$, den 8—9 Februar $= 88'',6$, den 9—11 $= 94''6$, den 11—15 $= 91''7$; in das Mittel dieser Werthe fällt ungefähr sein mittlerer Gang während der ganzen Dauer der Expedition. Dieser Unregelmässigkeit wegen musste an einigen der Beobachtungstage der stündliche Uhrgang, welcher der vom Mittage bis zur Sternculmination verflossenen Zeit entsprach, verworfen werden, wozu die immer regelmässige Zu- oder Abnahme der, auf eine Sternculmination reducirten Uhrcorrectionen, (je nachdem der Gang zu klein oder zu gross ausfiel) berechtigte. In solchen Fällen benutzte ich zur Reduction den, unmittelbar aus den Beobachtungen für grössere Zwischenzeiten folgenden, für ihre Dauer gültigen Uhrgang. Die sehr befriedigende Uebereinstimmung der reducirten Uhrcorrection führt zum Schlusse, dass trotz der Unregelmässigkeiten des Chronometers in grösseren Zeitperioden, sein Gang dennoch für eine Dauer der zur Bestimmung der *AR* des Mondes erforderlichen Beobachtungen, eine ganz genügende Constanz beibehielt.

Entschieden änderte seinen Gang das Chronometer nach dem $\frac{\text{28 Juli}}{\text{9 August}}$ 1832. Da geschah ein plötzliches Herabsinken auf $+ 30''$, welcher Gang in ziemlicher Regelmässigkeit anhielt; darnach offenbarte sich kein bestimmtes Vor- oder Nachrücken mehr, und der $\frac{\text{27 August}}{\text{8 Sept.}}$ ist der einzige und auch der letzte Beobachtungstag, der in diese Periode fällt. Der einzige Nachtheil dieses Umstandes kann sich in einer geringeren Genauigkeit der chronometrischen Längenbestimmung des südlichsten Punktes am Baïkalsee, äussern.

Von den drei Chronometern war an Magnin und Finer eine Excentricität des Secundenzeigers bemerkbar. Da diese von der Construction des Chronometerkörpers abhängig ist, so blieb die zu den beobachteten Zeiten anzubringende Correction immer constant; überhaupt ist sie negativ zu nehmen in den Fällen, wenn die Ablesung an der Uhr nach dem Beobachtungsmomente geschah, im andern Falle, der von mir blos bei Beobachtung der Schwingungsdauer eines magnetischen

Cylinders angewandt wurde, positiv. Sie ist hier für jede 5″ der Chronometer angesetzt.

Magnin				*Correction*	*Finer*				*Correction*
Für 0″	0 Schlag	oder		— 0″,0	Für 0″	+ 0,7 Schlag	oder		— 0″,3
„ 5	0	„	„	— 0, 0	„ 5	+ 1,0	„	„	— 0, 4
„ 10	0	„	„	— 0, 0	„ 10	+ 1,0	„	„	— 0, 4
„ 15	+ 0,2	„	„	— 0, 1	„ 15	+ 2,0	„	„	— 0, 8
„ 20	+ 0,5	„	„	— 0, 2	„ 20	+ 3,0	„	„	— 1, 2
„ 25	+ 0,5	„	„	— 0, 2	„ 25	+ 3,0	„	„	— 1, 2
„ 30	+ 1,0	„	„	— 0, 4	„ 30	+ 3,0	„	„	— 1, 2
„ 35	+ 0,5	„	„	— 0, 2	„ 35	+ 3,0	„	„	— 1, 2
„ 40	+ 1,0	„	„	— 0, 4	„ 40	+ 2,5	„	„	— 1, 0
„ 45	+ 0,0	„	„	— 0, 0	„ 45	+ 1,5	„	„	— 0, 6
„ 50	+ 1,0	„	„	— 0, 4	„ 50	+ 1,0	„	„	— 0, 4
„ 55	— 0,5	„	„	— 0, 2	„ 55	+ 0,5	„	„	— 0, 2

In der letzten Columne der Zeitbestimmungen, sind m (die Abweichung vom Meridiane) und c (der Collimationsfehler) mit beigesetzt. Die Bedingungsgleichungen sind von der Art, dass $\Delta\, AR - \Delta T \pm \Delta n$ sowohl, als auch die Coëfficienten von m und c respective stets mit gleichen Zeichen behaftet sind. m hat ein, dem obigen Gliede entgegengesetztes Zeichen; das Zeichen von c ergiebt sich aus der Vergleichung der abgeleiteten Uhrcorrectionen und ist um so bezeichnender, je grösser c und $sec.\, \delta$ des Nordsterns ist. Doch auch bei dem, in dieser Hinsicht, am wenigsten günstigen Falle, wo c bestimmt wurde, ergab sich bei unrichtiger Wahl des Zeichens eine Differenz von 1″ in der reducirten Uhrcorrection des nördlichen und der südlichen Sterne; dies war am $\frac{11}{25}$ Januar 1831, wo β Urs. min. in unterer Culmination gebraucht wurde und $c = 0''111$ war; und da β Urs. min. und α Ceti nur um 2′ in Culminationszeit abweichen, so konnte diese Differenz ihren Grund nur in der unrichtigen Wahl haben. Zu was für falschen Ergebnissen man aber gelangt, wenn man m und c aus Durchgangsmomenten dreier südlicheren

Sterne bestimmen will, zeigt der $\frac{14}{26}$ Mai 1831; es findet sich $m = 6''12$, $c = 8'',70$, da das direct abgeleitete $m = 9''25$ ist, was nahezu wahr ist, weil sogar bei einem $c = 2''$, m wegen Kleinheit der Coëfficienten von c sich nur bis auf $\mp 0''8$ ändern kann.

Für ein jegliches c wird $\frac{A'k^c + Ak'^c}{k'^m k^c + k^m k'^c} = \frac{Ak'^m + A'k^m}{2k^m k'^m}$, wo jeder der zwei Bedingungsgleichungen ein $A = \Delta AR - \Delta T \pm \Delta n$ und k^m, k^c die Coëfficienten von m und c entsprechen. Dieses ist der Werth von m bei Annahme, dass $c = 0$, und muss immer statt finden, da das Mittel der Ergebnisse aus jeder einzelnen Gleichung dem, aus ihrer gemeinschaftlichen Verbindung gebildeten m, gleich seyn muss. Nun aber ergiebt sich jedes m aus der Gleichung $m = \frac{A' - A\frac{k'^c}{k^c}}{k'^m - k^m \frac{k'^c}{k^c}}$, für $c = 0$ wird daher $\frac{A'k^c + Ak'^c}{k'^m k^c + k^m k'^c} = \frac{A'k^c - Ak'^c}{k'^m k^c - k^m k'^c}$ die erste Bedingung; und daraus die zweite: $\frac{A'}{k'^m} = \frac{A}{k^m}$.

Für den $\frac{28 \text{ Juli}}{9 \text{ August}}$ 1832 z. B. wo $c = 0,057$ war, ergab sich, doch aus den wahrscheinlichsten Werthen von m, dieses für die Summengleichung $= 10''41$, für die Differenzgleichung $= 10''40$, und die einzelnen Grössen $\frac{A}{k^m}$ stimmten folgendermaassen:

$10'',458$, $10'',478$, $10'',493$, $10'',522$. Mittel $10'',49$.

Von den früheren weicht es in so fern ab, da jenem die wahrscheinlichsten Werthe von m zum Grunde liegen, und auch c noch einen kleinen Einfluss ausübt.

Bestimmung der geraden Aufsteigung des Mondes.

Aus den erhaltenen Elementen, Zeitbestimmung, Meridianabweichung, Collimation und Niveaufehler, konnte die AR des Mondes abgeleitet werden.

Für Peking sind die Mondsterne fast für alle Tage beobachtet worden; in Sibirien war es zur Frühlings- und zu Anfang der Sommers-Zeit schwierig sie zu erhalten, da die fortwährenden Wald- und Grasbrände die tieferen Zonen des Horizonts in

beständigem Nebel erscheinen liessen; daher fehlen sowohl in Omsk, als auch später bis zur Beobachtung am Kirkunflusse alle Mondsterne.

Nach Durchsicht der Greenwicher und Cambridger Cataloge, fanden sich am ersten Orte nur an vier Tagen correspondirende Mondsterne vor: den $\frac{12}{24}$ Januar 1831, 111 Tauri und χ^4 Orionis, den $\frac{13}{25}$ Januar ζ Geminorum, den $\frac{14}{26}$ Januar g Geminorum, endlich den $\frac{26 \text{ Juni}}{8 \text{ Juli}}$ 1832 φ Ophiuchi; am andern Orte den $\frac{13}{25}$ Januar 1831 ζ Geminorum, den $\frac{14}{26}$ Januar 3 Cancri. Ausserdem standen mir zu Gebote für den $\frac{12}{24}$ März 1831 Beobachtungen von *AR* ☾ — *AR* ν ♌ in Wilna, die Herr von Slawinsky die Gefälligkeit gehabt, mir zu übersenden, und in Petersburg auf der Sternwarte des KAISERLICHEN Generalstaabes. In Wilna war zugleich α ♌ beobachtet worden, für Petersburg leitete ich *AR* ν ♌ aus der Beobachtung der *AR* 237 ♌ ab, die an beiden Orten, so wie in Dorpat, wo sie absolut abgeleitet werden konnte, gemeinschaftlich war. Für den $\frac{12}{24}$ April 1831 endlich, fanden sich correspondirende Beobachtungen in Petersburg und St. Helena, doch an beiden Orten bloss Differenzen. Zur Vergleichung wurde 91 Virginis benutzt, und seine *AR* aus der, aus Bayllis Zodiakalcataloge abgeleiteten *AR* η Virginis bestimmt. Für den $\frac{3}{15}$ April und $\frac{27 \text{ August}}{8 \text{ September}}$ 1832 sind in Dorpat correspondirende Mondsterne $\varkappa$ Virginis und δ Capricorni angegeben.

Eine ganz strenge Formel zur Reduction eines Seitenfadens auf den mittleren, dieses auf den Meridian und des Mondrandes aufs Mondcentrum, bezogen auf den scheinbaren Zenith, giebt Bessel in den *Tabulae Regiomontanae.* Die Zeit der Culmination findet sich gleich der Durchgangszeit des Mondrandes durch jenen Faden

$$\pm \frac{h}{(1-\lambda)\cos.\delta} + fF + \frac{p' + q' \operatorname{tang.}\delta + c' \sec.\delta}{1-\lambda},$$

wo h der geocentrische Halbmesser, δ die wahre Declination, $(1-\lambda)$ Einfluss der Mondbewegung, F ein Factor des Fadenintervalls f ist, und zur Berichtigung wegen des Mondlaufs und Parallaxe dient; p', q', c' sind Elemente zur Reduction des Mittelfadens auf den Meridian, ebenfalls geocentrisch behandelt. Auf den Beob-

achtungsort bezogen, werden p' und q' zu den von mir angewandten Elementen m und n in folgenden Relationen stehen:

$$p = m \sin. \varphi + n \cos. \varphi; \quad q = - m \cos. \varphi + n \sin. \varphi,$$

wenn nämlich m wie n östlich vom Südmeridiane gezählt werden. Jene sind auf den Pol, diese auf den Zenith bezogen.

Es ist indessen hinreichend genau, nicht von dieser strengen Formel auszugehen, sondern die, bei Reduction des scheinbaren Stundenwinkels in den wahren, übliche zu brauchen; nämlich $S = s'h - \frac{\pi \cos. \varphi}{\cos. \delta} \cdot \sin. 15\, s'h$, wo der zweite Theil ein genauer Ausdruck der Parallaxe der AR, h das Verhältniss der Mondstunden zur Sternstunde ist, und s' durch die scheinbare Declination δ' bestimmt seyn muss. Doch kann man auch hier noch die specielle Berechnung vermeiden, nimmt man anstatt der scheinbaren, die wahre Declination δ und setzt den Factor $\frac{\sin. (\varphi - \delta)}{\sin. (\varphi - \delta')}$ hinzu, also dass $S = sh \frac{\sin. (\varphi - \delta)}{\sin. (\varphi - \delta')}$ wird.

Bedeutet x den Bruch der mittleren Stunde, um die ein Mondstag länger als ein mittlerer Tag ist, so wird $h = (1 + \frac{x}{24}) \times 1{,}00274$, wo der constante Factor das Verhältniss eines mittleren zum Sterntage bedeutet. Nach diesem wird die vollständige Reduction, z. B. eines Seitenfadens auf den Mittelfaden

$$= \pm \frac{f}{\cos. \delta} \left(1 + \frac{x}{24}\right) 1{,}00274 \cdot \frac{\sin. (\varphi - \delta)}{\sin. (\varphi - \delta')}; \text{ und dieses auf den Meridian}$$

$$= (m \sin. (\varphi - \delta) + \text{etc.}) \sec. \delta \times \left(1 + \frac{x}{24}\right) 1{,}00274 \frac{\sin. (\varphi - \delta)}{\sin. (\varphi - \delta')}$$

Nur am $\frac{27 \text{ Juni}}{9 \text{ Juli}}$ 1832, wo $m = 5'43'',7$ betrug, wurde es nothwendig, die genauere Formel anzuwenden.

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Uebersicht aller beobachteten geraden Aufsteigungen des Mondes und seiner Sterne:

Ort	Datum	Stern	Sternzeit des Durchgangs	m (x)	n (y)	c·z	t	Beobachtete gerade Aufsteigung
Omsk 1830	$\frac{22 \text{ Juni}}{4 \text{ Juli}}$	☾ *IR*	$17^h,41',48'',92$	$+10'',43$	$-0'',26$	$0'',0$	$+10'',51$	$17^h,41',59'',43$
Peking	$\frac{14}{26}$ Dec.	☾ *IR*	3, 24, 13, 67	+ 0,76	+0,15	0,0	+ 0,94	3, 24, 14, 61
1830	$\frac{15}{27}$ Dec.	α Tauri	4, 26, 17, 45	− 2,97	+0,02	0,0	− 2,95	4, 26, 14, 50
		☾ *IR*	4, 26, 53, 26	− 2,92	±0,00	— —	− 3,00	4, 26, 50, 26
Peking	$\frac{11}{23}$ Jan.	249 Tauri	3, 58, 20, 33	− 0,37	+0,34	− 0,11	− 0,14	3, 58, 20, 19
1831		☾ *IR*	4, 1, 51, 46	− 0,39	+0,38	− 0,11	− 0,12	4, 1, 51, 34
		48 Tauri	4, 6, 12, 47	− 0,39	+0,41	− 0,11	− 0,09	4, 6, 12, 38
	$\frac{12}{24}$ Jan.	104 *m* Tauri	4, 57, 28, 62	+ 0,39	+0,00	− 0,18	+ 0,21	4, 57, 28, 83
		☾ *IR*	5, 3, 20, 77	+ 0,40			+ 0,22	5, 3, 21, 00
		111 Tauri	5, 14, 34, 45	+ 0,40			+ 0,22	5, 14, 34, 67
		x^4 Orionis	5, 53, 28, 47	+ 0,37			+ 0,20	5, 53, 28, 67
	$\frac{13}{25}$ Jan.	☾ *IR*	6, 6, 10, 00	− 0,46	±0,00	+0,14	− 0,32	6, 6, 9, 68
		43 ζ Gemin.	6, 54, 6, 14	− 0,42	+0,33	+0,15	+ 0,06	6, 54, 6, 20
	$\frac{14}{26}$ Jan.	☾ *IR*	7, 9, 0, 09	− 0,91	+0,16	+0,66	− 0,10	7, 9, 0, 00
		g Geminor.	7, 36, 21, 30	− 0,90	+0,10		− 0,14	7, 36, 21, 16
		224 Gemin.	7, 42, 8, 03	− 0,87	±0,00		− 0,21	7, 42, 7, 82
		3 Cancri	7, 51, 7, 33	− 0,94	+0,02		− 0,26	7, 51, 7, 07
	$\frac{8}{20}$ Febr.	☾ *IR*	4, 43, 33, 86	+ 0,61	− 0,13	− 0,17	+ 0,30	4, 43, 34, 16
		111 Tauri	5, 14, 34, 85	+ 0,60	− 0,54		− 0,11	5, 14, 34, 74
		117 Tauri	5, 18, 14, 31	+ 0,60	− 0,51		− 0,08	5, 18, 14, 23
		119 Tauri	5, 22, 19, 40	+ 0,57	− 0,48		− 0,08	5, 22, 19, 32
	$\frac{9}{21}$ Febr.	☾ *IR*	5, 37, 33, 57	+ 2,64	− 0,07	− 1,45	+ 1,15	5, 44, 34, 72
		u Geminor.	6, 32, 34, 64	+ 2,72	− 0,21	− 1,45	+ 1,06	6, 32, 35, 70
	$\frac{11}{23}$ Febr.	☾ *IR*	7, 46, 13, 45	− 3,02	+0,34	+2,73	+ 0,05	7, 46, 13, 50
		5 *r* Gemin.	7, 51, 53, 11	− 3,14	+0,34	+2,71	− 0,09	7, 51, 53, 02
		ϑ Cancri	8, 21, 57, 50	− 2,94	+0,14	+2,74	− 0,06	8, 21, 57, 44
	$\frac{12}{24}$ März	☾ *IR*	9, 22, 3, 13	+ 4,03	− 0,35	− 0,51	+ 3,23	9, 22, 6, 36

Ort	Datum	Stern	Sternzeit des Durchgangs	m (x)	n (γ)	c·z	t	Beobachtete gerade Aufsteigung
		ν Leonis	9^h,49′, 4,″37	+ 4,″15	− 0,″31	− 0,″51	+ 3,″33	9^h,49′, 7″,70
		(α Leonis	9, 59, 19, 58	+ 4,21	− 0,39	− 0,51	+ 3,31	9, 59, 22,89)
Peking	$\frac{12}{24}$ Apr.	91 Virginis	12, 19, 10, 78	+ 2,45	+0,09	− 0,13	+ 2,41	12, 19, 13,20
1831		☾ *IR*	12, 29, 3, 50	+ 2,27	+0,09	− 0,13	+ 2,28	12, 29, 5, 78
		γ′ Virginis	12, 32, 4, 80	+ 2,30	+0,11	− 0,13	+ 2,28	12, 32, 7, 05
	$\frac{11}{23}$ Mai	*h* Virginis	13, 24, 11, 59	− 3,45	+0,22	− 1,54	− 4,77	13, 24, 6, 82
		☾ *IR*	13, 49, 5, 55	− 3,28	+0,29	− 1,54	− 4,63	13, 49, 0, 92
	$\frac{14}{26}$ Mai	☾ *IR* } ☾ *IIR* }	16, 14, 45, 85	+ 8,00	+0,14		+ 8,34	16, 14, 54, 19
Pogromnoi	$\frac{3}{15}$ Apr.	*k* Virginis	14, 4, 12, 90	−11,01	− 0,04	− 2,63	−13,68	14, 3, 59, 22
1832		☾ Centrum	14, 7, 31, 65	−10,76	− 0,04	− 2,62	−13,78	14, 7, 17, 87
Argunskoi	$\frac{1}{13}$ Mai	☾ Centrum	14, 37, 35, 73	− 1,63	— —	+1,02	− 0,63	14, 37, 35, 10
Gorbiza	30 Mai / 11 Juni	☾ *IR*	16, 0, 51, 13	− 6,87	+0,09	0,0	− 6,97	16, 0, 44, 16
Kirkun	27 Juni / 8 Juli	φ Ophiuchi	16, 16, 7, 9	−5′26″2	— —	— —	−5,26,2	16, 21, 34, 1
		☾ *IR*	16, 42, 33, 0	−5,36,5	— —	— —	−5,44,7	16, 36, 48, 3
Twarago-wa	28 Juli / 9 Aug.	☾ *IR*	19, 48, 43, 34	−10,57	— —	+0,06	−10,84	19, 48, 32, 50
Tunká	27 Aug. / 8 Sept.	Anonym.	20, 11, 26, 27	+ 6,46	— —	+2,24	+ 8,70	20, 11, 34, 96
		δ Capricor.	21, 37, 39, 32	+ 6,55	— —	+2,25	+ 8,80	21, 37, 48, 12
		☾ *IR*	22, 3, 47, 97	+ 6,33	— —	+2,22	+ 8,81	22, 3, 56, 77

Zur Bestimmung des Fehlers der Mondtafeln, waren folgende Oerter mit ihren, aus dem Nautical Almanac für 1834 entlehnten Längen vom Greenwicher Meridiane, gegeben:

Petersburg	— 2^h, 1′,13″	Bogenhausen	— 0^h,46′,26″,5
Dorpat	— 1, 46, 55	Cambridge	— 0, 0, 23, 5
Cracau	— 1, 19, 49, 6	Greenwich	— 0, 0, 0, 0
		St. Helena	+ 0, 22, 57.

Bei Berechnung der Längen meiner Beobachtungsörter befolgte ich die Methode, die Herr Professor Struve vorgeschlagen hat, nach welcher die Correction der angenommenen Länge L', $dL' = \frac{\alpha' - (A' + dA')}{\mu}$ ist: wo α', A' die am gesuchten Orte beobachtete, und für ihn berechnete AR ☾, dA' der für die Beobachtungszeit interpolirte Tafelfehler ist, und μ die Bewegung des Mondes in AR für eine Sternzeitsecunde während des Zeitraums dL' bedeutet.

Bezeichnen wir durch h, h' die Bewegungen des Mondes in AR in einer mittleren Secunde an zwei nacheinander folgenden Tagen, durch t die vom mittleren Tage des Ephemeriden-Ortes bis zur Beobachtung verflossene mittlere Zeit, so wird:

$$\mu = \left(\frac{h' + h}{2} + \frac{h' - h}{12} \cdot t\right) (1 - 0{,}00274),$$

welches eigentlich dem Beobachtungsmomente angehört, doch da dL' einen nur kleinen Zeitraum ausdrückt, so kann es immerfort gebraucht werden.

Die nachfolgende Tafel enthält die Endresultate dL', die bei den angenommenen Längen L' anzubringen sind:

Ort	Beobacht. Moment	Beobachtete AR des ☾ Centri	Berechnete AR des ☾ Centri	Tafel-fehler	Differenz	Tafel-fehler	dL'	L'	L
								von Berlin	
Omsk	Juli 4,283	265°,45′,55″,1	265°,43′,15″,2		−159,9	+ 3″,0	$\frac{162'',9}{0,5381}$	4^h 4′ 0″ 0 — 5, 3, 1	3^h 58′56″9
Cracau	— 4,442	267, 49, 5, 1	267, 49, 8, 4	+ 3″ 3					
Peking	Dec. 26,09	51, 20, 33, 7	51, 21, 0, 0		+26,3	+10,7	$\frac{15,6}{0,6138}$	6,51.48,7 + 25,4	6^h51′74″1
Cracau	— 26,40	55, 28, 42, 5	55, 28, 54, 4	+11,9					
Greenwich		56, 20, 25, 4	56, 20, 34, 3	+ 8,9					
Cracau	— 27,41	71, 16, 32, 0	71, 16, 41, 5	+ 9,5					
Peking	Jan. 23,004	60, 44, 39, 8	60, 44, 47, 8		+ 8,0	0	$\frac{8,0}{0,6054}$	+ 13,2	61″,9
Peking	— 24,08	76, 7, 20, 6	76, 7, 55, 7		+15,1	+1,8	$\frac{13.3}{0,6222}$	+ 21,4	70, 1
Greenwich	— 24,42	81, 10, 41, 9	81, 10, 47, 1	+ 5,2					
Peking	– 25,123	91, 49, 23, 2	91, 49, 44, 3		+21,1	+14,3	$\frac{6,8}{0,6295}$	+ 10,8	59, 5
Cambridge	— 25,46	96, 54, 53, 3	96, 55, 9,75	+16,4					
Greenwich		96, 55, 9, 7	96, 55, 24, 8	+15,1					
Peking	— 26,16	107, 31, 57, 4	107, 32, 19, 6		+22,2	+14,2	$\frac{8.0}{0,6223}$	+ 12,9	61, 6

Ort	Beobacht. Moment	Beobachtete *AR* des ☾ Centri	Berechnete *AR* des ☾ Centri	Tafel-fehler	Differenz	Tafel-fehler	dL'	L'	L
								von Berlin	
Cambridge	Jan. 26,50	112°,32′,55″,1	112°,33′,11″,1	+16″,0					
Greenwich		112, 33, 15, 3	112, 33, 26, 2	+10,9					
Cambridge	Feb. 19,292			+ 5,3				6h,51′,48″,7	6h,51′
Peking	—19,996	71, 10, 18, 6	71, 10, 34, 7		+16″,1	+ 4″,8	11″,3 / 0,6051	+ 18,7	67″,4
Greenwich	—20,331	76, 4, 58, 4	76, 5, 3, 0	+ 4,6					
Peking	—21,035	86, 25, 36, 3	86, 25, 38, 4		+22,6	+ 9,5	13,1 / 0,6120	+ 21,4	70″,1
Cambridge	—22,410	107, 38, 39, 3	106, 38, 58, 5	+19,2					
Peking	—23,113	116, 50, 5, 3	116, 50, 30, 4		+25,1	+15,84	9,3 / 0,5966	+ 15,6	64″,3
Greenwich	—24,486	136, 6, 43, 4	136, 6, 52, 7	+ 9,3					
Cambridge	März 23,40	131, 23, 26, 6	131, 23,45,45	+18,8					
Greenwich	—	131, 23, 27, 3	131, 23, 58, 6	+21,3					
Peking	— 24,10	140, 47, 41, 5	140, 48, 25, 2		+43,7	+11,0	52,7 / 0,5496		
Dorpat	— 24,36	144, 11, 39, 0	144, 11, 46, 7	+ 7,7					
Cambridge	— 25,47	158, 23, 49, 6	158, 23, 58, 5	+ 8,9					
Peking	Apr. 24,146	187, 31, 25, 5	187, 31, 37, 7		+12,2	+ 0,5	11,7 / 0,4819	+ 24,3	73″,0
St. Petersb.	— 24,392	190, 22, 27, 7	190, 22, 27, 4	− 0,3					
St. Helena	— 24,495	191, 33, 50, 1	191, 33, 52, 4	+ 2,3					
Greenwich	— 25,500	203, 13, 35, 7	203, 13, 38, 5	+ 2,8					
Greenwich	Mai 22,425	199, 32, 29, 8	199, 32, 31, 8	+ 2,0					
Peking	— 23,122	207, 29, 54, 5	207, 30, 2, 6		+ 8,1	+ 3,4	4,7 / 0,4753	+ 9,9	58″,6
Greenwich	— 24,485	223, 12, 13, 2	223, 12, 19, 5	+ 6,3					
								von Greenwich	
Argunsk	— 13,136	219, 23, 49,35	219, 24, 1, 5		+12,15	+ 2,30	9,85 / 0,5044	7h,59′,24″,0	7h,59′
Cambridge	— 13,480	223, 33, 47,65	223, 33, 53, 1	+5,45				+ 19,5	43″,5
Greenwich	— 13,480	34, 5,95	34, 5, 1	−0,85					
Gorbiza	Juni 11,115	240, 26, 34, 5	240, 26, 56, 7		+22,2	+2,85	19,55 / 0,5111	7h,55′,54″,5	7h,56′
Cambridge	— 10,424	231, 59, 54, 6	231, 59, 55, 8	+ 1,2				+ 37,9	32″,4
Greenwich		232, 0, 2, 9	232, 0, 7, 4	+ 4,5					

Ort	Beobacht. Moment	Beobachtete *AR* des ☾ Centri	Berechnete *AR* des ☾ Centri	Tafel-fehler	Diffe-renz	Tafel-fehler	*dL′*	*L′* von Greenwich	*L* von Greenwich
Greenwich	Juli 8,370	240°,39′,46″,3	240°,39′,47″,6	+1″,3					
Kirkun	— 9,081	249, 27, 31, 9	249, 26, 12, 3		−79″,6	−3″,80	75″, 8 / 0,5143	7ʰ, 25′, 22″,0 —2,27,45	7ʰ, 22′ 54″,6
Dorpat	— 9,323	252, 26, 50, 8	252, 26, 45, 3	− 5,5					
Cambridge	Aug. 8,414	288, 11, 54, 1	288, 11, 52, 6	− 1,5					
Greenwich	— 8,414	12, 1, 3	12, 4, 2	+2,9					
Twarag.	— 9,142	297, 23, 42, 8	297, 23, 15, 3		− 27,5	− 4,0	23,5 / 0,5231	7ʰ, 6′, 24″, 0 — 44, 9	7ʰ, 5′ 39″,1
Bogenh.	— 9,415	300, 49, 5, 0	300, 48, 59, 2	− 5,8					
Tunká	Sept. 8,174	331, 14, 36, 1	331, 13, 34, 9		− 61,2	+2,2	63,4 / 0,5020	6, 45, 24,0 — 2, 6,3	6ʰ,43′ 17″,7
Cambridge	— 8,464	334, 46, 40, 0	334, 46, 47, 4	+7,4					
Dorpat	— 8,388	333, 51, 42, 5	333, 51, 39, 4	− 3,1					
Greenwich	Apr.14,500	203, 3, 4, 3	203, 3, 3, 0	− 1,3					
Pogromnoi	— 15,214	211, 49, 12, 3	211, 49, 51, 3		+39,0	+2,5	36,5 / 0,5094	7ʰ, 23′, 0″, 0 +1,11, 6	7ʰ,24′ 11″,6
Dorpat	— 15,456	214, 47, 35, 5	214, 47, 39, 3	+3,8					

Dass unter den Beobachtungen zu Peking, die vom 24. März ein so abweichendes Resultat gaben, ist schwer zu erklären; denn obschon, wie man aus den Zeitbestimmungen ersehen kann, der Gang des Chronometers gerade zu dieser Zeit ein ganz verändertes Gesetz befolgte, so konnte doch derselbe keinen Einfluss äussern, weil der Durchgang des Mondes und seines Sterns inmitten der zeitbestimmenden Sterne α Hydrae und α Leonis fiel, und $AR\nu\Omega$ nach der Vergleichung bis auf 0″, 3 stimmt. Nach genauer Prüfung des Ganzen bleibt nur ein, obschon unwahrscheinlicher Fall anzunehmen, dass nämlich während des Durchgangs des Mondes ein bloss momentan falscher Stand des Chronometers statt fand.

Den 27. Dec. 1830 äusserte der Gang des Chronometers schon bei der Zeitbestimmung eine Unsicherheit von 1″, u. gab $dL'=0$; deswegen ist er ebenfalls nicht zugezogen.

Für den 26. Mai 1831 bleibt noch ein Tafelfehler für den 27ten zu wünschen. Die angenommene Länge $6^h, 51', 48'',7$ bezieht sich auf das KAISERLICH-Russische

Gesandschaftshôtel, oder den sogenannten Hoei-thoung-kouan nach P. Hyacinth's Plan, das nach demselben, von der Kaiserlichen Sternwarte um 7″,2 nach West liegt. Das Mittel aus den 10 berichtigten Längen für den Mondrand wird $6^h, 51', 66'', 06$ und davon nach Struve 3″, 7 abgezogen, giebt die östliche Länge des Hôtels von Berlin = $6^h, 52', 2'', 4$; der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist = 1″, 3 und der einer einzelnen = 4″, 0. Die aus Sterndurchgängen durch den ersten Vertical abgeleitete Polhöhe ist = 39°, 54′, 24″, 5.

Bestimmung der Polhöhe des Kaiserlich - Russischen Gesandtschaftshôtels.

Die von Bessel vorgeschlagene Methode, durch Sterndurchgänge im ersten Verticale die Polhöhe zu bestimmen, wandte zuerst mit so vielem Erfolge Herr Professor Hansen im Jahre 1824 auf Helgoland an. Seitdem hat sie sich immerfort als genau bewährt, und durch Behandlung einzelner Sterndurchgänge in kleineren Azimuthen, besonders in südlicheren Breiten, sehr an Allgemeinheit gewonnen.

Wegen Vereinfachung der Berechnung stellte ich das Instrument immer möglichst genau in den ersten Vertical, und beobachtete, wo es sich nur immer thun liess, die Durchgänge an beiden Verticalen von Sternen, die nicht über 5° unter'm Zenith culminirten. Solcher Beobachtungen gelang es mir unter zwölfen sechs auszuführen: doch da die Axe des Instruments an zwei Tagen umgewandt wurde, und die Unveränderlichkeit des Collimationsfehlers zweifelhaft war, so konnte wiederum nur die Hälfte dieser sechse mit gemeinschaftlicher Beziehung behandelt werden.

Dass später in Süd-Ost-Sibirien diese Methode nicht angewandt wurde, muss der obenerwähnten, durch Abfluss der Flüssigkeit hervorgebrachten starken Verlängerung der Blase der Libelle zugeschrieben werden, die den Niveaufehler, bekanntlich ein wichtiges, genau auszumittelndes Element, zu bestimmen nicht erlaubte.

Für denselben Stern und eine beliebige Aufstellung des Instruments ist die Breite φ eine Function vom Azimuthal-und parallactischen Winkel; oder zieht man das durch Beobachtung gegebene Element *Zeit* in Betracht, eine Function von

$\frac{T'+T}{2} - AR$* und $\frac{T'-T}{2}$ *). Dadurch, und durch δ muss sie also auch ausgedrückt werden können: denn heisst der erste Winkel $90° - a$, der andere w, so findet sich für jede Breite $\frac{\cos. w}{\cos. a} = \sin. \varphi \cdot \frac{\sin. \frac{T'-T}{2}}{\cos.\left(\frac{T'+T}{2} - AR\right)}$; und da $\frac{\cos. a}{\sin. w} = \frac{\cos. \delta}{\cos. \varphi}$, so wird $\text{cotang.}\, w = \cos. \delta\ \text{tang.} \varphi \cdot \frac{\sin. \frac{T'-T}{2}}{\cos.\left(\frac{T'+T}{2} - AR\right)}$. Es ist aber auch im rechtwinklichen sphärischen Dreiecke $\text{cotg.}\, w = \text{tang.} \frac{T'-T}{2} \sin. \delta$, und daher

$$\text{tang.}\, \varphi = \text{tang.}\, \delta \cdot \frac{\cos.\left(\frac{T'+T}{2} - AR\right)}{\cos. \frac{T'-T}{2}}.$$

Bei Berechnung übrigens fand sich $\text{tang.}\, \varphi = \text{tang.}\, \delta\, \text{sec.}\, 15\left(\frac{T'-T}{2}\right)$ immer hinreichend genau.

Da sich der Collimationsfehler durch Umlegen der Axe inzwischen der beiden Beobachtungen aufhebt, erhalten die beobachteten Durchgangszeiten blos noch eine Correction wegen des Niveaufehlers. Um einen Ausdruck für diesen zu erhalten, muss man bloss erwägen, dass der unmittelbar durch's Instrument angegebene Fehler n mit dem auf die Declination des Sterns reducirten N (welches der gesuchte ist) einen dem parallactischen gleichen Winkel bildet. Heisst h die Höhe des Sterns, so wird $N = \frac{n \sin. h}{\cos. w}$; und nach gehöriger Substitution $N = \frac{n \sin. \delta}{\cos. w} \cdot \frac{\sin. (\varphi + \psi)}{\cos. \psi}$, wenn $\text{tang.}\, \psi = \frac{\cos. 15\,(AR - T)}{\text{tg.}\, \delta} = \frac{\cos. 15\,(T' - AR)}{\text{tg.}\, \delta}$ für Ost und West. Ist das Azimuth $= 90°$, so wird $\sin. h = \frac{\sin. \delta}{\sin. \varphi}$, $\sin. w = \frac{\cos. \varphi}{\cos. \delta}$; daher $N = n \cdot \frac{\sin. \delta \cos. \delta = \frac{1}{2} \sin. 2\delta}{\sin. \varphi \sqrt{(\sin. (\varphi + \delta) \sin. (\varphi - \delta))}}$.

Ist die Axe nicht umgewandt worden und der Collimationsfehler aus früheren Beobachtungen bekannt, so wird die vollständige Correction der Sternzeit T

*) Wenn T und T' die beiden Durchgangsmomente in Sternzeit andeuten.

$$= \pm \left(n \cdot \frac{\sin. 2\delta}{2 \sin. \varphi} + c\right) \times \frac{1}{\sqrt{[(\sin. (\varphi + \delta) \sin. (\varphi - \delta)]}},$$

additif, wenn das Südende der Axe zu hoch stand und c nach N wirkte; subtractif, wenn das entgegengesetzte statt fand. Für T' alles umgekehrt.

Es folgen hier zuerst einzeln die Beobachtungen der Durchgänge durch die beiden Verticale verschiedener Sterne. Ich muss bemerken, dass bei dieser Art von Durchgängen besonders, die grösstmögliche Feinheit der Fäden wünschenswerth wird, da sonst ein Stern 5ter bis 6ter Grösse, wenn sein $(\varphi - \delta)$ einen kleinen Bogen beträgt, oder die beiden Durchgänge ein Intervall von nur 1—2 Stunden in sich schliessen, auf mehrere Secunden verschwinden, und dadurch $\cos. \frac{T' - T}{2}$ unsicher machen kann.

Die nöthigen Declinationen entlehnte ich aus Baily's Sterncataloge.

Den $\frac{29 \text{ Dezember } 1830}{10 \text{ Januar } 1831}$ *Magnin* $\delta \cdot \varepsilon$. Persei = 39°,30′,49″,02

	Uhrzeit Mittelfaden	Reduct.	Sternzeit	N	Vertical	
ε. Persei	11h,51′,26″,6	26″,8	3h,8′,45″,7	+5″,6	3h,8′,51″,3	φ = 39°,54′,15″,30
	13, 7, 35, 0	33, 8	4, 25, 2, 4	—0, 6	4, 25, 1, 8	

Nach diesen Beobachtungen gab das Passageninstrument, in den Meridian gestellt, folgende Zeitbestimmungen:

α Orionis um	10h,28′,55 m.Z.	3h,59′,50″,10	1h: +2″,08	50″,10	Magn. im m.M. d. $\frac{29}{10}$ 3h,59′,31″
δ Urs. min.	11, 8,91 —	50,82			50″
Sirius	11,20,09 —	51,91		50,13	— — — — $\frac{30}{11}$ 4, 0,21
um	10,28,55 —	. . . .		3h,59′,50″,12	

Den $\frac{8}{20}$ Januar 1831 *Magnin* $\delta \cdot \varepsilon$. Persei 39°,30′,49″,59

ε Pers.	11h,25′, 3″,2	3″,2	3h,8′,20″,6	+0″,92	3h,8′,21″,5	
	12, 41, 1, 6	2, 8	4, 24, 28,6	+2, 21	4, 24, 30,8	φ = 39°, 54′,15″,30
ϑ Aur.	12, 25,14,0	14, 4	4, 8,38,5	—0, 50	4, 8, 38,0	δ ϑ Aurig. 37, 11, 26, 55
	3, 43,40,8	41, 7	7, 27, 27,9	+1, 20	7, 27, 29,1	φ = 39, 54, 14,90

Aus diesen drei Bestimmungen erhält man φ = 39°,54′,15″,17

Magnin im *m. M.* d. $\frac{8}{20}$ Jan. 4h, 12′, 45″
Magnin im *m. M.* d. $\frac{9}{21}$ 4h, 13′,59″ } −74″

Spiegelsextant.

Es bleibt immer wünschenswerth, nicht allein Ergebnisse aus Beobachtungen an einem Instrumente mitzutheilen, sondern auch Untersuchungen über dessen Individualität, deren reine Folge jene seyn müssen, voran gehen zu lassen. Besonders ist diess beim Spiegelsextanten zu beachten, der aus des Künstlers Hand entlassen, in den verschiedenen Theilen seines Körpers Correctionen trägt, deren gemeinschaftliche Wirkung eben seine Individualität ausmacht, die ausgekundschaftet werden muss, und die bei umsichtiger Behandlung hinfort sich unverändert erhält. Da aber gerade dieses Instrument, seiner Handhabung wegen, mehr den zufälligen Perturbationen ausgesetzt ist, so ist es nothwendig, sich für die Zeitperiode der Beobachtungen, der Richtigkeit und Constanz jener Correctionen zu versichern.

Der Troughtonsche Sextant, den ich gebraucht habe, musste wegen Mangel an Zeit, der den neuanzukommenden abzuwarten nicht gestattete, aus der Sternwarte der Admiralität bezogen werden. Es war ein achtzölliger Spiegelsextant mit einer Eintheilung von 10″ auf Silber; sein Fernrohr und die Spiegel waren von grosser Klarheit, und die letzteren zeigten keinen Prismatismus.

An jedem der Spiegel waren zu drei gefärbten Gläsern von verschiedener Dunkelheit angebracht, von denen übrigens nur die beiden dunkelrothen gebraucht wurden. Zur Annullirung der Deviation der Fernröhre gehörte zum Apparate ein an den Enden mit vierkantigen Einfassungen versehenes Fernrohr mit Kreuzfäden, deren Durchschnittspunkt eine, mit der optischen Axe des Sextantenfernrohrs gleiche Höhe über der Sextantenebene erhielt. Die Micrometerschraube am Vernier hatte, zufolge eines häufigen Gebrauchs, einen todten Gang erlangt, wie überhaupt der ganze Körper des Instruments viele Zeichen einer Seereise an sich trug. Spiegel, Fernröhre und gefärbte Gläser hatten Correctionsschrauben, die letzteren zum Umwenden; die Schraube am kleinen Spiegel äusserte eine Wandelbarkeit, und musste daher oft bei Bestimmung des Collimationsfehlers benutzt werden. Zum Apparate gehörte noch ein Stativ zur Messung von Mondsdistanzen und terrestrischen Azimuthen mit

Einrichtung für die beiden Lagen der Ebene des Instruments, und ein künstlicher Quecksilberhorizont nebst einem Schutzdache von bewährt guten Gläsern.

In Ermangelung einer Vorrichtung zur Bestimmung der Neigung des grossen Spiegels, benutzte ich das zum grossen Gambeyschen Declinator gehörige Diopterlineal. Nachdem dieses (mit der Ebene des Sextanten in möglichst horizontaler Lage gehalten) während der Bewegung der Alhidade auf dem Gradbogen, immer senkrecht auf die Mitte des grossen Spiegels gerichtet, durch 60° gerückt worden war, ergaben sich die, den abgelesenen Bogen auf dem Limbus gehörigen Entfernungen des Durchschnittspunktes eines Fadenkreuzes am Spiegel $= a$ vom Bilde des Objects, nämlich der geschwärzten Oeffnung am Auge $= b$, die mit dem ersten in einer Horizontallinie angebracht war, in Bezug auf die Entfernung des Punktes b von einem unter ihm befindlichen c, die also constant blieb, und durch ein Linearmaass gegeben war.

Die Relationen der beiden Entfernungen ab und bc durch Augenmaass, mit einer ganz hinreichenden Schärfe, bestimmt, waren folgende:

0°	$ab = 1{,}50 \times bc$ (a unter b)	60°	$ab = 0{,}50 \times bc$ (a unter b)
10	$ab = 1{,}25 \times bc$ — —	70	$ab = 0{,}00 \times bc$ (fallen zusammen)
20	$ab = 1{,}00 \times bc$ — —	80	$ab = 0{,}23 \times bc$ (a über b)
30	$ab = 0{,}80 \times bc$ — —	90	$ab = 0{,}28 \times bc$ — —
40	$ab = 0{,}75 \times bc$ — —	100	$ab = 0{,}43 \times bc$ — —
50	$ab = 0{,}67 \times bc$ — —	110	$ab = 0{,}67 \times bc$ — —
60	$ab = 0{,}50 \times bc$ — —	120	$ab = 0{,}82 \times bc$ — —

Diese Verhältnisse fanden statt, nachdem ich dem Spiegel durch blosse Coincidenz der beiden Limbusenden eine verticale Lage ertheilt hatte. Die Prüfung dieser Coincidenz diente mir fortan zur Bestätigung der Unveränderlichkeit der oben angeführten Werthe.

Die Neigung des grossen Spiegels N findet sich, tang. $2N = \frac{ab}{R}$, wo R die Entfernung des Objects von der Mitte des Spiegels $= 101{,}4$ par. Lin. war; und ab durch $bc = 1{,}5$ par. Lin. gegeben ist.

*

0°	$N = 38',1$	Der Pol des	60°	$N = 12'7$	
10	$= 31,8$	Spiegels liegt	70	$= 0,0$	
20	$= 25,4$	über der Sex-	80	$= 5,8$	Der Pol des
30	$= 20,4$	tanten- Ebene.	90	$= 7,1$	Spiegels liegt
40	$= 19,0$		100	$= 10,9$	unter der Sex-
50	$= 17,0$		110	$= 17,0$	tanten-Ebene.
60	$= 12,7$		120	$= 20,8.$	

Im Astronomischen Jahrbuche für 1830 ist, in einem Aufsatze von Encke *über den Spiegelsextanten*, unter anderen der Fall behandelt, wo N variabel wird, d. h. wo auf diese Grösse eine Neigung der Umdrehungsaxe Einfluss hat. Sind nun für drei gleichabstehende Grade des Limbus drei N, N', N'' bekannt, so findet sich die Neigung der Spiegelfläche gegen die Umdrehungsaxe $= (2N - 3N' + 2N'') + (N - 2N' + N'') \sqrt{3} = \delta$. Alles positif genommen, wenn der Pol der Spiegelfläche über der Ebene des Sextanten, und über der auf die Umdrehungsaxe senkrechten, liegt.

In diesem betrachteten Falle findet sich die Neigung der Umdrehungsaxe gegen die Verticale der Sextantenebene, wenn die Spiegelfläche senkrecht auf die, dem Sextanten senkrechte Ebene der Umdrehungsaxe ist, $= N \pm \delta$ oder $\delta \pm N$; ist jene dieser parallel, so wird N immer gleich der Constanten δ. Dass $N = 0$ werde, und in welcher Gegend des Quadranten, hängt von der Lage des Kegels, den die Spiegelfläche um die Umdrehungsaxe beschreibt, und von der Grösse des Winkels an seinem Scheitel, ab; um dieses möglich zu machen, muss die Neigung der Axe gegen die Verticale der Sextanten-Ebene $= N + \delta$ seyn, bei der erwähnten ersten Lage der Spiegelfläche; ist sie $= \delta$, so annullirt sich N bereits schon in dieser Lage.

Um aus diesem allen auf die obenbeigesetzte Tafel Schlüsse ziehen zu können, ziehe man das Differenzverhältniss in Betracht, welches sich aus Vergleichung von vier nacheinanderfolgenden N ergiebt; es heisst: $N - N''' = (N' - N'')\ 2{,}735$, und über-

haupt, wenn man zwei Reihenfolgen nimmt $\Delta N : \Delta N' = \Delta N_0 : \Delta N'_0$. Auf die Werthe von N angewandt, äussert sich nur bis zum 50ten Grade des Limbus die Wahrheit dieses Satzes: denn für $(0, 10, 20, 30)^\circ$ ist $N - N''' = 17',7$ und berechnet $= 17',5$, für $(10, 20, 30, 40)^\circ$, ist $N - N''' = 12',8$, berechnet $= 13',6$. Die folgenden vier geben $N - N''' = 8',4$, berechnet $= 3',8$ und fortan stimmen die beobachteten mit den berechneten Differenzen nicht mehr überein. Es lassen sich daraus folgende Schlüsse ziehen:

1) die Umdrehungsaxe bleibt bis zum 50ten Grade unbeweglich.

2) ihre Neigung gegen die Spiegelfläche für $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ berechnet, ist $= \frac{31',6 + 30'6 + 33'8}{3} = + 32',0$, wo $+$ die Lage des Spiegelpols über der, der Axe verticalen Ebene, andeutet. Sie bleibt unverändert.

3) ist es wahrscheinlich, dass die Umdrehungsaxe eine beträchtliche Neigung in der Ebene, die durch den 10ten Grad geht, zur Ebene des Sextanten habe, und zwar mit seiner Fläche einen stumpfen Winkel bilde; dieses scheint sowohl das bei 10° stattfindende $N = \delta$, als auch das beträchtliche Abnehmen von N anzudeuten.

4) endlich, scheint um den 70ten Grad eine plötzliche sehr starke, der Spiegelfläche senkrechte Bewegung des Axenpols statt zu finden, die die Annullirung von N beschleunigt und den Spiegelpol unter die Sextantenebene versetzt: denn, bei einer Neigung der Axe gegen diese Ebene $= \delta$, hätte die Annulirung erst beim 190ten Grade des Limbus erfolgen müssen.

Man ersieht hieraus, dass bei diesem Sextanten eine zusammengesetztere Bewegung des Spiegelpols zum Grunde liege, die Umdrehungsaxe nämlich eine rotirende Bewegung habe, und zwar so, dass ihre Pole unregelmässige Curven, der Bewegung der Alhidade nicht proportional, beschreiben. Es ist wahrscheinlich, dass der Punkt, um den sich die Axe dreht, in die Mitte des untern Spiegelrandes fällt, da die Construction des Sextanten eine progressive Bewegung des Spiegels nicht gestattet. Die-

ser Umstand ist um so übler, da er, vermöge der am Ende der Umdrehungsaxe obwaltenden Friction eine zwar langsame, doch beständige Aenderung der Werthe von N nach sich ziehen kann; es ist daher rathsam, diesen Sextanten häufigen Untersuchungen in Bezug auf seine Fehler zu unterwerfen. Die Neigung des kleinen Spiegels n muss $= + 38',1$ (wo $+$ die Höhe des Pols seiner Rückseite über der Sextantenebene ausdrückt) angenommen werden, weil er stets mit dem grossen parallel eingestellt wurde. Annullirt man die Neigung der Fernröhre, so findet sich nach Encke die Correction des auf dem Sextanten abgelesenen Bogens s, Δs aus:

$$\sin. \frac{\Delta s}{2} = - \sin. N^2 \frac{\sin. \frac{1}{2} s^2}{\sin. s} + \frac{\cos. n^2 \cos. N^2}{\sin. s} \left[(\text{tang.} N - \text{tang.} n \cos. \tfrac{1}{2} s)^2 - (\text{tang.} N \sin. \beta + \text{tang.} n \sin. (\tfrac{1}{2} s - \beta))^2\right],$$

wo β der constante Winkel am Mittelpunkte, hier $= 16°58'$ ist. Entwickelt man den Factor des zweiten Gleichungstheiles, so wird $\sin. \frac{1}{2} \Delta s = - \sin. N^2 \frac{\sin. \frac{1}{2} s^2}{\sin. s} + \frac{\cos. \beta}{\sin. s}$ $(\cos. n^2 \sin. N^2 \cos. \beta - \frac{1}{2} \sin. 2N \sin. 2n \cos. (\frac{1}{2}s - \beta) - \sin. n^2 \cos. N^2 \cos. (s - \beta))$; und mit Vernachlässigung von $\cos. n^2$, $\cos. N^2$

$$\tfrac{1}{2} \Delta s = + N^2 \frac{\cos. (\frac{1}{2}s + \beta) \cos. (\frac{1}{2}s - \beta)}{\sin. s} - 2Nn \frac{\cos. \beta \cos. (\frac{1}{2} s - \beta)}{\sin. s} + n^2 \frac{\cos. \beta \cos. (s - \beta)}{\sin. s}.$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar den Werth von $\frac{1}{2} \Delta s$ wenn $N = 0$ und $n = 0$; ist $N = n$ was, wie erwähnt ist, bei der parallelen Lage der Spiegel statt hat, so wird:

$$\tfrac{1}{2} \Delta s = \frac{N^2}{\sin. s} \left[- \sin.^2 \tfrac{1}{2} s - 4 \sin.^2 \tfrac{1}{4} s \cos. \beta \cos. (\tfrac{1}{2} s - \beta)\right].$$

Da in diesem Falle s ein sehr kleiner Bogen ist, so kann man auch schreiben: $\Delta s = - \frac{1}{120} N^2 s \sin. 1'' (1 + \cos. \beta^2)$, wo der Factor $\frac{1}{60}$ dazu dient, um Δs in Secunden auszudrücken, und das Zeichen $-$ seinen Grund darin hat, dass $2 \cos. \beta \cos. (\frac{1}{2} s - \beta) > \cos. (\frac{1}{2} s + \beta) \cos. (\frac{1}{2} s - \beta) + \cos. \beta \cos. (s - \beta)$ ist. Dass Δs sehr klein werde, erhellt schon daraus, dass für $s = 0$, Δs ebenfalls $= 0$ wird. Für den Indexfehler $s = 4'$ erhält man $\Delta s = - 0'', 03$.

Von 10° zu 10° berechnet, gab die erste Formel folgende Werthe von Δs:

$s =$	$\Delta s =$	$\frac{1}{2}\Delta s =$	$s =$	$\Delta s =$	$\frac{1}{2}\Delta s =$
10°	+ 5″,2	+ 2″,6	70°	+ 30″,8	+ 15″,4
20	+ 11, 4	+ 5, 7	80	+ 34, 8	+ 17,4
30	+ 14, 4	+ 7, 2	90	+ 29, 3	+ 14,6
40	+ 9, 4	+ 4, 7	100	+ 29, 5	+ 14,7
50	+ 6, 4	+ 3, 2	110	+ 34, 5	+ 17,2
60	+ 8, 4	+ 4, 2	120	+ 33, 3	+ 16,6

$\frac{1}{2}\Delta s$ ist die Correction der Höhen bei Breitenbestimmungen. Es bleibt nun noch übrig einer Correction zu erwähnen, die bei Beobachtungen von Mondsdistanzen und terrestrischen Azimuthen von Einfluss werden kann. Dies ist der, durch Prismatismus der gefärbten Gläser im Winkelmessen entstehende Fehler. Dieser Fehler wurde, da er gar keiner Veränderlichkeit unterworfen ist, erst nach Beendigung der Reise zu Anfang des Jahres 1833 bestimmt.

Die Vergleichung der Collimationsfehler, die eine Blendung des Oculars gab, mit denen die eine Spiegelblendung bei einer durchgängig angewandten Lage der Gläser, hervorbrachte, bestimmte die Correction, die zu dem durch Messung des Sonnendurchmessers immer gegebenen Indexfehler anzubringen ist, auf $+ 1',10''$. Diese Annahme wird auch durch Vergleichung der Indexfehler, die ein Stern und die Sonne geben, völlig bestätigt.

Durch Vergleichung der Bogen, die der Index dies- und jenseits des Nullpunkts bei 4 verschiedenen gegenseitigen Lagen der Gläser angab, fand sich der Fehler, der durch den Prismatismus des Glases am grossen Spiegel im Bogen entsteht $= \frac{1',41''}{2} = 50''$, zum Bogen additif, und für's Glas am kleinen Spiegel $= \frac{20''}{2} = 10''$ subtractif.

Ist daher c der durch die Sonne gefundene Collimationsfehler, und zur Blendung das erste Glas gebraucht, so wird die Correction, die zum beobachteten Winkel anzubringen ist $= - c - 1',10'' + 50'' = - c - 20''$, für's zweite Glas $= - c - 1',10'' - 10'' = - c - 1',20''$.

Ausserdem scheint der Sextant zwischen den Graden 60° bis 120°, in deren Bereich alle Breitenbeobachtungen fallen, mit einem constanten Fehler behaftet zu seyn. Eine Vergleichung der durch ihn in verschiedenen Monaten zu Pekin bestimmten Polhöhen, mit der aus Beobachtungen des Passageninstruments abgeleiteten richtigen Polhöhe dieses Orts, erwiess seine Existenz und seinen Werth. Der Sextant gab folgende Resultate:

Den 3. Januar 1831	$\varphi = 39°,54',1'',6$	$-\frac{1}{2}\Delta s = 3'',7$,	$\varphi' = 39°,53',57'',9$
— 11. — —	$\varphi =$ 3, 4	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 3, 8	59, 6
— 23. — —	$\varphi =$ 6, 1	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 5, 3	60, 8
— 7. Februar —	$\varphi =$ 7, 4	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 14, 3	53, 1
— 19. — —	$\varphi =$ 15, 0	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 16, 8	58, 2
— 3. März —	$\varphi =$ 7, 3	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 15, 7	51, 6
— 12. — —	$\varphi =$ 17, 3	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 14, 6	62, 7
— 28. — —	$\varphi =$ 17, 0	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 16, 0	61, 0
— 4. April —	$\varphi =$ 10, 0	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 17, 1	52, 9
— 8. — —	$\varphi =$ 9, 7	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 17, 0	52, 7
— 20. — —	$\varphi =$ 17, 5	$-\frac{1}{2}\Delta s =$ 16, 6	60, 9
		Mittel:	$\varphi' = 39°,53',57'',4$.

Das Passageninstrument gab $\varphi = 39°, 54', 15'', 2$.

Die constante Correction aller mit dem Sextanten bestimmten Polhöhen ist demnach $= + 18''$; und dieses Instrument giebt daher alle beobachtete Breiten bis auf 2″ im Mittel zu gering an.

Diess sind die Correctionen, die an die mit dem Sextanten beobachteten Bogen angebracht wurden, um daraus richtige Bestimmungen ziehen zu können.

Die nachfolgende Tafel bezieht sich blos auf's Russische Reich, besonders auf das transbaikalische Sibirien, das im Jahre 1832 von mir bereist worden ist; da die Beobachtungen in Pekin für sich behandelt worden sind, und die Oerter in der Mongolei, deren Längen sich auf Mondsdistanzen und chronometrische Bestimmungen gründen, später in einer Zusammenstellung der magnetischen Beobachtungen angeführt werden sollen.

Ich bemerke noch, 1) dass bei den Polhöhenbestimmungen, ohne Ausnahme, Temperatur und Zustand der Luft in Betracht gezogen worden sind, so wie auch, dass die zwei Differenzen der Sonnendeclinationen immer berücksichtigt wurden. Die Resultate gründen sich meistentheils auf ein Mittel aus zwölf Beobachtungen; 2) dass bei Längenbestimmungen durch den Chronometer der Uhrgang benutzt worden ist, welcher aus der Vergleichung zweier nächstfolgender absolut bestimmter Oerter folgt, um einen etwanigen Fehler möglichst gleichförmig unter die zwischenliegenden Oerter zu vertheilen.

Um ein Beispiel anzuführen, wähle ich die zwischen Gorbizkoi und Nertschinsk belegenen Oerter am Schilkaflusse. Die Beobachtungen standen folgendermaassen:

Gorbizkoi den 13. Juni	$8^h,6',45''$ V.	Chron. vor $m. Z.$		$= 2^h,39',56'',5$	$= T$
Schilkinskoi d. 15.	—	0, 0, 00 —	—	—	$= 2, 44, 49, 3$	$= T_{,}$
Uptuitschensk 16.	—	0, 0, 00 —	—	—	$= 2, 47, 52, 0$	$= T_{,,}$
Stretensk den 17.	—	1, 52, 5 N.	—	—	$= 2, 51, 54, 4$	$= T_{,,,}$
— — 18.	—	5, 44, 1 V.	—	—	$= 2, 52, 54, 3$	$= T_{,,,}$
Bergwerk den 22.	—	0, 00, 0 —	—	—	$= 2, 51, 8, 7$	$= T'$.

Die Länge von Gorbizkoi L ist $= 7^h, 47', 10'' 9$; die vom Bergwerk Nertschinsk $L' = 7^h, 49', 4'', 4$. Es seyen $Z, Z_{,}, Z_{,,}, Z_{,,,}, Z'$, die Epochen der Zeitbestimmungen, so wird der tägliche Gang des Chronometers

$$\Delta T = \frac{T' - T + (L' - L)}{Z' - Z - (L' - L)}$$

wo der Nenner in Theilen des Tages ausgedrückt seyn muss; und darnach $\Delta L = T - T_{,} + \Delta T \left[(Z_{,} - Z) - \frac{\Delta L}{24h}\right]$, woraus die Länge vom Schilkinskoi Sawod $L_{,} = L + \Delta L$ folgt; u. s. w.

ΔT findet sich $= + 85'',8$, und die Längendifferenzen $L_{,} - L$; $L_{,,} - L$; $L_{,,,} - L$: $= -1',47'',2$, $-3',24'',0$, $-5',53'',9$, endlich $L_{,,,} - L' = -7',48'',4$.

Die Vergleichung der beiden letzten Grössen giebt $(L' - L)$, und konnte jedesmal zur Controlle der Rechnung dienen, da der einfachen Berechnung wegen, jeder nächstfolgende Ort durch den unmittelbar vorhergehenden bestimmt wurde.

Ortsbestimmungen in Sibirien.

Name des Orts.	Breite.	Länge östlich von Paris.	Länge.	Bemerkungen.
Tjukalinsk	55°,52′,28″,4	4h,38′,39″,1	69°,39′,46″,0	beruht auf d. Länge v. Omsk
Omsk	54, 59, 22	4, 43, 9, 5	70,47, 22, 0	Stadt, bei der Moschée.
Kainsk	55, 27, 6	5, 3, 21, 5	75,50, 22, 0	beruht auf d. Länge v. Omsk
Tomsk	56, 29, 25,7	5, 30, 30, 2	82,37, 33	beruht auf d. Länge v. Omsk
Krasnojarsk	56, 1, 5	6, 1, 59, 3	90,29, 49, 0	beruht auf Tomsk u. Irkutsk
Stepnaja	52, 10, 23	6, 55, 59, 7	103,59, 55	Mündung d. Selenga } Länge v. Irkutsk zum Grunde.
Kolessowaja	52, 6, 47	6, 56, 46, 5	104,11, 37	An der Selengá } Länge v. Irkutsk zum Grunde.
Possolsk *)	52, 1, 8,7	6, 55, 48, 3	103,57, 4	Kloster am Baykalsee.
Werchneudinsk . .	51, 49, 43	7, 1, 39, 1	105,24, 46	Selenga an d. Münd d. Udá
Selenginsk	51, 5, 54	6, 58, 12, 6	104,33, 9	Selenga bei d. Engl. Mission
Pogromnoi	52, 30, 15	7, 14, 50, 1	108,42, 31	Udá, Sauerquellen.
Kondinskoi	52, 19, 4	7, 19, 57, 8	109,59, 27	Quellen der Konda, die in Wittim fällt.
Tschitanskoi	52, 1, 17	7, 24, 22, 5	111, 5, 37	Ingodafluss.
Turinskoi	51, 37, 14	7, 26, 39, 8	111,39, 57	Ingodafluss.
Galkinskoi	51, 46, 29	7, 30, 55, 6	112,43, 54	Ingodafluss.
Nertschinsk		7, 36, 39, 1	114, 9, 46	Am Schilkaflusse.
Bergw. Nertschinsk	51, 18, 37	7, 49, 4, 4	117,16, 6	12 Werst vom Argunflusse.
Zuruchaitu	50, 23, 21	7, 46, 47, 8	116,41, 57	Argun } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
Argunskoi		7, 50, 22, 0	117,35, 30	— } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
Shoklanga	51, 50, 31	7, 52, 6, 6	118, 1, 39	— } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
Ustj-urow		7, 55, 10, 5	118,47, 37	— } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
12 Werst tiefer Urjupina	52, 48,47	7, 51, 46, 3	117,56, 35	— } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
18 Werst tiefer Schegdatschinsk	53, 16,53	7, 56, 42, 2	119,10, 33	— } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
Uststretensk	53, 19, 45	7, 57, 59, 4	119,29, 51	am Amur } Kosaken-Dörfer an der Chinesischen Gränze.
Fluss Umutna . . .		8, 2, 60, 6	120,45, 9	Amur.
5 Werst höher des Oldoiflusses . . .	53, 29,52	8, 4, 10, 3	121, 2, 34	Amur.

*) Für Possolsk fand sich die Breite den 1 April 1832 = 52°, 1′, 10″, 5
„ „ „ „ „ 28. August 1832 = 52, 1, 6, 9.

Name des Orts.	Breite.	Länge östlich von Paris.	Länge.	Anmerkungen.
80 Werst von Amur	53°, 30′, 5″	7h,54′,59″,3	118°,44′,50″	Schilka.
5 W. tief. d. Ljapinaß.	53, 27, 6	7, 53, 12, 7	118, 18, 10	Schilka.
30 Werst v. Gorbizkoi	53, 10, 3	7, 47, 25, 2	116, 51, 18	Schilka { grosser Quarzfelsen, nicht weit vom Flüsschen Woskressenskaja.
Gorbizkoi	53, 6, 6	7, 47, 10, 9	116, 47, 44	Schilka, Gränzfestung.
Schilkinskoi	52, 35, 15	7, 45, 23, 7	116, 20, 55	Schilkafluss, Glas-Fabrik.
Uptuitschenskoi . .	52, 20, 10	7, 43, 46, 9	115, 56, 43	— — Kirchdorf.
Stretensk	52, 14, 47	7, 41, 16, 5	115, 19, 7	— — — —
Abagaitujewskoi . .	49, 54, 38	7, 41, 57, 5	115, 29, 22	Argunfluss, Kar. an d. Gr.
Altagan	50, 28, 24	7, 39, 26, 5	114, 51, 38	Karaul.
Tschindant	50, 34,	7, 32, 43, 0	113, 10, 45	Gränzfestung am Onon.
Akschinsk	50, 15,	7, 24, 17, 3	111, 4, 20	— — — —
Mogoitujewskoi . .	50, 21, 21	7, 26, 37, 3	111, 39, 20	Gränzkaraul am Onon.
Altanskoi	49, 28,	7, 16, 35, 1	109, 8, 47	— — — —
Bukukunskoi	49, 26, 55	7, 14, 46, 6	108, 41, 39	Gränzkaraul am Flüsschen gleichen Namens.
Kirkunskoi	49, 20,	7, 13, 33, 1	108, 23, 16	Gränzpiquet am Fl. Kirkun.
Baldschikanskoi . .	49, 17, 15	7, 11, 57, 7	107, 59, 25	Gränzkaraul am Baldschü.
Mendshinsk	49, 25, 55	7, 6, 17, 6	106, 34, 24	Gränzk. an der Mendsja.
Chilkotoiska	49, 55, 28	7, 3, 50, 2	105, 57, 33	Dorf an d. Münd. d. Chilkotoi in die Nord-Katantsa.
Dshidinskoi	49, 58,	7, 3, 28, 3	105, 52, 5	Gränzkaraul am Tschikoy.
Kudarinsk	50, 12, 30	6, 59, 49, 3	104, 57, 20	2 Werst von Tschikoy, Gränzfestung.
Troizkosawsk . . .	50, 20, 57	6, 57, 36, 1	104, 24, 1	Gränzfestung bei Kjachta.
Charazaiska	50, 28, 53	6, 49, 33, 5	102, 23, 22	Gränzfestung an der Dshida.
Twaragowa	52, 9, 13	6, 56, 11, 5	104, 2, 52	Kirchdorf 5 Werst nach Süd vom Selengástrom.
Turkinskoi	52, 56, 46	7, 4, 14, 5	106, 3, 37	Dorf am Baykalsee.
Bargusinsk	53, 36, 45	7, 9, 46, 7	107, 26, 40	Stadt am Flusse Bargusin.
Küitung	54, 14, 42	7, 12, 55, 2	108, 13, 48	Burjaten Uluss, 10 W. v. Fl. auf seinem linken Ufer.
Udock	54, 30, 14	7, 13, 24, 0	108, 21, 0	Burjaten Uluss am Flusse.
*) Kultuck	51, 43, 31	6, 43, 16, 6	100, 49, 9	Dorf am Baykalsee.
Tunkinska	51, 45, 5	6, 33, 56, 2	98, 29, 3	Gränzfestung am Irkut.

*) Die Längenbestimmung in Kultuck ist wegen des schon oben erwähnten zweifelhaften Ganges des Chronometers zu dieser Zeit, unsicher.

Die relativen Längen gründen sich auf 12 absolut bestimmte, in denen allen die Zeitbestimmungen nie über 12 Tage von einander entfernt lagen. Die Länge vom Bergwerk Nertschinsk gehört zwar nicht zu den letztern, doch ist sie als solche benutzt worden; sie gründet sich nämlich auf die aus Zeitbestimmungen in Argunskoi sicher abgeleitete Länge der Festung *Zuruchaitujewskaja*, von der das Bergwerk aus zwei unabhängigen Bestimmungen abgeleitet, um 2′,17″,8 und 2′15″,5 (= 2′,16″,6) nach Osten liegt. Der Fehler der so angenommenen Länge kann aufs allerhöchste 10″ in Zeit betragen. Die Länge von Werchneudinsk ist die vom Herrn General von Tessleff durch Chronometerübertragung bestimmte; eine sehr sicher beobachtete Sternbedeckung an diesem Orte, konnte wegen Ermangelung einer correspondirenden Beobachtung bis jetzt noch nicht berechnet werden. Durch ihre Berichtigung werden die Orte *Selenginsk*, *Possolsk*, *Troizkosawsk* und *Charazaiska* Correctionen erhalten.

Zum Schlusse setze ich eine Vergleichungstafel zwischen den älteren und diesen neuen Bestimmungen, bei. $\Delta\varphi$ und ΔL bedeuten Correctionen, die zu den angesetzten φ und L anzubringen sind, um sie auf die neuen Werthe zu reduciren.

Name des Orts.	Breite φ	$\Delta\varphi$	Länge L	ΔL
Omsk	54°, 59′, 17″	+ 5″	70°, 59′, 25″	— 12′, 3″
Tomsk	56, 29, 26		82, 49, 36	— 12, 3
Krasnojarsk . . .	56, 1, 2	+ 3	90, 37, 31	— 7, 42
Possolsk	53, 2, 0	— 51		
Werchneudinsk .	51, 49, 15	+ 28	105, 24, 46	
Selenginsk	51, 6, 6	— 12	104, 18, 30	+ 14, 39
Nertschinsk . . .	51, 55, 34		114, 12, 21	— 2, 35
Bergw. Nertschinsk	51, 18, 27	+ 10	117, 0, 50	+ 15, 16
Uststretensk . . .	53, 19, 35	+ 10	118, 55, 31	+ 34, 20
Abagaitujewskoi .	49, 34, 20	+ 18	115, 46, 45	— 17, 23
Tschindant . . .	50, 34, 21		113, 2, 57	+ 7, 48
Troizkosawsk . .	50, 21, 25	— 28	104, 12, 16	+ 11, 45
Turkinskoi . . .	52, 59, 10		105, 47, 31	+ 16, 6
Bargusinsk	53, 36, 30	+ 15	107, 6, 23	+ 20, 17

Es kann freilich diesen Unterschieden ausser den Beobachtungsfehlern, auch noch eine Verschiedenheit der Beobachtungspunkte zum Grunde liegen; doch ist der Einfluss dieser letztern in den meisten Fällen gering, und lässt daher einen bedeutenderen Fehler in der Ortsbestimmung gleich in die Augen fallen, welches bei Längendifferenzen $\triangle \dot{L}$ hauptsächlich der Fall ist.

Magnetische Bestimmungen.

Die Bestimmung magnetischer Coordinaten in irgend einer Gegend hat fortdauernden Werth, insofern als sie nicht allein Aufschluss über Erscheinungen des Erdmagnetismus zur Zeit der Beobachtungen giebt, sondern auch durch Anknüpfung an spätere Bestimmungen, einen sicheren Maasstab der progressiven Bewegung der Pole darbietet, und endlich zur Grundlage von Theorien über die Ursache dieses Phaenomens dient.

Die hier betrachteten Beobachtungen beziehen sich auf eine Gegend, wo theils wie in der Mongolei in früheren Zeiten gar keine ähnlichen ausgeführt worden sind, theils in Süd-Ost-Sibirien, nur wenige zu Anfang vorigen Jahrhunderts ausgeführte Bestimmungen der Abweichung sich vorfinden. Die ganze Zone der Beobachtungen beträgt gegen 23 Längen- und 15 Breitengrade.

Die zuletzt beigesetzte Tafel enthält, nebst den berichtigten Werthen der geographischen Länge und Breite, die gesammten Bestimmungen der magnetischen Abweichung, Neigung und Intensität. Zur Reduction der ersten Grösse auf eine angenommene Epoche, legte ich bei der Construction der Karte halbjährige Beobachtungen in Pekin zu Grunde, welche eine Vergrösserung der westlichen Abweichung vom December bis Mai $= 16'$, bis Juni $= 10'$ ansetzen; für die übrigen Monate konnte die Aenderung mit einiger Sicherheit interpolirt werden. Da die Richtungen der magnetischen Meridiane, in dieser von mir besuchten Gegend, überhaupt von N nach S laufen, so ist es vorauszusetzen, dass dieses von mir angenommene Gesetz, betreffend die monatlichen Variationen, für alle meine Beobachtungsörter gelten, und von der Wahrheit nicht beträchtlich abweichen werde

Ueber das System westlicher Abweichungen der Magnetnadel in Asien.

Zur Bestimmung der magnetischen Abweichung brauchte ich durchgehends eine kleine Boussole mit einer Nadel von 5—6 Zoll Länge, in deren Mitte eine Kapsel aus Carneol, zum Aufsetzen auf eine Stahlspitze, angebracht war. Dazu gehörte noch ein Stativ, das genau in die Fugen des Passageninstruments passte, und auf dem die Boussole zwei feste Lagen, um 180° verschieden, erhalten konnte. Die Ablesungen geschahen am horizontalen Limbus des Statives vom Passageninstrument von 15′ Theilung, hatten also bis auf 1′ Genauigkeit. Die Boussole erhielt durch die obenbeschriebene Einrichtung einen doppelten Collimationsfehler, den einen gab der gläserne Kasten, den andern sein Stativ ab; die Richtung eines jeden der Nadelpole war daher wie immer durch vier Ablesungen angegeben.

Trotz der Kleinheit dieses Apparates hatte ich doch Gelegenheit, an ihm eine Genauigkeit zu bemerken, die wirklich überraschend ist. Die Hauptsache beim Manipuliren bestand darin, dass ich die Nadelspitzen vor jeder Ablesung mehrmals in den Meridian des Kastens einspielen liess, oder mich stets von ihrer freien Schwebung überzeugte. So erhielt ich während meines Aufenthaltes in Pekin folgende Resultate:

December 1830, Abw. { + 1°,38′ *)

Mai 1831, Abw. { + 1, 55
+ 1, 53

Juni 1831, Abw. { + 1, 48
+ 1, 47,5.

Resultate, die, verbunden mit den gleichzeitigen Beobachtungen über die Neigung der Magnetnadel, eine ganz richtige Ansicht von der Wirkung der monatlichen Bewegung des Magnetpols zu Pekin geben können, wie Kupffer im Bulletin scientifique N°. 3, Jahr 1831 gezeigt hat.

---

*) Jedesmal um sechs Uhr Abends, wo die Nadel im magnetischen Meridiane verweilt.

Die zufolge der reducirten Abweichungen entworfene Karte, leitete mich zu folgenden Resultaten über die Form des westlichen Abweichungssystems:

1) die Richtungen seiner Isogonen folgen hauptsächlich denen der terrestrischen Meridiane.

2) alle scheinen unter verschiedenen Breitengraden eine Wendung nach *SSO* zu haben, nachdem sie vorher *SSW* strichen: so fällt die Wendung der Linien —3°, —2° und —1° in die Breite 52°, die der Linien 0° und +1° über 45°, und die von + 2° + 3° + 4° und + 5° sehr zusammenstimmend ebenfalls in die Breite 52°.

3) nähern sich bei ihren Wendungen die letztbezeichneten Isogonen einander auf eine auffallende Weise, die Winkel der Wendungen werden am schärfsten, wodurch die Isogonen am bedeutendsten nach *S* und *N* hin divergiren; ferner beurkunden sie:

4) ein von der Isogone + 4° eingeschlossenes System abnehmender Abweichungen, welches sich unter dem von Erman berührten System zunehmender Abweichungen unter 55° Breite gelagert hat *). Wie weit es sich nach Süden erstreckt, ist unbekannt.

Dasselbe geschlossene System scheint Gmelin durchschnitten zu haben, da er vor Krasnojarsk in westliche Abweichungen trat, in Nishneudinsk ein Maximum erreichte, dann nach einer Abnahme in Irkutsk, Selenginsk und Kjachta das zweite Maximum in Nertschinsk beobachtete.

Ob nun die Nulllinie des hier betrachteten Asiatischen Systems westlicher Abweichungen wirklich in sich zusammenlaufe, oder sich mit der grossen Europäisch-Asiatischen Linie ohne Abweichung und in welcher Gestalt vereinige, zu einem wahrscheinlichen Schluss darüber können uns die, im Bereiche dieses Systems vorhandenen neueren und älteren Beobachtungen leiten.

---

*) Leider erlaubten mir während meines Aufenthaltes auf dem Amurstrome weder Zeit noch Vorsicht ein weiteres Befahren dieses Flusses, als bis zum 121° v. Paris; gerade in dieser Gegend musste jeder Schritt vorwärts viel zur Bestätigung dieses beitragen.

Was die erste Frage anbetrifft, so scheinen einerseits die von mir beobachteten Wendungen der Isogonen unter 52° Breite darauf hinzudeuten. Zwischen den Parallelen von Jakutsk und Pekin, betragen schon die Maxima der auf die Erdmeridiane senkrechten Ordinaten der Curven durchgängig mehr als 5 Längengrade.

Von der andern Seite sehen wir ferner die Linie des Ochotskischen Meeres eine Wendung nach West unter 50° Breite machen, und so dem westlichen Zweige wie entgegen kommen. Auch berechtigt uns zur Annahme einer Vereinigung der beiden Zweige die rückkehrende Gestaltung der Isogonen des westlichen Systems. Endlich, nähme man die Nulllinien von Kjachta identisch mit der von Nishni-Nowgorod an *), so müsste, da die Europäisch-Asiatische Linie zwei grosse Systeme, das östliche des Asiatischen Continents und das westliche des Südoceans, trennt, ein gewisser Uebergang von einem westlichen Systeme ins andere stattfinden, ein Uebergang, der unnatürlich und schwer zu begreifen wäre.

Eine Zusammenstellung der um den Aequator, zwischen den Meridianen 70° bis 120° von Ferro, in der letzten Zeit angestellten Beobachtungen, wird die oben angeführten Gründe noch mehr bestätigen, und eine nähere Einsicht in das Verhalten der beiden Asiatischen Systeme zu einander, darbieten.

In Hansteen's fragmentarischen Bemerkungen über die Veränderungen des Erdmagnetismus, (siehe Poggendorfs Annalen — Jahrg. 1831, 3. Stück) fanden sich für 1830 folgende Abweichungen im Indischen Meere und dem Chinesischen Archipelagus:

Cap Guardafui . .	+ 6°,20′	Macao	— 5°,40′?
Socotora	+ 4, 20	Manilla	— 0, 7
Goa	— 3, 50	Waygiou	— 1, 44
Cap Comorin . . .	— 3, 0	Bouro	— 0, 52
Ceylon, Punto de Calle	— 3, 8	Amboina	— 0, 51
Sumatra, Achen-Fort	— 3, 7	Hafen Dory	— 1, 36
Batavia	— 0, 42	Pistart	—10, 54.
Surabaja	— 0, 17		

*) D. h. liesse die vom Ochotskischen Meere als isolirter Zweig zum Südpole streichen.

Man ersieht daraus, dass der Reisende hier drei mal Linien ohne Abweichung und scheinbar zwei Systeme berührt; doch sind es eigentlich drei abgesonderte, für sich bestehende. Das erste ist das grosse westliche System des Südoceans, welches Rümker im Jahre 1821 besuchte; er hielt sich in den hier betrachteten Gegenden fast beständig unter 37°—40° südlicher Breite, und sah die Abweichung ungefähr bis zum Längengrade 150°, von 30° an, ihrem Maximum, abnehmen, und hier in eine östliche übergehen. Das andere, ein östliches, ist dasselbe, welches vom Sibirischen Nordpol her herabstreicht, und das dritte gehört dem Ost-Oceane an. Die erste Berührung einer Linie von 0° geschieht zwischen Guardafui und Goa, in der Länge 83° und Breite + 14°; dies ist die Linie, die vom Caspisee gerade südwärts herabstreicht; Goa, Gomorin, Punto de Calle und Achen-Fort liegen fast in derselben Isogone von — 3°, nun streicht man bei Surabaja in Java zum zweiten Male an dieser Linie vorbei, um sie zu verlassen, und bis Manilla hin wiederum das Asiatische östliche System, nur hier einen schmalen Zweig desselben zu durchschneiden; wo hier das Maximum und wie gross es ist, ist schwer zu bestimmen, da die beträchtliche Declination in Macao von fast — 6° *), einer zu gross angenommenen jährlichen Aenderung zugeschrieben werden kann. Diese erwähnte Linie 0° bei Manilla ist nun die vereinigte von Kjachta und dem Ochotskischen Meere; und da die Vereinigung unter diesen Breiten schon geschehen ist, so tritt man aus ihr unmittelbar ins östliche System des Ost-Oceans, wie die ferner angesetzten Oerter es zeigen; die Linie aber streicht Neu-Holland zu, um sich wahrscheinlich in unbekannter Breite mit dem grossen westlichen magnetischen Meridiane zu vereinigen. Durch diese Ansicht erhält das Asiatische östliche System die Form einer offenen Lilie mit kurzem gebogenen Stengel, und ähnelt im Ganzen, seiner Lage und äusseren Gestalt nach, dem Asiatischen Continente. Bemerkenswerth, dass, der Lage und inneren Form nach, hier gerade ein entgegengesetzter Fall, wie beim östlichen Systeme im Ost-Oceane, dessen Erman erwähnt, eintritt.

*) Wahrscheinlicher hat sie — 3° betragen.

Dort setzen diesem Systeme Gränzen zwei Isogonen der grössten Abweichung von —10°, die sich kreuzen, und ein, nach dem Mittelpunkte zu, abnehmendes System einschliessen; hier sind die kreuzenden Linien von 0° Abweichung, und begränzen ein System zum Pole hin zunehmender Abweichungen; die Richtung der spitzen Ecke der ersten geht nach Nord, die der anderen nach Süd.

Die eben geführte Untersuchung hat erwiesen, dass: 1) die Linie, die das System von Irkutsk, Nertschinsk und Pekin in sich schliesst, wirklich zusammenlaufe, und nachdem sie ihren Lauf nach Süden fortgesetzt, sich 2) mit der Europäisch-Asiatischen Linie 0° in oder unter Neu-Holland vereinige. Eine Zusammenstellung älterer Beobachtungen, wird Aufschlüsse über die Aenderungen der Formen des Systems und ihre damaligen Verhältnisse gegeneinander geben, auch überdem die Richtigkeit dieser Ansicht bekräftigen.

Gmelin fand 1735 zu Nertschinsk die Abweichung + 3°, ich fand sie 1832 eben so gross; man ersieht aber leicht, dass dies die Folge des Durchgangs zweier verschiedener Zweige der Isogone + 3° durch Nertschinsk ist; die Apertur dieser Zweige betrug damals wie jetzt 17°—20°, um so viel hatte sich also das System unter dieser Breite in 97 Jahren nach Osten bewegt; der Zweig, der jetzt durch Nertschinsk geht, muss identisch mit dem, der vor so vielen Jahren durch Nishneudinsk ging, seyn.

Eine gleich grosse Progression zeigt Hansteen durch die Beobachtungen la Peyrouse's im Jahre 1787 an den Küsten Korea's; sie beträgt nämlich für 43 Jahre weniger als 10°. Weit langsamer erscheint sie uns am Scheitel des Systems in den Breiten von Jakutsk.

Werfen wir nun rückwärts einen Blick auf den südlichsten Theil des Systems im Chinesischen Archipelagus unter'm Aequator, in verschiedenen älteren Epochen.

Das Jahr 1800 stellt schon merkliche Anomalien dar. Man sieht die Linie vom Caspisee hart an den Küsten Hindostans, der Insel Ceylon und bei Sumatra streichen, dann geht sie durch Batavia und über Surabaja hinweg, nnd läuft südwärts hin zur Vereinigung mit der östlichen Linie.

(Liesse man sie durch Amboina nach Manilla streichen, so wäre dies den Beobachtungen ebenso entsprechend; doch ist die Hypothese, dass diese Linie dem Südpole zu strebe, gewiss richtig; überdem hat, wie oben gezeigt worden, Rümker in neueren Zeiten dieselbe unter Neu-Holland durchschnitten).

Weiter sieht man wiederum bei Manilla die Abweichung verschwinden, Macao im östlichen Asiatischen Systeme liegen, und es steigen die fast vereinigten Linien von Kjachta und dem Ochotzkischen Meere, zu Amboina hinab, wo schon ein sehr schmales westliches System sich beurkundet.

Das Jahr 1750 zeigt uns die Europäisch-Asiatische Linie 0° durch Hindostan fast längs Sumatra schweifend, sie geht nahe bei Batavia vorbei, und lässt Surabaja tief unter sich, so dass die erwähnte Vereinigung schon über Neu-Holland geschehen konnte; ferner streicht die Linie von Kjachta noch fortwährend bei Manilla vorbei, doch hat schon Macao eine westliche Abweichung; die südwärts um den Aequator gelegene Gegend zeigt nun entschieden einen schmalen Streifen westlicher Abweichungen zwischen zwei östlichen Systemen belegen. Verfolgt man diese Betrachtungen weiter, so wird man stets ein westliches System dem Asiatischen Festlande zuvordringen, durch Manilla und den 150sten Längengrad von Ferro unterm Aequator immer zwei Linien ohne Abweichung (die von Kjachta und dem Ochotskischen Meere) durchgehen, und den Streifen des westlichen Systems gradatim zunehmen sehen.

Diese Betrachtungen leiten zu folgenden Schlüssen: die Längenaxe des westlichen Systems hat sich seit dem 17. Jahrhundert, oder seitdem die Phänomene des Erdmagnetismus beobachtet werden, unter dem Festlande Asiens in ihrer Lage und Richtung völlig unbeweglich gehalten. Es offenbart sich ein Schwinden des Systems, doch nur seines südlichen Theiles: ein schmaler Streifen westlicher Abweichungen, der sonst im Chinesischen Meere und Archipelagus bemerkbar war, ist jetzt ganz verschwunden; da hingegen der durch den Parallel von Nertschinsk gehende Theil seine Form seit den letzten hundert Jahren nicht sichtbar geändert hat. Wie dort mit der grössten Formenänderung die geringste Aenderung der Lage, so ist hier umgekehrt die geringste Formenänderung mit der stärksten

Progressiv-Bewegung verbunden. So wie dies System mit der Zeit abnahm, verbreitete sich das benachbarte östliche immer mehr nach Süden; dies zeigt uns die anfänglich längs den West- und Südküsten des Asiatischen Festlandes streichende, zuletzt ins Indische Meer hinabgestiegene Linie des Caspisees.

Es ist schwierig, sich eine Rechenschaft von der Gestaltung in kommenden Zeiten dieses kleinen, doch in vieler Hinsicht merkwürdigen Gebietes westlicher Abweichungen zu geben. Hansteens Hypothese eines völligen Verschwindens, gründet sich auf Analogie; doch dieselbe Analogie gestattet nicht ihre Annahme, denn seitdem dieses System beobachtet worden, hat sich in seiner kleinen Axe oder in der grössten Apertur unter 50° Grad Breite keine Verkürzung oder Verengung geäussert: die Linie ohne Abweichung stand zu Anfang des vorigen Jahrhunderts von der Isogone + 3° eben so weit ab wie jetzt, um etwas geringeres als 10° entfernt, beide haben sich um gleiche Anzahl Grade ostwärts bewegt.

Sehr wünschenswerth ist es, dass spätere Beobachter es nicht unterlassen, diese Gegenden zu durchforschen; für jetzt könnten Beobachtungen in Süd-Ost-China und im Parallele unter Neu-Holland angestellt, einigen Aufschluss über das hier Vorgetragene ertheilen.

Beobachtung stündlicher Variationen in Pekin.

Bald nachdem die Ausführung der allgemeinen correspondirenden Beobachtungen der stündlichen Variationen der Magnetnadel in Gang getreten war, begannen auch an diesem Orte regelmässige Versuche darüber mit der Abweichungsnadel.

Zu diesem Behufe wurde zu Ende des Jahres 1830 im Hôtel der Kaiserlich-Russischen Mission mit möglichster Zweckmässigkeit ein magnetisches Pavillon errichtet, und das Gambey'sche Declinatorium zum zehnjährigen Gebrauche demselben übergeben. Der Ort ist sehr günstig, das Hôtel ist nach Chinesischer Bauart allerseits von hohen Steinmauern umgeben, und enthält in sich fast gar kein Eisen. Damit der Beobachter zugleich Bestimmungen der Abweichung von Zeit zu Zeit auszuführen im Stande wäre, wurde an einer mehr abgelegenen Mauer eine feste Marke

zur Auffindung des Meridians errichtet. Ausser den von mir angestellten Variations-Beobachtungen im December 1830 und im März 1831, theile ich zugleich die mir von dem Beobachter Herrn Markscheider Kowanjko zugesandten, denselben Monaten des Jahres 1831 und 1832 gehörigen Variationen, mit.

	December 1830. + westlich — östlich vom Nordmeridian.				December 1831. + westlich — östlich vom Nordmeridian.				Mittel aus 4 Tagen.		März 1830 + westlich — östlich vom Nordmeridian.				März 1831 + westlich — östlich vom Nordmeridian.				Mittel aus 4 Tagen.
4′	$\frac{9}{21}$	± 0′,0″	$\frac{10}{22}$	— 0′,46″	$\frac{9}{21}$	— 0′,33″	$\frac{10}{22}$	+ 0′,17″	— 0′,15″	4^h	$\frac{8}{20}$	+ 1′, 7″	$\frac{9}{21}$		$\frac{8}{20}$	— 0′,40″	$\frac{9}{21}$	+ 0′,28″	+ 0′,18″
5		± 0, 0		— 0, 6		— 0, 18		+ 0, 17	— 0, 2	5		+ 2, 32				— 1, 50		— 0, 12	+ 0, 10
6		— 0, 10		+ 0, 40		+ 0, 7		+ 0, 42	+ 0, 20	6		+ 1, 32		— 0′,40″		+ 1, 40		+ 0, 3	+ 0, 39
7		— 0, 34		+ 0, 24		+ 0, 7		+ 0, 42	+ 0, 10	7		+ 1, 7		± 0, 0		+ 1, 4		+ 0, 3	+ 0, 35
8				— 1, 6		— 1, 33		+ 0, 42	— 0, 39	8		— 0, 33		— 2, 0		— 1, 20		— 0, 52	— 1, 11
9		— 0, 44		— 0, 56		— 2, 35		+ 0, 12	— 1, 0	9		— 1, 23		— 2, 40		— 2, 40		— 2, 52	— 2, 24
10		— 1, 20		— 0, 50		— 2, 33		— 0, 53	— 1, 24	10		— 0, 33		— 2, 50		— 2, 40		— 2, 52	— 2, 14
11		+ 1, 10		± 0, 0		— 2, 18		— 0, 53	— 0, 30	11		+ 0, 32				— 1, 0		+ 1, 27	+ 0, 20
12		+ 3, 10		+ 3, 20		— 2, 48		+ 0, 52	+ 1, 8	12		+ 0, 37		+ 3, 0		+ 0, 10		+ 0, 43	+ 1, 7
1		+ 1, 40		+ 2, 20		+ 1, 27		+ 1, 7	+ 1, 38	1		+ 1, 42		+ 3, 20		+ 2, 10		+ 2, 38	+ 2, 27
2		+ 1, 0		+ 1, 34		+ 1, 37		+ 0, 47	+ 1, 14	2		+ 2, 7		+ 2, 45		+ 3, 0		+ 3, 3	+ 2, 44
3		— 0, 10		+ 1, 10		+ 1, 37		+ 0, 7	+ 0, 41	3		+ 1, 27		+ 1, 50		+ 2, 50			+ 2, 2
4		— 0, 50		+ 0, 10		+ 0, 7		— 0, 38	— 0, 18	4		+ 1, 7		+ 0, 40		+ 1, 50		+ 0, 40	+ 1, 4
5		+ 0, 10		+ 0, 4		+ 0, 7		— 0, 58	— 0, 9	5		+ 0, 22		— 0, 15		+ 0, 40		— 0, 12	+ 0, 12
6				± 0, 0		+ 0, 37		— 0, 58	— 0, 7	6		— 1, 3		+ 0, 5		+ 0, 40		— 0, 12	— 0, 8
7		— 0, 50		+ 0, 14		+ 0, 52		— 1, 8	— 0, 13	7		— 1, 18		— 0, 45		+ 0, 24		— 0, 12	— 0, 28
8				± 0, 0		+ 0, 37		— 1, 8	— 0, 10	8		— 0, 8		— 1, 45		+ 0, 24		— 0, 2	— 0, 22
9		— 0, 40		+ 1, 4		+ 0, 57		+ 0, 12	+ 0, 18	9				— 2, 0		+ 0, 24		+ 0, 18	— 0, 26
10		— 0, 34		+ 1, 0		+ 0, 57		+ 0, 7	+ 0, 17	10				— 0, 50		+ 0, 9		+ 0, 18	— 0, 8
11		— 0, 50				+ 0, 57			— 0, 6	11		— 1, 33		+ 0, 20		+ 0, 9		+ 0, 18	— 0, 11
12	$\frac{10}{22}$	— 0, 54	$\frac{11}{23}$	+ 0, 20	$\frac{10}{22}$	+ 0, 57	$\frac{11}{23}$		+ 0, 1	12	$\frac{9}{21}$	— 1, 28	$\frac{10}{22}$	— 0, 30	$\frac{9}{21}$	— 1, 16	$\frac{10}{22}$	+ 0, 33	— 0, 40
1		— 0, 54		— 1, 36		+ 0, 47			— 0, 34	1		— 2, 23		— 1, 35		— 2, 16		+ 0, 33	— 1, 25
2				— 2, 41		+ 0, 37		+ 0, 17	— 0, 36	2				— 1, 10		— 2, 11		— 0, 12	— 1, 11
3				— 2, 21		+ 0, 37			— 0, 52	3				— 1, 25		— 0, 36		— 0, 7	— 0, 43
4				— 0, 46		+ 0, 47		+ 0, 42	+ 0, 14	4				— 1, 10		+ 0, 24		— 0, 7	— 0, 18

Aus der Betrachtung dieser Tafel ergeben sich folgende Schlüsse: die Abweichungsnadel erreicht zuerst ihren östlichsten Stand im Laufe eines Tages von 9—10 Uhr Morgens; er beträgt im Mittel aus 4 Tagen im December —1′, 24″, im März — 2′, 24″; darauf geht sie ungefähr um 11 Uhr Morgens durch den mittleren magnetischen Meridian, und die Abweichung wird westlich; erreicht ihr Maximum zwischen 1—2 Uhr Nachmittags von + 1′, 38″ für's Wintersolstitium, und +2′,44″ fürs Frühlingsaequinoctium, und verschwindet wieder nach 4 Uhr; worauf ein unbestimmtes Schwanken um den Meridian, doch vornehmlich mit östlicher Abweichung eintrifft, und nach 1 Uhr Morgens den grössten östlichen Stand zu erlangen scheint, darnach folgen bis 9 Uhr Morgens wiederum unbestimmte Schwankungen.

Die Angabe der Maxima und Minima beurkunden: 1) eine diesen Gegenden entsprechende, relativ sehr geringe Oscillation der Abweichungsnadel, 2) eine mehr als doppelte Zunahme dieser Oscillation zum Sommersolstitium hin.

Nach Vergleichung dieser Beobachtungen mit denen in St. Petersburg um dieselbe Zeit ausgeführten, fand Kupffer seine Voraussetzung bestätigt, dass nämlich plötzliche unregelmässige Abneigungen absolut zur selben Zeit geschähen, und zwar mit entgegengesetzten Zeichen an Orten, wo die jährlichen Variationen verschiedene Richtungen haben.

Neigung der Magnetnadel.

Zur Anstellung von Versuchen über die Inclination der Magnetnadel, war ich mit einem vortrefflichen Instrumente von Gambey versehen, das von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften namentlich zu dieser Expedition war verschrieben worden. Dieses brauchte ich auch fast durchgängig, bis vor das Bergwerk Nertschinsk, wo der Bruch einer der Schrauben, die die Stützsäulen am Vernierbrette halten, es in einen Zustand versetzte, der es unbrauchbar machte. Durch die Gefälligkeit des Oberaufsehers jener Bergwerke, Herrn Tatarinoff, erhielt ich nun zum ferneren Gebrauch ein in Kolpina bei Petersburg gearbeitetes mittelmässiges Instrument, dasselbe, welches früher dem Herrn Baron v. Schilling gehörte, und jetzt im

Bergwerke deponirt ist. Den folgenden Beobachtungen muss man daher nicht denselben Werth beilegen, wie den früheren.

Obschon die beiden Nadeln, wie aus der Tafel zu ersehen ist, sowohl nach Vergleichung untereinander, als auch der doppelten Methoden, immer sehr zustimmende Resultate gaben, so stellte ich dennoch, nachdem Statif und Kreis wieder in Stand gesetzt worden waren, an beiden Nadeln neue Versuche mit Anbringung eines Gewichts an der Axe, an. Die Beobachtungen standen folgendermaassen:

Directe Methode.				*Mit dem Gewicht.*			
Nadel *A.*		Nadel *B.*		Nadel *A.*		Nadel *B.*	
210°,41′,	30°,41′,	210°,41′,	30°,41′,	210°,41′,	30°,41′,	210°,41′	30°,41′
70,54,0	71,26,0	71,33,0	70,31,0	33,56,0	56, 8,0	41,11,5	62,58,25
71, 3,75	71,30,0	70,11,5	71,55,0	56,36,0	34,25,5	63,18,0	41,35,5
70,58,5	71,23,2	71,29,25	70,58,0	45,50,5	69,51,75	30,14,0	47, 3,0
71, 6,0	71,16,0	70,34,25	71,54,0	70,14,5	46,23,0	47,23,5	30,47,7
Neigung 71,12,17;		Neigung 71, 8,25;		Neigung 71,15,35;		Neigung 71, 8,28.	
Mittel 71°,10′, 2.				Mittel 71°,11′, 8.			

Jede der Angaben ist das Mittel aus den beiden Nadelenden. Es geht also auch hieraus die Bestätigung der Güte der Nadeln, die jede Reduction entbehrlich macht, hervor.

Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus.

Die Beobachtungen am Schwingungsapparate, theilen sich, der doppelten Reise in den Jahren 1830, 1831 und 1832 nach, in zwei von einander unabhängige Reihenfolgen.

Die erste begreift in sich die von Irkutsk südwärts streichende Region bis Pekin, die andere, jenes ostwärts gelegene Land bis zum Amurstrome; beide schliessen sich den von Hansteen und Erman, westlich und nördlich ausgeführten Beobachtungen, über magnetische Intensität, an, und können zur genaueren Berichtigung und speciellen Ansicht der in Hansteen's Karte hypothetisch angenommenen, diesen Gegenden entsprechenden isodynamischen Linien, dienen.

Wie schon erwähnt worden ist, benutzte ich vorzugsweise zwei der Cylinder, die zum Unterscheiden mit N°. 3 und N°. 6 bezeichnet werden mögen.

N°. 3 wurde im Jahre 1830 auf der Hinreise, der andere auf der Rückreise aus Pekin, so wie während der Sibirischen Expedition, gebraucht. Zur Beobachtung der Schwingungsdauer, wurde fast durchgängig ein einzelner Faden ungedrehter Seide angewandt, mit Ausnahme einer 8° breiten Zone in der Mongolei während der Hinreise, wo der Cylinder an mehreren Faden hing; doch gebrauchte ich die Vorsicht sowohl zu Anfang als zu Ende, ehe der Faden gewechselt wurde, die Schwingungsdauer zu vergleichen, und fand in Stepnaja am Baykalsee dieselbe,

mit einzelnem Faden auf 0° reducirt $= 712'',1$
mit mehreren Fäden . . . . . . $= 708, 7.$

Reduction auf den einzelnen Faden $= + 3'', 4.$

In Batchay, einer Station unter der Breite 44°, 21′,

mit mehrfachen Fäden auf 0° reducirt $= 639'',0$
mit einzelnem Faden . . . . . . $= 642, 1.$

Reduction auf den einzelnen Faden $= + 3'', 1.$ Mittel $+ 3'', 25.$

Ausser dieser speciellen Correction erhält jede beobachtete Schwingungsdauer noch drei andere, entspringend aus: 1) einer Excentricität des Secundenzeigers am gebrauchten Chronometer, 2) aus der Temperatur der Nadel und 3) aus der Abnahme ihrer magnetischen Kraft.

Nachdem der Fehler der Excentricität an alle Beobachtungen angebracht war, berechnete ich die reducirten Schwingungszeiten N nach den Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}\text{für N}^\circ.\ 3:\ N = n \pm x\cdot(0{,}2885) \pm d\cdot(0{,}057)\\ \text{für N}^\circ.\ 6:\ N = n \pm x\cdot(0{,}2509) \pm d\cdot(0{,}055)\end{array}\right\}\ \text{für die Mongolei;}$$

wenn x die Anzahl der Grade des Reaumurschen Thermometers und d die Anzahl der, vom Beobachtungstage bis zur angenommenen Epoche verflossenen Tage, bedeutet. Die oberen Zeichen gelten für x unter dem Gefrierpunkte und einer späteren Epoche, die unteren umgekehrt.

Für Ost-Sibirien wurde die Formel

$$\text{für N}^\circ.\ 6\ \ N = n \pm x\ (0{,}2509) \pm d\cdot(0{,}096)\ \text{angewandt.}$$

Der Coefficient von x ergab sich durch Vergleichung der Schwingungszeiten, die bei möglichst verschiedenen Temperaturen beobachtet wurden. Der Apparat zu diesen Versuchen bestand aus einem Glascylinder mit zwei inwendig angebrachten Thermometern; die Erhitzung der Luft geschah vermittelst einer unter ihm befindlichen Lampe, über der oberen Metallplatte befand sich eine Vorrichtung zum Aufhängen des Fadens. Aus diesen Versuchen ergaben sich: für N°. 3, deren Schwingungsdauer in Petersburg $= 2'',854$ ist, für 28°, 60 R. Abnahme der magnetischen Kraft — 8'', 25, und für N°. 6, deren Schwingungsdauer $= 2'',759$ beträgt, für 32°, 05 R Abnahme der Kraft — 8'', 04. In wie weit sich diese Abnahme an jedem der Cylinder mit Verminderung der Intensität des Orts verändere, darüber fehlen mir die Data; doch wird, da die Abnahme vornehmlich von der Intensität des Cylinders abhängig ist, diese Veränderung keinen bedeutenden Einfluss auf das Resultat äussern.

Nachdem die Temperaturcorrection angebracht worden war, konnte der Coefficient von d ausgemittelt werden. Er ergab sich aus der Verminderung der Intensität, die für die erste Reise aus den angestellten Beobachtungen in Pekin für 186 Tage an N°. 3 $= 10'',7$; für 184 Tage an N°. 6 $= 10'',0$ gefunden wurde. Die Regelmässigkeit dieser Verminderung der Intensität der beiden Nadeln bestätigt sich durch die beiden sehr nahe zusammenstimmenden Werthe der Intensität des Erdmagnetismus in Pekin, welche unabhängig von einander aus den beiden Reihenfolgen der Beobachtungen der Hin- und Rückreise abgeleitet wurden.

Zum Beziehungspuncte für alle Oerter dieser Reise benutzte ich die Station *Baingol* zwischen Urga und Kjachta, wo beide Male sichere, keinem Zweifel unterworfene Beobachtungen ausgeführt wurden; für jeden Ort wurde also die Intensität $I' = I$ (Baingol) $\times x$. Für Pekin gab die erste Reihe aus N°. 3, $I' = I \times 0,8915$; die zweite aus N°. 6, $I' = I \times 0,8916$; und da I, Kjachta zum Fundamentalorte mit der Hansteenschen Bestimmung der Intensität $= 1,6422$ angenommen, sich $= 1,6303$ fand, ergab sich die Intensität zu Pekin $= 1,4535$ (N°. 3) und 1,4536

(N°. 6). Die Lage der Isodyname dieses Orts ist nach Hansteens Karte um ungefähr 0,01 zu gross angenommen.

Für Sibirien erhielt ich eine sichere Bestimmung des Coefficients von d aus den Beobachtungen in Possolsk am Baykalsee. Die tägliche Aenderung, abgleitet aus 150 Tagen, war $= 0'', 099$; eine andere Bestimmung aus 51 Tagen im Bergwerke Nertschinsk, und 48 Tagen im Zollorte Zuruchaitu, setzt diese Aenderung zu $0'',093$ an, Mittel $= 0'', 096$. Hier bestätigt sich dieser Werth aus der Identität verschiedener Resultate, welche ebenfalls zweien von einander unabhängigen Reihenfolgen der Beobachtungsörter zwischen Possolsk und Uststretensk am Amurstrome angehören, wobei die zuverlässigen Beobachtungen der Schwingungsdauer und Neigung in Possolsk als Beziehungsgrössen angewandt wurden. Die Intensität von Possolsk, jene von Irkutsk $= 1,6466$ (nach Hansteen) zu Grunde gelegt, ergab sich $= 1,6531$, und daraus für die erste Reihenfolge: *Bergwerk Nertschinsk* = 1,6149 (5 Mai),
Zuruchaitu . . . = 1,6259 (10 Mai),
Uststretensk . . . = 1,6554 (25 Mai);
für die zweite Reihenfolge: *Bergwerk Nertschinsk* = 1,6186 (25 Juni),
Zuruchaitu . . . = 1,6254 (27 Juni),
Uststretensk . . . = 1,6598 (3 Juni).

Ich erlaube mir noch einige Bemerkungen in Bezug der Berechnungsart, die angewandt wurde.

Ein Verfahren der fortschreitenden Beziehung eines jeden Orts auf den vorangehenden, ist keinesweges rathsam, da man dadurch bei den oft ganz unbekannt bleibenden, ungünstig auf die Beobachtung einwirkenden Umständen, durch eine einzige falsche Annahme, in constante Fehler für die ganze Reihenfolge verfallen würde.

Die Beziehung der Beobachtungen auf eine angenommene Epoche, hat ebenfalls bei Berechnung der Intensität etwas willkührliches: die Intensitäten erweisen sich zu klein, wenn man eine spätere, zu gross, wenn man eine frühere Epoche zur Reduction wählt, und der daraus entspringende Fehler kann um so bedeutender wer-

den, je grösser die Abnahme der magnetischen Kraft der Nadel, oder die Zeitperiode der Beobachtungen ist. So z. B. ist für eine tägliche Abnahme $= 0'', 055$ und für $d = 78$ schon die Differenz, die aus Verschiedenheit der angenommenen Epochen um d Tage, in Bestimmung der Intensität von Pekin entspringt $= 0{,}0015 \times 1{,}63 = 0{,}0024$, kein zu vernachlässigender Fehler.

Dieser Inconsequenz abzuhelfen, bildete ich mir zur Berechnung der relativen Intensität je zweier Oerter den Quotienten $\frac{2N' \mp dk}{2N \pm dk}$, wo N', N, die respective Schwingungsdauer und k den Coefficienten der Anzahl Tage d bedeuten.

Dass dieses Verfahren richtig war, nämlich, dass für den Zwischenraum zweier beliebiger Punkte das Mittel der Ergebnisse aus der Annahme der beiden äussersten Beobachtungstage zu Epochen, den wahren Werth der Intensität gebe, wird folgende Betrachtung bestätigen.

Bekanntlich setzen zwei Nadeln von verschiedener Intensität an denselben zwei Punkten beobachtet die Gleichung $\frac{N'^2}{N^2} = \frac{N'^2_,}{N^2_,}$ voraus, oder $\frac{N + dN}{N} = \frac{N_, + dN_,}{N_,}$; daraus folgt, dass $dN_, = \frac{N_,}{N}\, dN$ sey, d. h. der Unterschied der Schwingungsdauer an zwei Orten, steht mit der Intensität der Nadeln im umgekehrten Verhältnisse.

Nun sey an zwei Orten eine Nadel, deren Intensität der Zeit proportional abnehme, beobachtet worden, und man stelle sich vor, es wären zwei Nadeln, eine stärkere und eine schwächere gebraucht worden; heissen dann nach Reduction auf beide Beobachtungstage, N, $N + dk$, und $N' - dk$, N', die Schwingungsdauer der stärkeren und schwächeren Nadel am ersten und zweiten Orte, so wird nach obigem Satze nahezu $\frac{N' - dk}{N} = \frac{N'}{N + dk}$.

Wäre diese Gleichung genau richtig, so müsste für den ersten Theil $dN = (N' - N - dk)\,\frac{N + dk}{N}$, für den zweiten $dN' = (N' - N - dk)\,\frac{N}{N + dk}$ seyn; nun fällt dN zu gross und dN' zu klein aus. Es werden aber ihre richtigen Werthe, jeder der beiden Nadeln entsprechend und genügend, gefunden, wenn das Mittel zwischen $(N' - N - dk)$ und jenen hypothetischen Werthen genommen wird, also,

dass $dN = (N' - (N + dk)) \frac{2N + dk}{2N}$ und $dN' = (N' - (N + dk) \frac{2N + dk}{2(N + dk)}$, wodurch allein der Bedingungsgleichung $dN = \frac{N}{N_{\prime}} dN_{\prime}$, Genüge geleistet wird. Darnach verwandeln sich beide Intensitätsquotienten in: $1 + \frac{2N + dk}{2N(N + dk)}$ $(N' - (N + dk))$, was sich auf $\frac{N' - dk}{2N} + \frac{N'}{2(N + dk)}$ reduciren lässt; nämlich auf das Mittel der auf beide Beobachtungstage reducirten Intensitätsquotienten, wofür man, um die Rechnung abzukürzen, in diesem Falle immer berechtigt seyn wird $\frac{2N' - dk}{2N + dk}$ zu substituiren.

Es wird bei diesem Verfahren hauptsächlich erfordert, dass die zu Grunde gelegte Beobachtung vollkommenes Zutrauen verdiene; dann auch, dass die Intensität ihres Ortes sich mit Sicherheit ableiten lassen könne; es ist nämlich gut, wenn dieser Ort nicht entfernt von dem ihm zu Grunde gelegten, dessen Intensität als bekannt vorausgesetzt wird, sich befindet.

Ein Blick auf die Karte giebt folgende Auskunft über die Gestaltung der Isoklinischen und Isodynamischen Linien dieser Zone. Die ersten laufen untereinander parallel von WSW nach ONO unter einem Winkel von 8 — 9° gegen die Parallelkreise geneigt; die Neigungen scheinen also ihren Culminationspunkt, d. h. ihre Maxima für die Breite ungefähr um den 100sten Grad von Paris östlich erreicht zu haben. Ein Grad der Neigung entspricht sehr nahe einem Breitengrade. Die anderen scheinen im allgemeinen zwischen dem 105ten und dem 110ten Grad östlich von Paris ihren Culminationspunkt zu haben, was sich besonders aus der Betrachtung der Linien 1,66, 1,64 und 1,58 offenbart. Speciell beurkunden die südlicher beobachteten Intensitäten von 1,60 bis 1,45 Isodynamen, die zuerst in der Richtung von NW. nach SO. herabstreichen, dann um den 110ten Grad diese Richtung plötzlich ändernd, eine von SW. nach NO. annehmen; dazu giebt sowohl die Linie 1,60, als auch 1,58 einen sichtbaren Beleg.

Magnetische Coordinaten in Russland, Sibirien und Nord-China in den Jahren 1830 und 1831.

Name des Orts.	Länge von Paris.	Breite nördlich.	Abweichung + westlich — östlich.	Nadel	Neigung.	Intensität	Anmerkungen.
							(Neuer Styl.)
Stat. vor Wladimir	38°,4′,9	56°,7′,6		*A*	68°, 7′, 7		11. Juni 1830.
Nishny-Nowgorod	41,40,6	56,19,7	−0°,8′,32″				14. — — } an der Wolga
Kasan	46,47,7	55,47,8		*A*} *B*}	68, 25,5 68, 25,9		18. — — } an der Wolga
Perm	54, 6,3	58, 1,2		*B*	69,54,1		22. — Magn. Obs.
Jekaterinburg .	58,14,40	56,50,2		*A*	69,18,6		26. — —
Tjumen	62,47,5	57, 4,0		*B*	70, 2,3		28. — —
Tobolsk	65,45,7	58,11,7	−11,52,24	*A*} *B*}	70, 58, 2 71, 3, 4		{Neig. d. 29. Juni} {Abw. d. 30. — } In der Fest.
Omsk	70,47,4	54,59,4			68,58,1		d. 4. Juli, 58 Schr. n. NW. v. d. Tartaren Moschée.
Wariuchina . .				*B*	70,42,8		d. 10. Juli (Station).
Tomsk	82,37,5	56,29,4		*A*	70,51,3		11. — am Uf. d. Tom.
Irkutzk	101,56,0	52,17,3	—1,25,22	*A*} *B*}	68, 15,0 68, 15,4	1, 6466	{Neig. d. 29. Juli u. 2. Aug. {Abw. d. 6. August (wo Hansteen.)
Listwinischnoi	102,10,0	51,54,0		*B*	67,58,1	1, 6404	D. 18. Aug. am Baikalsee.
Stepnoi	103,59,9	52,10,4	—1, 8,26	*A*	68,10,5	1, 6631	{N. d. 22. Aug.} {A. d. 24. Aug.} Münd. d. Selenga
Kolessowaja . .	104,11,6	52, 6,8		*B*	68, 9,6	1, 6659	D. 29. Aug. (a. Selengafl.)
Baingol *) . . .	103, 3,0	48,52,0		*A*	65,14,2	1, 6303	Den 19. September 1830.
Chunzal	104, 6,0	48,13,0	—1, 6, 0	*B*	64,29,42	1, 6122	{Neig. den 23. September {Abw. den 25. September
Urgá	104,21,0	47,55,5		*A*} *B*}	64, 3, 2 64, 2, 5	1, 5826	Den 29. Sept.
Nalaicha	104,57,4	47,47,0		*A*	63,38,9	1, 5910	Den 3. October
Giltegentai . . .	106,24,9	46,54,0		*B*	63,12,5	1, 5943	— 7. —
Schibétu	107,17,2	46,29,0		*B*	62,34,05	1, 6088	— 12. —
Zsulgétu	107,49,1	46,16,0		*A*	62,38,2	1, 5654	— 15. —
Chologur	108,13,0	45,59,7	+ 0,48, 7	*B*	61,54,12	1, 5801	{Neig. den 18. October {Abw. den 17. —
Durbanderetu .	108,52,8	45,48,0		*A*	61,46,5	1, 5842	Den 21. October
Ergi . , ...	109, 4,1	45,31,7	+ 1, 7, 5	*B*	61,22,35	1, 5590	{Neig. den 24. October {Abw. den 23. —

*) Die Mehrzahl der folgenden Längen und Breiten in der Mongolei, ist ein Resultat der Verbindung meiner Bestimmungen mit denen der Marschroute von *Timkowsky*.

Anmerkung der Redaction. Die verbesserten geographischen Längen der Oerter in der Mongolei, sind in dieser Tabelle, nach einem vom Hrn. Verfasser, während des Druckes dieser Abhandlung eingesandten Note angesetzt; in den beifolgenden magnetischen Karten, konnten aber diese Verbesserungen, wegen der Abwesenheit des Hrn. Verfassers von St. Petersburg, nicht vorgenommen werden.

Name des Orts.	Länge von Paris.	Breite nördlich.	Abweichung + westlich — östlich.	Nadel	Neigung.	Intensität	Anmerkungen.
							(Neuer Styl.)
Charatuin Sudshi	109°,45′,0	44°,50′,0		*A*	61°,3′,05	1, 5788	Den 27. October.
Batchay	110,33,9	44,20,9	+0°,58′,6	*B*	60,18,22	1, 5532	Neig. den 29. October. Abw. den 30. —
Kulchuduck . .	111,30,7	43,29,0		*B*	59,14,15	1, 5385	Den 3. November.
Scharabudurguna	111,45,5	43,13,5	+ 0,46, 1	*A*	59, 2,8	1, 5377	Neig. den 5. November. Abw. den 5. — —
Zackildack . . .	111,55,7	42,48,0		*A*	58,25,0	1, 5130	Den 8. November.
Zsamein-ussu .	112,17,3	41,46,0		*B*	57,23,66	1, 5055	— 12. — —
Dshan-dsja-kéon oder Chalgan .	112,36,6	40,49,2	+ 1,13, 0	*A*	56,17,4	1, 4594	Neig. d. 23. Nov. 1830. Abw. d. 22. — —
Pekin	114,5,35	39,54,4	+ 1,38, 0	*A* *B*	54, 51,17 54, 53,17	1, 4535	Neigung. Abweichung. Jan. 1831 Januar
			+1,55, 0	*A* *B*	54, 50, 7*) 54, 51,5		April — Mai
			+1,53, 0				
				A *B*	54, 45,6 54, 45,7		Mai — Juni
			+1,48,0				
			+1,47,5	*A* *B*	54, 47,9 54, 49,9		Juli
Zagan Balgassu .	112,23,0	41,17,5		*A*	56,40,6	1, 4734	Den 27. Juli 1831.
Tulghá	112,23,0	41,33,0		*A*	57, 3,7	1, 4649	— 29. — —
Sudshi	111,30,0	42,28,0		*A*	58, 4,7	1, 4949	— 3. Aug. —
Mingan	110, 9,0	43, 3,0		*A*	58,48,7	1, 5077	— 6. — —
Zsamein Chuduck	108,30,0	43,37,0		*A*	59,22,5	1, 5087	— 8. — —
Kutull	108,17,0	43,58,0		*A*	60,13,0	1, 5198	— 10. — —
Gaschun	108,58,15	44,23,0		*A*	60,16,9	1, 5159	— 13. — —
Sendshi	108, 4,6	44,44,7	+ 0,29, 6	*A*	60,42,5	1, 5305	Neig. den 15. August Abw. den 16. —
Kukuderissu . .	107,21,0	45, 8,0		*A*	61,11,8	1, 5417	— — 18. Aug.
Uizsyn	106,55,0	45,34,0		*A*	61,44,4	1, 5429	— — 20. —
Mogoitu	106,32,0	45,50,0		*A*	61,49,1	1, 5454	— — 22. —
Chapchaktu . .	106,14,0	46, 2,0		*A*	62,23,5	1, 5378	— — 24. —

*) Im April und Mai ist die Methode der willkührlichen Azimuthe angewandt worden.

Name des Orts.	Länge von Paris.	Breite nördlich.	Abweichung + westlich — östlich.	Nadel	Neigung.	Intensität	Anmerkungen.
							(Neuer Styl).
Olon Obo . . .	105°,41′,0	46°,21′,1	+ 0°, 1′,7				Den 27. Aug.
Bain-Chara . .	125,35,0	46,31,0			62°,59′,2	1, 5816	— — 28. —
Chapschatu . . .	104,45,0	47,20,0			63,20,9	1, 5813	— — 31. —
Urga	104,21,0	47,55,5	— 1,16, 3	*A*	64, 4,7	1, 5826	Neig. den 3. September Abw. den 4. — —
Chorümtu . . .				*A*	64,40,4	1, 6053	— — 7. —
Urmuchtu . . .					64,56,8	1, 6191	— — 10. —
Troizkosawsk . .	104,24,0	50,21,0	— 0, 2, 7				
			— 0, 5, 4	*A*	66,24,0		den 6. bis 30. Oct.
			+ 0, 3, 2	*B*	66,22,1	1, 6422	indirecte Methode.
			0, 0, 0	*A*	66,25,1		

Magnetische Coordinaten in Ost-Sibirien, im Jahre 1832.

Name des Orts.	Länge von Paris.	Breite nördlich.	Abweichung + westlich — östlich.	Nadel	Neigung.	Intensität	Anmerkungen.
							(Neuer Styl).
Irkutzk	101°,56′,0	52°,17′,3		*AB* *AB*	68°,19′, 8 68, 19, 4	1, 6466	1. Meth. d. 9. Febr. 2. M. d. 29. Fbr. b. 12. Mz.
							Abweichung. Neigung.
Possolsk	103,57,1	52, 1,1		*A*	68, 1,6	1, 6531	d. 1. Apr.
Werchneudinsk	105,24,8	51,49,7	—0°,24′,2	*A*	68, 6,5	1, 6569	d. 6. Apr. d. 5. Apr.
Selenginsk . . .	104,33,1	51, 5,9	— 1, 12,8	*A*	67,53,8*	1,6620?	- 11. — - 11. —
Kurbinsk	108,42,5	52, 5,0		*A*	67,58,6	1, 6649	- 14. —
Pogromnoi . . .	108,42,5	52,30,2	+ 0, 18,5	*A*	68, 7,8	1,6400	- 16. — - 16. —
Tschitanskoi . .	111, 5,6	52, 1,3	+ 1, 12,7	*A*	67,42,45	1, 6685	- 20. — - 20. —
Stadt Nertschinsk	114, 9,8	51,55,6	+ 2, 52,9	*A*	67,11,45	1, 6351	- 25. — - 24. —
Bergw. Nertschinsk	117,16,1	51,18,6	+ 4,6, 43	**	66,33,45	1, 6168	- 4. Mai - 4. —
Zuruchaitu . . .	116,42,0	50,23,3	+ 3,10,65		66,12,6	1, 6256	- 10. — - 11. —
Argunskoi . . .	117,35,5	51,33,0	+ 3, 44,0		66,54,1	1,6555?	- 14. — - 15. —

*) In Selenginsk scheint ein nachtheiliger Einfluss eingewirkt zu haben.

**) Diese Neigung gab ein Gambey'scher Inclinator, dem Bergwerke gehörig.

Name des Orts.	Länge von Paris.	Breite nördlich.	Abweichung + westlich — östlich.	Nadel	Neigung.	Intensität	Anmerkungen. (Neuer Styl). Abweich.	Neigung.
Ust-Urowskoi .	118°,47′,6	52°,8 ,0	+2°,57′,0				-18. Mai	
Uriupina	117,43,0	52,47,0	+ 4, 4,1		67°,52′,6	1, 6673	-21. —	-20. —
Schegdatschinskoi	119, 0,0	53,15,0			68,10,8	1, 6583		-23. —
Uststretensk . .	119,29,85	53,19,7	+ 4, 21,1		68,11,2	1, 6560	-24. —	-26. —
Fluss Umutna .	120,45,15	53,20,0	+ 3, 39,2				-28. —	
5 Werst von Oldoi	121, 2,6	53,29,9	+ 3, 45,6				-29. —	
5 Werst tiefer d. Flusses Ljapina	118,18,17	53,27,1	+ 3, 27,1				- 7. Juni	
Festung Gorbizkoi	116,47,7	53, 6,1	+ 2, 54,0		68,21,6	1, 6598	-11. —	-11. Juni
Stretensk	115,19,1	52,14,8	+ 2, 51,6		67,38,5	1, 6489	-17. —	-17. —
Abagaitujewskoi	115,29,4	49,34,6	+ 2, 53,9		64,48,3	1, 5835	-29. —	-28. —
Altagan	114,51,6	50,28,5	+ 1, 49,8				-30. —	
Tschindant . . .	113,10,75	50,34,0	+ 2, 14,3		66,32,4	1, 6502	- 2. Juli	- 2. Juli
Akschinska . . .	111, 4,3	50,15,0			66,39,6	1, 6710		- 5. —
Altanskoi . . .	109, 8,8	49,28,0	+ 0, 47,7		65,20,5	1, 6194	- 8. —	- 8. —
Mendshinskoi .	106,34,4	49,25,9	+ 0, 12,0		65,31,1	1, 6298	-15. —	-13. —
Dshidinskoi . .	105,52,1	49,58,0	— 0, 11,5				-17. —	
Troizkosawsk .	104,24,0	50,21,0						
Charazaiska . .	102,23,4	50,28,9	— 2, 27,5		66,56,5	1, 6434	-28. —	-28. —
Turkinskoi . . .	106, 3,6	52,56,8	— 1, 9,5				-15. Aug.	
Küitung	108,13,8	54,14,7	— 0, 23,1				-20. —	
Tunkinska . . .	98,29,05	51,45,1	— 2, 55,5				- 8. September.	

Barometrische und thermometrische Beobachtungen.

Auf die ganze in geographischer und magnetischer Beziehung betrachtete Zone, erstrecken sich ebenfalls die Beobachtungen am Barometer.

Einige Betrachtungen über die hohe Lage der Mongolei, zu denen mich die Uebersicht der dort von Dr. Bunge ausgeführten Beobachtungen führte, habe ich bereits im *Recueil des Actes de l'Académie Impériale des sc.* 1832 p. 63. ausgesprochen. Die Bekanntmachung einer detaillirten Ansicht über die orognostische Bildung jenes Plateau's ist bald von dem Herrn Professor Parrot zu Dorpat, zu erwarten.

In Pekin erlaubte mir der 7 monatliche Aufenthalt, eine grosse Reihe barometrischer und thermometrischer Beobachtungen auszuführen. Die Reihenfolge der Monate ist sehr günstig für die ersteren, da der mittlere Stand für die Zwischenzeit vom December bis Juni inclusive bis auf sehr geringes mit dem, aus einer volljährigen Barometerbeobachtung abgeleiteten, zusammen stimmt. So z. B. findet sich:

In Petersburg Stand aus (Dec. — Juni) = 28, 128 P. Z.
Für 1832, Mittel des Jahres = 28, 116
Differenz = 0, 012 = 0,14 Pariser Lin.

In Irkutzk, Stand aus (Decemb.—Juni) = 28, 542 Engl. Z.
Für 1831, Mittel des Jahres = 28, 536
Differenz = 0, 006 = 0,07 Par. L.

Das Endresultat des Barometerstandes, wird daher ein sicheres Datum zur Bestimmung der Erhebung des Orts über dem Spiegel des Ost-Oceans geben können.

Die aus den sämmtlichen Beobachtungen gezogenen Resultate, stellen folgende Tafeln dar:

Barometerstand in halben Pariser Linien auf 0° reducirt.

	Mittag	6h Abends	10h Abends	8h Morgens	Mittel
December 1830.	678, 23	678, 29	680, 00	679, 00	678, 88
Januar 1831.	679, 65	678, 72	678, 86	680, 53	679, 44
Februar —	679, 80	678, 96	680, 26	680, 11	679, 78
März —	677, 36	675, 62	676, 94	677, 28	676, 80
April —	670, 30	668, 30	669, 78	670, 94	669, 83
Mai —	668, 35	666, 44	667, 83	668, 73	667, 84
Juni —	663, 55	662, 49	663, 10	663, 68	663, 205
Mittel	673, 89	672, 69	673, 82	674, 32	673, 68.

Mittlerer Stand des Barometers in Pariser Linien auf 0° reducirt = 336, 84.

Diese Tafel zeigt nicht nur in verticaler, sondern auch in horizontaler Linie Oscillationen des Standes. Die Höhe des Standes nimmt schnell von den Wintermonaten zu den Sommermonaten ab, und die gesammte Oscillation beträgt über 8 Linien. 6 Uhr Abends und 8 Uhr Morgens äusserten entschieden die Nähe eines Minimums und Maximums im täglichen Stande.

Folgende Tafel begreift den höchsten und niedrigsten Stand für jeden Monat.

Höchster Stand.	Temp. und Zustand d. Luft.	Niedrigster Stand.	Temp. und Zustand d. Luft.	Differenz.	Mittel.
		December			
$\frac{31}{12}$ 8^h Vorm. 689,19	− 6°,0 still Schnee	$\frac{17}{29}$ 8^h Vorm. 664,89	+ 3°,7 kl. W.	24,30	677,04
		Januar			
$\frac{1}{13}$ Mittag 687,87	−1, 1 klar, still;	$\frac{16}{28}$ Mittern. 667,40	+ 2, 0 still, bew.	20,47	677,63
		Februar			
$\frac{24}{8}$ Mittern. 690,23	−6,0 kl. SW. gelindes Erdbeben.	$\frac{11}{23}$ 8^h Vorm. 670,71	+10,5 kl. NW.	19,52	680,47
		März			
$\frac{1}{13}$ 8^h Vorm. 689,43	−1,1 klar, still	$\frac{18}{30}$ 8^h Vorm. 669,30	+ 6, 5 klar, still	20,13	679,36
		April			
$\frac{5}{17}$ 8^h Vorm. 675,28	+12,4 bew. st.	$\frac{8}{20}$ 6^h Nachm. 659,79	+23,2 klar, still	15,50	667,53
		Mai			
$\frac{17}{29}$ 8^h Vorm. 676,88	+22,0 — —	$\frac{20}{1}$ 6^h Nachm. 662,40	+28,1 klar, still	14,48	669,64
		Juni			
$\frac{1}{13}$ 8^h Vorm. 667,30	+23,3 — —	$\frac{13}{25}$ 6^h Nachm. 659,16	+ 30,6 bewölkt	8,14	663,23
				Mittel	= 673,557

Mittlerer Stand des Barometers in Pariser Lin. auf 0° reducirt . . . . . = 336,779; gegen den früheren, weicht dieser nur um 0,06 Lin. ab.

Auch diese momentanen Angaben deuten darauf hin, dass um Mittag und 10 Uhr Abends ein mittlerer Stand, um 8 Uhr Vormittags aber ein Maximum, und um 6 Uhr Abends ein Minimum der beobachteten Stände eintreffe.

Die Temperaturangaben gründen sich auf Beobachtungen eines mit dem Normal-Thermometer verglichenen Centesimal-Thermometers, das in freier Luft nach Norden zu, vor jedem Winde geschützt, hing. Diesem Thermometer lag folgende Correctionstabelle zu Grunde.

Thermometer.	Normal	1° giebt
— 15°	— 14°,92	
— 10	— 10, 01	0°, 982
— 5	— 5, 12	0, 978
± 0	— 0, 03	1, 018
+ 5	+ 4, 83	0, 972
+ 10	+ 10, 00	1, 034
+ 15	+ 14, 76	0, 952
+ 20	+ 19, 78	1, 004
+ 25	+ 24, 58	1, 960
+ 30	+ 29, 63	1, 010
+ 35	+ 34, 68	1, 010
+ 40	+ 39, 57	0, 966.

Daraus ergeben sich folgende monatliche Temperaturen in Pekin:

	8^h	0^h	6^h	10^h	Centesimal
December	— 4°,31	+ 1°,15	— 0°,41	— 2°,33	— 1°,47
Januar	— 4, 68	+ 0, 36	— 0, 95	— 2, 73	— 2, 00
Februar	— 0, 80	+ 3, 98	+ 2, 19	± 0, 00	+ 1, 34
März	+ 6, 51	+ 10, 79	+ 10, 26	+ 7, 52	+ 8, 77
April	+ 11, 57	+ 16, 84	+ 17, 31	+ 13, 63	+ 14, 84
Mai	+ 21, 37	+ 27, 32	+ 26, 20	+ 21, 39	+ 24, 07
Juni	+ 24, 75	+ 29, 05	+ 27, 72	+ 23, 97	+ 26, 37.

Eine Vergleichung des höchsten und niedrigsten Standes der Quecksilbersäule, sowohl während eines Monats als auch während eines Tages, stellt folgende Tafel dar:

		Temperatur höchste		Temperatur niedrigste	Mittel	Differenz	grösste Differenz an 1 Tage.
December	$\frac{11}{25}$ Mittag	+ 8°,45	$\frac{24}{5}$ 10^h	— 9°,82	— 0°,68	18°,27	9°,64
Januar	$\frac{5}{17}$ —	+ 10, 48	$\frac{24}{5}$ 8	— 13, 45	— 1, 48	23, 93	12, 54
Februar	$\frac{11}{23}$ —	+ 10, 47	$\frac{5}{17}$ 8	— 6, 38	— 2, 05	16, 85	8, 40

*

			Temperatur höchste	niedrigste	Mittel	Differenz	grösste Differenz an 1 Tage.
März	$\frac{27}{8}$	6^h	$+16°,47$	$\frac{1}{13}$ 8^h $-1°,14$	$+7°,66$	$17°,61$	$9°,10$
April	$\frac{8}{20}$	6^h	$+22,85$	$\frac{1}{13}$ 10^h $+8,66$	$+15,75$	$14,20$	$11,80$
Mai	$\frac{16}{28}$	Mittag	$+32,46$	$\frac{7}{19}$ 8^h $+14,48$	$+23,47$	$17,98$	$9,65$
Juni	$\frac{14}{26}$	6^h	$+39,31$	$\frac{11}{23}$ 10^h $+18,37$	$+28,84$	$20,94$	$12,81.$

Nach diesen unvollständigen Temperaturbeobachtungen kann die mittlere Temperatur des Winters mit Sicherheit auf — 0°,7 Cent. oder — 0°, 56 *) Reaumur angesetzt werden. Im Sommer wird sie nur weniges unter + 30° Centesimal oder + 24° Reaumur betragen.

Dem Monat April kommt ohne Zweifel eine grössere Temperatur als + 14°, 8 zu, da bloss die erste Hälfte des Monats benutzt worden ist. Jedenfalls erweiset sich vom Februar bis Mai eine sehr bedeutende Zunahme der mittleren Temperaturen, die Folge der beträchtlichen Temperatur-Differenz im Jahre von 30°.

Alle meteorologischen Beobachtungen sind auf den alten Styl bezogen, da sie zufällig vom 1. December bis zum 1. Juli alten Styls geführt worden sind. Die Angaben für den April gehören seiner ersten Hälfte an, und es ist daher der mittlere Barometerstand als zu gross, die mittlere Temperatur als zu klein zu betrachten.

Ueber den Zustand der Luft sind in den sieben Monaten, während der Beobachtungsstunden folgende Wahrnehmungen gemacht worden. Im December waren 16 ganz klare, 3 durchgängig dünnbewölkte und 4 zum Theil bewölkte Tage; 2 Mal fiel geringer Schnee. Im Januar 17 klare, 4 bewölkte, 9 theils bewölkte; feiner Schnee fiel 3 Mal. Der Februar hatte 14 klare, 5 bewölkte und 9 theils bewölkte Tage; in diesem Monate fiel an 4 Mal Schnee und zuletzt den 7. März N. St., wo er eine Schicht von über 1 Zoll Dicke bildete; den 3. März fiel der erste feine Regen. Im März 4 klare, 11 bewölkte und 16 theils bewölkte Tage; 1 Mal sehr wenig Schnee und 4 Mal Regen. Im April gab es

---

*) Dies wird aber ein Maximum der mittleren Winterkälte seyn, da der Winter 1831 als ein verhältnissmässig kalter angegeben wurde.

während der zwei Wochen nur einen ganz klaren Tag, 4 ganz und 6 theils bewölkte Tage; 2 Mal regnete es, und den 18. N. St. war das erste Gewitter mit Platzregen. Im Mai 10 Tage klar, 6 bewölkt, 10 theils bewölkt; Gewitter mit Platzregen 3 Mal, ausserdem 2 Mal Regen und 2 Mal Wetterleuchten. Der Juni hatte 7 klare, 6 bewölkte und 18 zum Theil bewölkte Tage; geregnet hat es an 5 Mal, Gewitter mit Platzregen fanden 5 Mal, und Wetterleuchten 2 Mal statt.

Zieht man dieses zusammen, so ergeben sich für die erste Hälfte des Jahres 69 ganz klare, 39 ganz bewölkte und 72 zum Theil bewölkte Tage, 10 Schneetage, 22 Tage, an denen es geregnet und 9 Gewittertage; bedeutendes Wetterleuchten ist an 4 Tagen wahrgenommen worden. Die Gewitter sind indessen in diesen Gegenden noch häufiger, sie brechen plötzlich aus, in der Regel mit einem Orcan, wobei der ganze Himmel sich in falbe Wolkenmassen hüllt, sind heftig und von sehr kurzer Dauer.

Der letzte Frost von —1°,1 Cent. war den $\frac{1}{13}$ März Morgens.

Alle diese aus dem siebenmonatlichen Aufenthalt in der Chinesischen Residenz gezogenen Resultate, können einen ungefähren Begriff von der climatischen Beschaffenheit des Gestadelandes Petschely geben, welche gegen die des benachbarten Hochlandes in einem so contrastirenden Character steht, dass sich auf der 100 — 200 Werst breiten Terassenlandschaft ein Climatsübergang von völligen 10 Breitengraden offenbart.

Hypsometrische Bestimmungen im Transbaikalischen Gebiete.

Die diesen Bestimmungen zu Grunde liegenden Beobachtungen, wurden an einem Barometer ausgeführt, das mit einer, zu diesem Behuf sorgfältig ausgekochten Glasröhre, aus der Glasfabrik Telminsk bei Irkutzk, versehen war. Obschon die Röhre von einer nur mittelmässigen Güte war, so offenbarte sich doch, nach Vergleichung mit einem als Normal angenommenen Barometer kein erheblicher Fehler, was man aus den unten folgenden zahlreichen Beobachtungen am Baikalsee wird beurtheilen können.

Aus Reisebeschreibungen ist es bekannt, dass, so wie man den Baikalsee bei Possolsk hinter sich hat, die Landschaft einen eigenthümlichen Character gewinne. Den weiten Wellungen ausgedehnter, sparsam bewaldeter Flächen, deren Tiefthäler Flussbette der Gewässer, die das südwärts gelegene Mongolische Gränzgebirge bildet, sind, folgen bald enge Strassen zwischen üppig bewaldeten Bergzügen, die ersten Salzsteppen, grössten Theils Ableiter der Gewässer aus den Hochregionen zum Baikalsee diesseits, zum Amurstrome jenseits des Jablonoi. Solcher, die Gegend characterisirender Steppen, betritt man mehrere, als: die Selenginskische, die Chorin'sche am Udastrome, die weitläuftigen Flächen, welche den südlichen Theil der Nertschinskischen Höhen ausfüllen, und den Argun- und Ononfluss umlagern, und die in der Gegend von Argunsk, wo die zu beiden Seiten des Flusses fortlaufenden Bergzüge fast gleichzeitig zusammenstossen, plötzlich einer waldigen Felslandschaft, die nun vorherrschend wird, Platz machen. In diesen Steppen betritt man ein dem Gürtel in der Mongolei, zwischen Kukuderissu und Chologur analoges Land, besäet mit verschiedenartigem Chalzedongestein, Agat, Carneol u. s. w., hier auch ist es, wo von der hart anliegenden Region der Gobiwüste her, das Steppenpferd noch angetroffen wird. Nach dem reichbewaldeten Hochlande des Jablonoi Chrebet von üppiger Vegetation, mit Sumpfthälern, Felstrümmern des Grausteins und mannichfaltig stürzenden Bergströmen, stösst man zuerst wieder auf Steppen am Tschikoi, wo sich weite, von Bergzügen begränzte Sandebenen ausstrecken; dann an der Selenga und Dschida, als: Kiran, Borgoi und die schöne Cherazai-Steppe. Höher hinauf nach NW. liegt noch die grosse Steppe des Bargusinflusses, die einerseits auf dem rechten Ufer ein pitoresker Zug Schneeberge an 100—200 Werst lang in völlig gerader Richtung vom SSW. nach NNO. begränzt.

Seiner Lage und dem Character nach, scheint das ganze transbaikalische Land der Nordrand der nordöstlich streichenden Gobiwüste zu seyn, doch vortheilhaft modificirt durch den Gebirgszug Jablonoi und seine reichhaltige Bewässerung. Wo in Osten der Chinganzug jenem wüsten Gürtel Gränzen setzt, tritt dessen Landschaft vorherrschend, wie oben erwähnt wurde, in die Gegenden des Amurstromes hinein.

Sämmtliche hypsometrische Bestimmungen sind das Resultat der Vergleichung sicherer correspondirender Barometerbeobachtungen in Irkutzk, die ungefähr 4 Toisen über dem Niveau der Angara angestellt wurden. Zur Vergleichung wurden die Barometerhöhen auf 0° reducirt mit Anbringung der Correction, wegen Ausdehnung der Quecksilbersäule und Messingskale. Die durch Zeitreduction erlangte Einheit der Momente, kann bis auf mehrere Minuten sicher seyn.

Die Bestimmung des Niveau's des Baikalsees, gründet sich auf drei Beobachtungsreihen. Die erste ergab sich aus Dr. Bunge's Excursion ans südliche Baikalufer am Fusse der Sajanenalpen im Juli-Monate des Jahres 1830; correspondirende Beobachtungen in Irkutzk wurden von mir angestellt, und die beiden Barometer stimmten in ihren Angaben völlig überein. Daraus folgt:

Erhebung des Baikalsees über dem Standpuncte in Irkutzk:

Bei'm Dorfe Kultuk	13, 7	Toisen
Mündung der Besimjannaja	8, 8	—
— — —	9, 1	—
Mündung der Murina	9, 8	—
— — —	9, 5	—
Mündung der Wydrinka	10, 2	—
Mittel	10, 2	Toisen.

Zwei andere Reihenfolgen gab das Jahr 1832, wo der Baikal einmal im März, dann im August von mir besucht wurde. Daraus ergingen folgende Höhendifferenzen zwischen den Niveau's des Standpuncts in Irkutzk und des Baikal:

Listwinischnaja . .	10, 7	Toisen,	im März
— — . .	14, 4	—	— —
Kadilnaja	14, 8	—	— —
Golóustnaja	16, 2	—	— —
Possolsk	10, 2	—	— —
Mittel	13, 3	Toisen.	

Possolsk	10, 6	Toisen.	Im	August.
—	9, 7	—	—	—
—	10, 7	—	—	—
—	8, 2	—	—	—
—	13, 5	—	—	—
Goloustnaja . . .	7, 4	—	—	—
Listwinischnaja . .	20, 8	—	—	—
— — .	12, 8	—	—	—
— — .	12, 8	—	—	—
Kultuck	16, 6	—	—	—
— — .	10, 7	—	—	—
Mittel	12,16	Toisen.		

Das hiezu gebrauchte Barometer, verglichen mit dem Irkutzkischen, welches von einer ganz ähnlichen Einrichtung war, und als normal zu betrachten ist, ergab aus 11 Vergleichungen eine mittlere constante Correction für den Stand in Irkutzk $= + 0,23$ Linien; daher müssen von den beiden Mitteln der Höhendifferenz, 3,0 Toisen abgezogen werden, was im Mittel eine Erhebung des Sees über dem Standorte $= 9,8$ Toisen, und verbunden mit den Resultaten von 1830, 10 Toisen giebt. 4 Toisen der Erhebung des Standortes über dem Niveau des Angara hinzugesetzt, erhält man die Erhebung des Sees über dem Niveau der Angara bei Irkutzk $= 14$ Toisen.

Die ferneren Puncte am Baikalsee von den Turinskischen Heilquellen bis zur Mündung des Bargusinflusses, können ohne ungünstigen Einfluss auf's Endresultat nicht zugezogen werden. Sie liegen gegen 4° östlich von Irkutzk und schon ausser dem Bereiche des analogen Barometerstandes, was sich in einer gleichförmig, (bis auf 28 Toisen) zu und abnehmenden Höhendifferenz äussert.

Von geringerem Belang muss dieser Umstand bei der hypsometrischen Bestimmung in Daurien, einer Strecke von 15,5 Längengraden seyn, wo keinesweges die Genauigkeit von ein Paar Toisen von der angewandten Methode zu verlangen ist.

Wie viel von der Sicherheit dieser Art Höhenbestimmungen zu erwarten ist, oder wie gross der ungefähre wahrscheinliche Fehler im Resultate aus einer Beobachtung sich erweiset, zeigte eine Vergleichung meiner Angaben mit denen von Pansner, welche dieser bekannte Reisende aus seinen zu Anfang dieses Jahrhunderts in Daurien angestellten Beobachtungen, mit Anwendung derselben Methode correspondirender Barometerhöhen, zog.

Nach Pansner ist:

Erhebung von Irkutzk über dem Ocean = 242, 0 Tois.	dieselbe aus dreijährigen Beobachtungen abgeleitet . . . . = 207,8	Differenz. +34,2 Tois.

Erhebung über dieser Stadt,

		nach Pansner:	nach neuen Bestimmungen:	Differenz
Troizkossawsk	=	126,3	157,0	— 30,7
Stadt Nertschinsk	=	41,1	84,0?	— 43,0
Bergwerk —	=	113,3	125,6	— 12,3
Tschindant	=	74,1	103,6	— 29,5
Werchneudinsk	=	66,3	35,5	+ 30,8
Tschitanskoi	=	100,7	86,1	+ 14,6
Jablonnoi Chrebet, Poststrasse	=	395,2	364,0	+ 31,2
Akschinska	=	129,3	157,2	— 28,0
Bukukunskoi	=	338,5	365,8	— 27,3

Diese Zusammenstellung setzt eine wahrscheinliche Differenz von ungefähr nur 20 Toisen voraus, und, da beiden Bestimmungen wohl ein gleiches Gewicht zu Grunde liegt, den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung blos zu 10 Toisen. Doch obschon, in Betracht der so verschiedenen Umstände, auf denen sie basiren: der Zeit, des Orts und des Instruments, man berechtigt seyn kann, diese Differenzen als in der Regel entscheidend über die Sicherheit einer Beobachtung anzusehen, so ist doch nicht zu verhehlen, dass bei ungünstigen Fällen, während eines schwankenden Barometerstandes, man in Differenzen von über 60 Toisen werde verfallen können. Constante, aus der Natur des Luftdruckes in verschiedenen geo-

graphischen Längen und Breiten entspringende Fehler, können überdem in den folgenden Höhenbestimmungen verborgen liegen; denn zur Annullirung derselben sind noch zu wenige fortlaufende Barometerbeobachtungen in diesen Gegenden angestellt und bekannt gemacht worden.

Hypsometrische Bestimmungen zwischen dem Baikalsee und dem Amurstrome.

Erhebung über dem Ocean:

		Toisen.
Unter Annahme von Irkutzk		207,8
Selenga.	Kabanskaja	216,7
	Tarakanowa	219,8
	Iljinskaja	228,6
	Polowinnaja	229,2
	Werchneudinsk, aus 23 Beobachtungen	243,3
Selenga-Steppe.	Iwologa	248,2
	Kljutschi	355,4
	Ubukunskoi	272,5
	Solenopad	337,8
	Selenginsk	272,5
Uda Steppe, Aufsteigen zum Plateau des Jablonnoigebirges.	Onochoi	267,6
	Kurbinsk	282,3
	Tüngürübulutskoi	307,1
	Tarbagataiskoi	322,6
	Kuljskoi	334,0
	Grjadskoi	350,8
	Popereschnoi	381,6
	Pogromnoi, Sauerq.	431,4
	Pogromnoi, Station	461,1

Erhebung über dem Ocean:

		Toisen.
Plateau des Jablonnoi.	Erawinskoi a. Erawinsee	501,9
	Quellen der Uda	539,5
	Quellen der Conda	527,2
	Schakschasee	512,3
	Scharaochon	528,0
	Gipfel des Gebirges Jablonnoi	571,8
Absturz z. Niveau des Ingodaflusses	Kljutschi	424,0
	Tschitanskoi	293,9
Ingoda	Galkinskoi	240,2
	Rasmachninskoi	239,3
	Gorodischtschenska	238,0
Schilkafluss, Bjankina bei Nertsch.		242,8
	Ein Berg	518,0
Nertschinskische Höhen.	Kolobowa	389,3
	Schelopugina	433,3
	Undinskaja	440,0
	Gasimurskaja	407,0
	Taininsk	385,6
	Soloneschnoi	413,4
	Nishneserentui	364,9
	Bergwerk Nertschinsk aus 20 Beobachtungen während einer Woche	333,4
	Serentui	363,8

Erhebung über dem Ocean:

			Toisen.
Argun-Steppe	Tschalbutschinskoi		278,4
	Bulduruiskoi		276,9
	Sredneborsinskoi		257,1
	Burinskoi		240,7
	Sorgolskoi		239,0
	Zuruchaitu aus 15 Beobacht.		249,5
Niveau d. Argunflusses b. d. Münd. d. Fluss. Bystraja.	Resultat aus 8 Beobacht. und 2 Tagen		244,2
Niv. des Argunfl. zwischen Ustjurow u. Urjupina.	Aus 11 Beobacht. Resultat aus 2 Tagen.		219,0
Niv. des Argunfl. zw. Urjupina und Schegdatschinsk.	Resultat aus 12 Beobacht. und 2 Tagen		195,2
Niveau des Argunflusses zwischen Schegdatschinsk und dem Amur.	Resultat aus 12 Beobachtungen und 3 Tagen.		209,4

Erhebung über dem Ocean:

			Toisen.
Niveau d. Schilkaflusses zwischen d. Amur u. dem Gorbizaflusse.	Resultat aus 4 Beobachtungen und 4 Tagen		200,3
Niveau d. Schilkaflusses, zwischen Gorbizkoi und Stretensk.	Resultat aus 5 Beobachtungen und 5 Tagen.		222,0
Bei Stretensk.	Resultat aus 2 Beobacht. an 2 Tagen.	*)	233,4
Steppe des Argun.	Zuruchaitu		249,5
	Dursewskoi		249,0
	Kailasutujewskoi		265,9
	Isoktu		285,8
	Abagaitujewskoi		289,1
Nertschinskische Höhen.	Milosotujewskoi		367,8
	30 Werst weiter		379,6
	Altaganskoi		396,1
	Kljutschewskoi		402,0
	Tschindant (Karaul)		325,7
	Kolosutujewskoi		319,4

*) Diese zwei isolirten Beobachtungsreihen auf den beiden Oberarmen des Amurs (die Zwischenzeit von einigen Wochen, dortigen Aufenthalts, trennt sie von einander) sind in vieler Hinsicht bemerkenswerth; sie beweisen durch ihre gegenseitige Harmonie, wie zuverlässig die gebrauchte Methode bei Anwendung der Mittel aus zweien oder mehreren Tagen seyn kann; sie zeigen ferner an, dass die Mündungen der den Amur bildenden Flüsse, schon im Niveau der Angara bei Irkutzk liegen; dass jene beiden Flüsse in ihren senkrechten Durchschnitten immerfort ein gleiches Niveau beibehalten. Endlich, erweist sich das letzte Resultat als sehr befriedigend mit der früheren isolirten Beobachtung am Schilkaflusse, stimmend.

Erhebung über dem Ocean:		Toisen.
Am Onon.	Tschindant (Festung)	311,4
	Akschinskaja	365,0
	Wernéulchun	403,1
Aufsteigen z. Hochgebirge d. Jablonnoi	Korinskoi am Fl. Krasnaja	465,0
Aufsteigen zum Hochgebirge des Jablonnoi.	Altanskoi	505,7
	Bukukunskoi	573,6
	Berg	735,5
	Fluss Kirkun	573,6
Im Hochgebirge des Jablonnoi.	Fluss Kukukun . . .	646,2
	Baldshikanskoi, am Flusse Balsha . .	651,6
	Fluss Ugamar	699,2
	Fluss Charegute . . .	645,4
	Fluss Assingé Piket Kuruladshi . .	643,1
	Fluss Bajangmadu . .	644,1
	Gipfel des Jablonnoi .	727,0
	Fluss Mansikan . . .	688,6
	Fluss Kumyr	577,1
	Mendshanskoi, am Fluss Mendsja . .	469,0
	Fluss Katandsa, die zur Mendsja strömt	513,5
	Fluss Uljuley	644,4
	Gipfel des Dolotberges	742,3

Erhebung über dem Ocean:		Toisen.
Niedersteigen zum Niveau des Tschikoy.	Fl. Katandsa, der in den Tschikoy fällt	367,3
	Ein Berg	475,0
	Dorf Chilkotoiska . .	322,8
Tschikoy-Fluss.	Dshidinskoi	312,6
	Usturlazkoi	312,6
	Scharagolshinskoi . .	301,1
	Kudarinsk	292,8
	Kiransteppe	296,8
	Troizkossawsk	364,8
Im Sajanen-Gebirge.	Charazaisteppe	370,0
	Borgoisteppe	317,4
	Tunkasteppe am Irkut	348,0
Bargusin-Steppe.	Bargusinsk am Bargusin	242,0
	30 W. höher hinauf	240,0
	Uluss Ulun	271,1
	Am Flusse Argatu . .	244,8
	Uluss Kuitung	322,3
	Uluss Udock am Bargusin	266,8

Anmerkung. Pansner fand auf der Höhe der Tschokondokoppe eine Erhebung von 1290 Toisen.

Schliesslich theile ich noch einige Beobachtungen über Quellentemperaturen in Daurien mit, die immer mit Beachtung der dabei nothwendigen Vorsichts - Maassregeln angestellt wurden :

Sauerquelle bei Pogromnoi, $\frac{1}{2}$ Faden tief im Eise, 4^h Nachmitt. den Réaum.
17. April Neuen Styls . . . . + 0°,16

2 Werst östl. von Turinsk am Ingodafl., 1^h Nachm. 21. Apr. N. St. + 1, 61

17 W. östl. von Beregowaja an d. Ingoda, 9^h Vorm. d. 22. Apr. N. St. + 0, 90

10 Werst östlich von Mirsan (Ingoda) um Mittag, den 23. April Neuen Styls. Die Quelle hatte einen Hügel gehoben und gesprengt . + 0, 82

Auf einer Bergwand am rechten Schilkaufer, gegen 30 Werst hinter Nertschinsk, um 10^h Vorm. den 28. April, aus gespaltener Erde . . . + 0, 74

14 Werst weiter, 11^h Vorm.
3 — — 12^h Mitt. } . . . . + 0, 74

Ausser diesen hatten noch vier Quellen, die auf dem Wege nach dem Bergwerke, zu verschiedenen Tageszeiten und an verschiedenen Orten untersucht wurden, darunter eine den 19. Juni N. St., genau dieselbe Temperatur von + 0°,74 R. Einige der Quellen entsprangen aus grossen Eislagern, die sich in diesen Gegenden stellweise bis in den Juni Monat hinein noch erhalten.

$1\frac{1}{2}$ W. oberhalb der Mündung des Urjumkan am Argunflusse, 8^h V. den 20. Mai N. St., Temperatur der Luft + 4°,7 . . . . + 0, 56

12 W. unterhalb der Station Urjupina am Argun, 11^h Vorm. den 21. Mai N. St. Temperatur der Luft + 10°,5 . . . . + 1, 76

In Mantschikan am Argun, 8^h Nachm. den 21. Mai Neuen Styls, Temperatur der Luft + 10°, 0 . . . . + 1, 29

16 W. unterhalb Mantschikan, 11^h Vorm. den 22. Mai Neuen Styls. Temp. + 9°, 3 . . . . + 0, 74

3 W. vom Amur aus einer Bergwand am Ufer, 3^h Nachm. d. 24. Mai Neuen Styls. Temperatur der Luft + 11°,5 . . . . + 0, 82

25 Werst von Uststretensk am Amur, 2^h Nachm. den 27. Mai N. St.,

	Réaumur.
Temperatur der Luft + 15°,0, aus einem Schieferfelsen	+ 1°,76
15 Werst weiter aus der Erde, 4^h^ Nachm., Temperatur + 14°, 5 .	+ 1, 06
Am Umutnàflusse, 4^h^ Nachmitt. den 28. Mai., Temperatur + 13°, aus weicher Erde	+ 1, 44
Aus grossen Schieferfelsen auf dem linken Amurufer, 9^h^ Vorm. den 1. Juni N. St.	+ 0, 88
Gegenüber am rechten Ufer, 8^h^ Nachmittags	+ 1, 20
Nördliches Ufer der Schilka.	
35 Werst von Uststretensk, 10^h^ Vorm. den 5. Juni N. St., aus Felsen	+ 1, 20
Ebendort	+ 1, 92
100 Werst von Uststretensk, 8^h^ Vorm. den 7. Juni N. St., Temperatur der Luft + 16°, 0, aus Felsen	+ 2, 48
50 Werst unterhalb Gorbizkoi, 10^h^ Vorm. d. 9. Juni N. St., aus Sand, Temperatur der Luft + 18°, 0	+ 2, 64
10 Werst von Gorbizkoi, 8^h^ Vormitt. den 11. Juni N. St., aus Felsen	+ 2, 80
5 Werst von Gorbizkoi, 10^h^ Vorm. den 11. Juni N. St., aus weicher Erde	+ 1, 60
Kljutschewsk auf der Argunsteppe, 7^h^ Nachm. den 30. Juni N. St., Temperatur der Luft + 16°, am Fusse eines Berges	+ 1, 60
Bukukunskoi, 12^h^ Mittags den 9. Juli N. St., Temperatur der Luft + 14°, aus weicher Erde	+ 1, 04
Am Kumyrflusse, 10 Werst vom Mendshinskoi, 9^h^ Vormitt. den 13. Juli N. St. Temperatur der Luft + 17°, zwischen Steinen . .	+ 1, 36
Unter'm Gipfel des Dolot, 2^h^ Nachm. den 16. Juli, Temperatur der Luft + 23°, zwischen Steinen	+ 1, 20

ANHANG.

Erklärung der beiliegenden Bergprofilkarte.

Die beiliegende hypsometrische Karte stellt ein und zwanzig Längengrade Süd-Ost-Sibiriens im senkrechten Durchschnitte, unter den Parallelkreisen 53° und 50°, dar. Die Entfernungen der Oerter sind hier auf jene Parallelkreise projicirt, oder es sind ihre Längenunterschiede angegeben. Zieht man also in Gedanken die ihnen zukommenden Breiten in Betracht, so wird man sich eine perspektivische Darstellung ihrer gegenseitigen Lage hervorbringen.

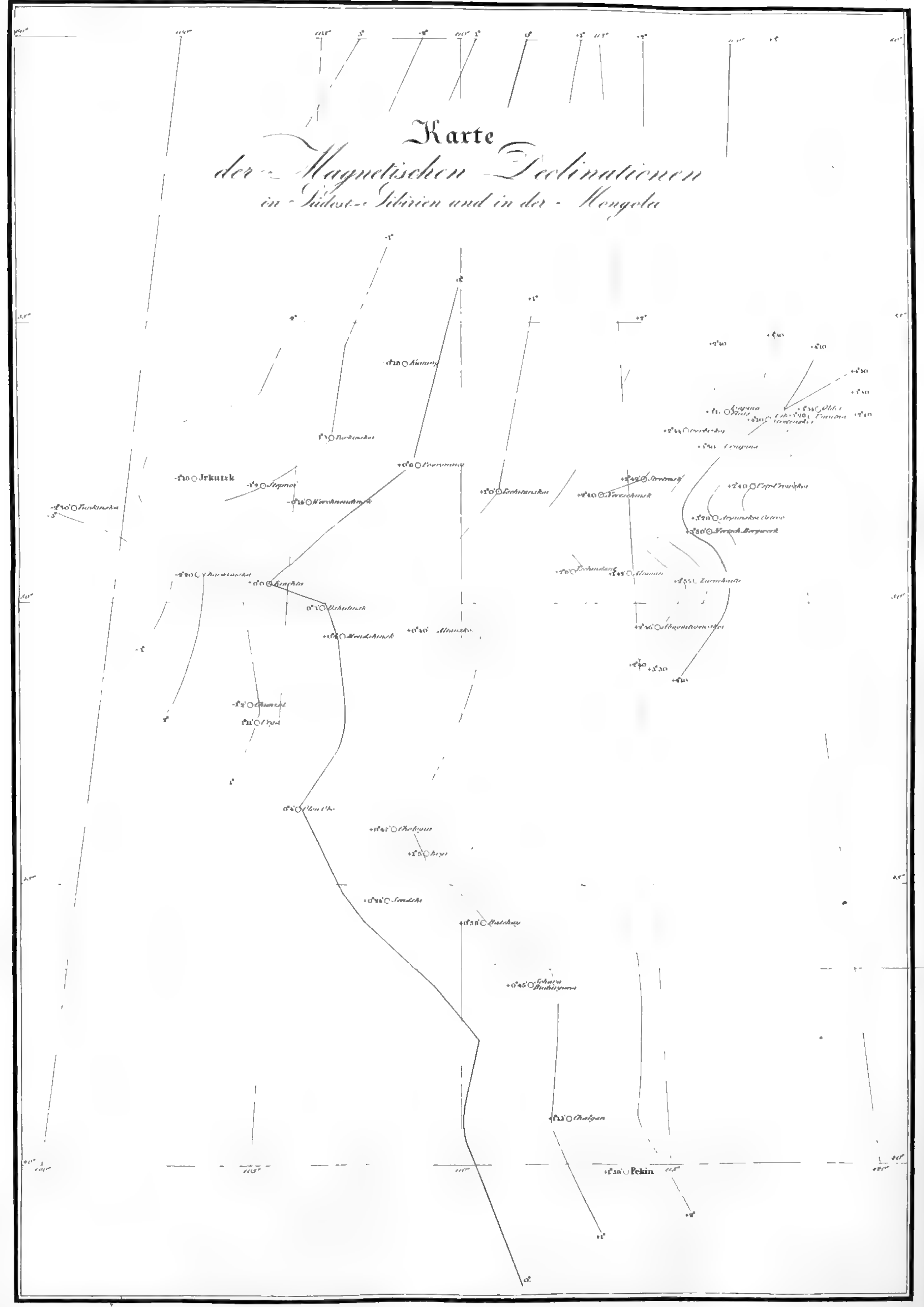
Um das Hypsometrische in die gegenwärtige Form zu fassen, mussten die Ordinaten verhundertfacht werden; es ist 1 Toise der Höhe = 100 Toisen des Längengrades, und auf den Längengrad 376 Toisen angenommen; eine willkührliche Annahme, die aber nahezu das verhundertfachte Verhältniss der beiden Coordinaten ausdrückt.

Die Karte stellt, in allgemeinen Zügen, Gegenden des Sajanengebirges, des Baikalsees, des Jablonnoi und des Ober-Amurs, dar. Das Niveau von Irkutzk ist im wahren Sinne das Niveau der ganzen Landschaft selbst. Siebzehn Längengrade von jener Stadt befindet man sich genau wieder in derselben Erhebung von 208 Toisen über dem Meeresniveau. Den Baikalsee sieht man auf 14 Toisen über der Angara bei Irkutzk sich erheben und den Selengafluss aufnehmen, dessen vollständiger Fall durch Sibirien von den Höhen bei Kjachta an, durch Selenginsk und Werchne-Udinsk aufgezeichnet ist. Der Kamm, der die Gewässer der sibirischen Flüsse scheidet, ist unter beiden Parallelen so bezeichnend, dass er von den dortigen Burjaten und Tungusen als Gegenstand der Verehrung betrachtet wird. Von den Condaquellen, die vom Plateau des Gebirgrückens ihre Gewässer noch zum Nordoceane hinsenden, gelangt man, nach einem jähen Absturze des Gebirges, ins Thal der

schon ostwärts strömenden Flüsse Tschita und Ingoda. Hier beträgt die grösste Erhebung 572 Toisen über dem Meeresniveau; südlich hingegen sieht man das Gebirgsjoch die Thäler des Onon und der Mendsja, eines grossen Bergstromes, der in den Tschikoi fällt, von einander scheiden, und auf 727 Toisen sich erheben. Hier hat sich auf dem Absturze des Hochgebirges, der nun nach West gekehrt ist, da hingegen der nördliche ostwärts hängt, ein grosses Gebirge gestellt, das keilförmig die Thäler der Mendsja und des Tschikoi scheidet. Die Karte stellt auf eine sehr bestimmte Weise die Flusssysteme des Hochlandes dar, geordnet nach dessen Hauptthälern; vorn erscheint das ausgedehnte Ononthal, darauf die tiefen Schluchten der Mendsja und Nord-Katandsa und zuletzt das Tiefland des Tschikoi. In diese Hauptthäler strömen terrassenartig die Flüsse, ostwärts vom Gipfel, von den nördlichen, — westwärts aber, von den südlichen oder mongolischen Höhen herab. Unter den ersteren, d. h. den Sibirischen, zeichnen sich zwei Alpen aus, von denen die höhere, die Tschokondoalpe auf 1290 Toisen über das Meeresniveau steigt. Die Ononquellen entspringen im Hochgebirge in einem ausgedehnten Thale, das diesseits einen ostwärts ablaufenden Zweig bildet, dessen Fortsetzung weiterhin als eine flache Anschwellung von 100 Toisen über dem Terrain bemerkbar ist, und sich zuletzt ins Niveau des Oberamurs verflacht. Das Südgebirge des Baikals, so wie die Tunkinschen Alpen sind, als hervortretende Höhen dieser Gegend, wegen Mangels an zuverlässigen Messungen, nur schwach punctirt gehalten, da hingegen die Thäler der Flüsse Tschikoi, Dshida und Irkut als ihre eigentlichen Typen in ihren geographisch bestimmten Verhältnissen angegeben sind.

Karte

60°
100°
105°
-3°
-2°
110°
-1°
0°
+1°
115°
+2°
100°
+3°
60°
+0°45' ⊙ Schara Budürguna
+1°13' ⊙ Chalgan
40°
100°
105°
110°
+1°38' ⊙ Pekin
115°
120°
40°
+2°
+1°
0°

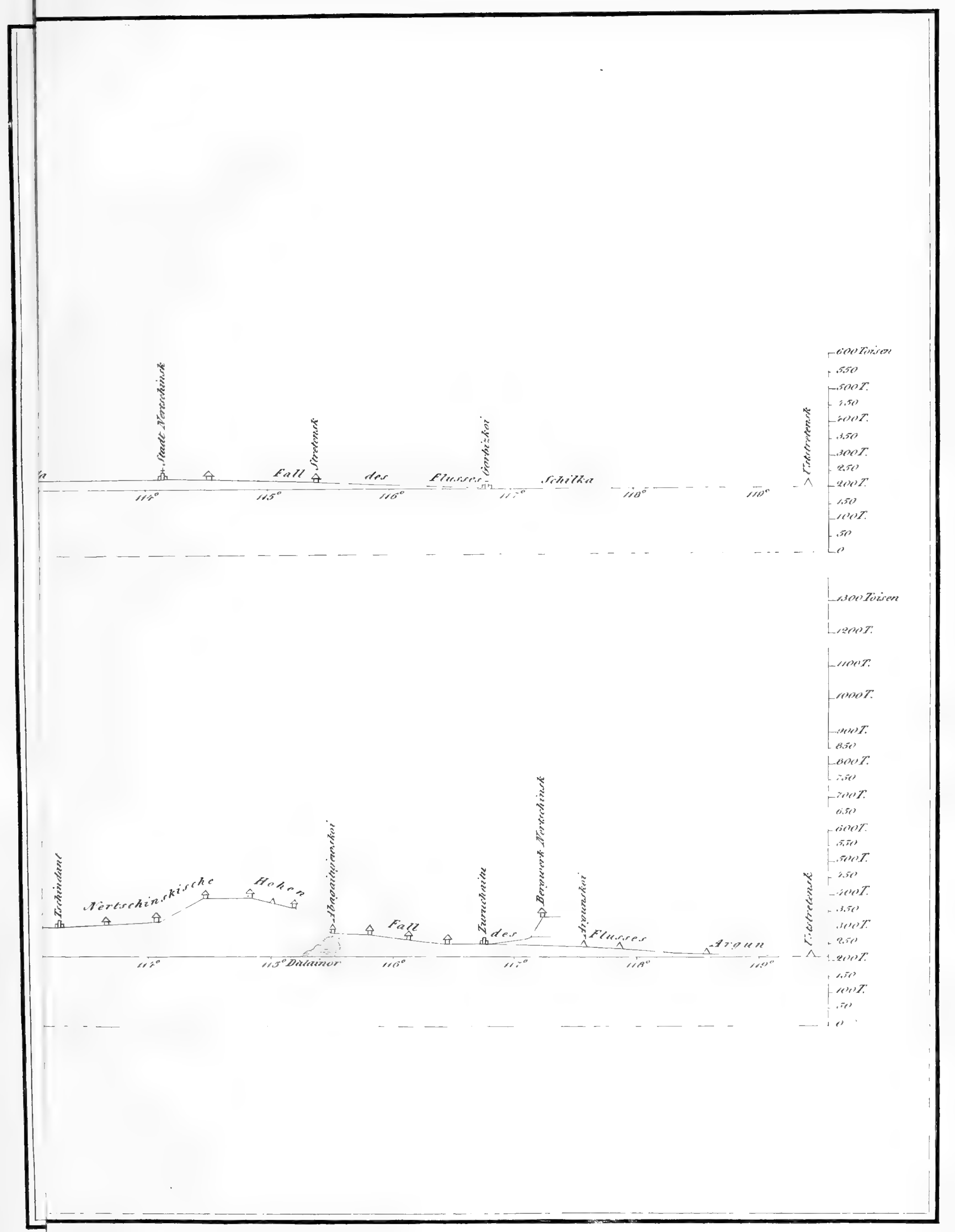

Karte
der Magnetischen Declinationen
in Südost-Sibirien und in der Mongolei
Irkutsk
Kiachta
Pekin

60°
100°
105°
110°
115°
120°
60°
45°
45°
40°
40°
100°
105°
110°
115°
120°
61.44 1,543 Urgyn
61.22 1,559 Ergi
61.12 1,542 Kukuderissu
60.42 1,530 Sendshi
61°3' 1,579 Charatuin Sudshi
60°17' 1,516 Gaschun
60.18' 1,553 Batchay
60.13 1,520 Kutull
59.22 1,509 Zsamein-Chuduck
59°14' 1,538 Kulchuduck
59°3' 1,538 Schara Budurguna
58.49 1,508 Mingan
58°25' 1,513 Zackildack
58°5' 1,495 Sudshi
57°24' 1,505 Zsamein-Usu
57.4' 1,489 Tulgha
56.41 1,473 Zagan Balgassu
56.17 1,459 Chalgan
54°50 1,453 Pekin

Karte der Magnetischen Inclination und Intensität in Südost-Sibirien und in der Mongolei

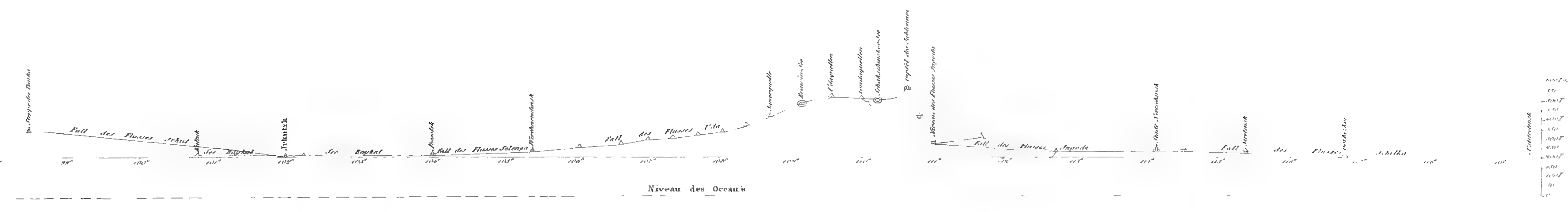
100°
105°
110°
115°
120°
55°
50°
45°
40°

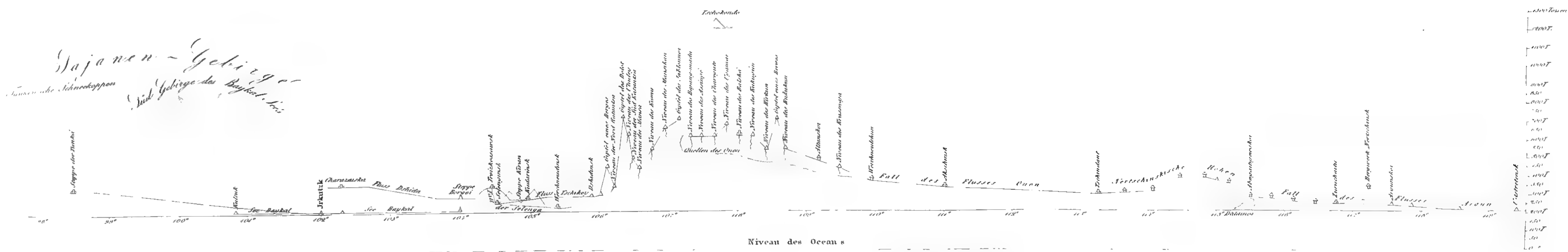
Jrkutzk
Kiachta
Nertschinsk Bergw.
Zuruchaitu
Mingan
Pekin


Stadt Nertschinsk
Stretensk
Gorbizkoi
Fall des Flusses Schilka
114°
115°
116°
117°
118°
119°
Ust Stretensk
600 Toisen
550
500 T.
450
400 T.
350
300 T.
250
200 T.
150
100 T.
50
0
1300 Toisen
1200 T.
1100 T.
1000 T.
900 T.
850
800 T.
750
700 T.
650
600 T.
550
500 T.
450
400 T.
350
300 T.
250
200 T.
150
100 T.
50
0
Tschindant
Nertschinskische Höhen
Abagaituiewskoi
Zuruchaitu
Bergwerk Nertschinsk
Argunskoi
Fall des Flusses Argun
113° Dalainor
Ust Stretensk

Hypsometrische Karte

Südost-Sibiriens unter den Parallelkreisen von 53° und 50°.





CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES
SUR
LES MOMENS DES FORCES.

PAR
M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 7 Novembre 1834.)

Le principe des vîtesses virtuelles, que l'on doit à Jean Bernoulli, est resté stérile en conséquences jusqu'à ce que Lagrange en ait fait la base de sa Mécanique analytique, ouvrage admirable qui a changé la face de la science de l'équilibre et du mouvement. Lagrange ne s'y est point contenté de tirer des conséquences du principe de Jean Bernoulli, mais il a étendu et généralisé le principe même, et l'a fait servir à résoudre les questions les plus difficiles de l'équilibre et du mouvement des systèmes. On avait cru que la matière était épuisée, et que l'on ne pouvait rien ajouter aux théories que Lagrange venait de poser.

Cependant, depuis la publication de la Mécanique analytique *), les géomètres se sont aperçus que le principe des vîtesses virtuelles avait encore plus d'étendue que Lagrange, lui même, ne lui en avait supposé. Ce grand géomètre a pensé, avec Jean Bernoulli, qu'il fallait pour l'équilibre d'un système, que le moment total, c'est-à-dire la somme des momens de toutes les forces, fut égal à zéro pour tous les déplacemens que le système peut recevoir. Or, les géomètres ont re-

*) 1788.

marqué que Lagrange exigeait trop, et qu'il suffisait pour l'équilibre que le moment total ne pût acquérir une valeur positive pour aucun des déplacemens possibles, en sorte que si, pour tous ces déplacemens, la valeur du moment est négative ou zéro, l'équilibre est assuré. Le principe des vîtesses virtuelles présenté de cette manière, acquiert une plus grande généralité, devient susceptible d'un plus grand nombre d'applications, et comprend réellement toutes les questions que l'on puisse se proposer sur l'équilibre des forces.

Il est très surprenant de voir que dans la nouvelle édition de la Mécanique analytique, édition publiée à l'époque où l'on connaissait déjà toute l'étendue du principe des vîtesses virtuelles, Lagrange non seulement n'a fait aucun usage de l'observation, que dans l'équilibre des forces le moment total pouvait acquérir une valeur négative, mais qu'il l'a en quelque sorte écartée quand elle s'est présentée comme d'elle même, dans la démonstration qu'il a donnée du principe des vîtesses virtuelles *); cependant, faute d'y avoir eu égard, ce grand géomètre a incomplètement énuméré les déplacemens possibles dans la plupart des questions de la première partie de la Mécanique analytique, et il est facile de reconnaître que les déplacemens qu'il a négligé de considérer, ne sont empêchés par aucune condition, en sorte que, toutes les équations qu'il a établies pour l'équilibre étant satisfaites, l'équilibre cependant pourrait n'avoir pas lieu.

Nous nous proposons, dans ce mémoire, d'exposer l'analyse relative à l'emploi du principe des vîtesses virtuelles considéré dans toute sa généralité et de compléter la solution de plusieurs questions traitées dans la première partie de la Mécanique analytique.

I. Désignons par P, Q, R ····· les forces appliquées à un système, et par $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots\cdots$ le moment total de ces forces, relatif à un déplacement quelconque. Pour l'équilibre du système, il est nécessaire et il suffit, que la différentielle $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots\cdot$ ne devienne positive pour aucun déplacement possible.

*) Mécanique analytique, édition de 1811, pages 25 et 26.

Il est évident qu'il ne peut être question de trouver les conditions de l'équilibre d'un système qui n'est pas complètement défini. La définition du système doit comprendre l'énumération complète de tous les déplacemens dont il est susceptible, et pour distinguer ces déplacemens de ceux que le système ne peut jamais prendre, à cause des obstacles qui s'y opposent, il faut avoir des conditions, auxquelles les déplacemens possibles seuls satisfont, et que les déplacemens impossibles ne vérifient point.

Les conditions dont il s'agit sont le plus souvent exprimées par des fonctions linéaires des quantités qui fixent les déplacemens du système, fonctions dont aucune ne peut changer de signe quand on ne considère que les déplacemens possibles: ensorte que, si l'on désigne par dL, $dM \cdots\cdots$ ces fonctions, les quantités dL, $dM \cdots\cdots$ seront zéro pour quelques uns des déplacemens possibles, et elles ne le seront pas pour d'autres; mais aucune d'elles ne peut changer de signe que quand on passe des déplacemens possibles à ceux qui ne le sont pas.

Cela posé, il est clair qu'à la place des variations infiniment petites contenues, sous une forme linéaire, dans dp, dq, $dr \cdots\cdots$, on peut introduire d'autres variations $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta \cdots\cdots$ en même nombre, et liées aux premières par des équations du premier degré; chaque différentielle dp, dq, $dr \cdots\cdots$, deviendra fonction linéaire de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta \cdots$, et partant le moment total $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots\cdots$ prendra la forme suivante $Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta \cdots\cdots$ Or comme toutes les différentielles dL, $dM \cdots\cdots$ sont liées, par des équations du premier degré, avec celles qui se trouvent dans dp, dq, $dr \cdots\cdots$, on pourra, parmi les quantités $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta \cdots$ comprendre dL, $dM \cdots$, ce qui donnera pour le moment total une expression de la forme:

$$\lambda dL + \mu dM + \cdots\cdots + Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \cdots\cdots$$

Ayant remplacé le moment total $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots$ par $\lambda dL + \mu dM + \cdots\cdots + Ad\xi + Bd\eta + \cdots\cdots$ voyons ce qu'il faut pour que $\lambda dL + \mu dM + \cdots\cdots + Ad\xi + Bd\eta + \cdots$ soit zéro ou négatif pour les déplacemens possibles et ne puisse devenir positif pour aucun de ces déplacemens.

Pour cela, passons de tous les déplacemens imaginables au seuls déplacemens possibles; les quantités dL, $dM\cdots$ ne pourront plus changer de signes, pouvant devenir zéro; mais les différentielles $d\xi$, $d\eta\cdots$ resteront aussi arbitraires que si l'on considérait tous les déplacemens imaginables; et l'on pourra disposer de ces différentielles de manière à donner à la fonction $\lambda dL + \mu dM + \cdots + Ad\xi + Bd\eta + \cdots$ le signe que l'on veut: donc le moment total ne pourra conserver un même signe pour tous les mouvemens possibles, à moins que l'on n'aie $Ad\xi + Bd\eta + \cdots = o$, quelles que soient $d\xi$, $d\eta\cdots$, ce qui donne séparément $A = o$, $B = o\cdots$. Ces équations renferment souvent toutes les conditions de l'équilibre du système, elles en renferment toujours quelques unes. Mais comme, évidemment, elles reviennent toutes à l'égalité $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = \lambda dL + \mu dM + \cdots$, qui doit avoir lieu pour tous les déplacemens imaginables, on peut ne considérer que cette inégalité.

Ayant trouvé

$$Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = \lambda dL + \mu dM + \cdots$$

pour tous les déplacemens imaginables, ne considérons de nouveau que les déplacemens possibles. Comme dL, $dM\cdots$, ne changeant pas de signes, peuvent devenir zéro, il est clair que la quantité $\lambda dL + \mu dM + \cdots$ sera négative ou zéro si l'on donne aux facteurs λ, $\mu\cdots$ les signes respectivement contraires à ceux des différentielles dL, $dM\cdots$, et de plus, il est visible que $\lambda dL + \mu dM + \cdots$ ne restera négative que dans cette hypothèse; on pourra donc regarder comme seconde et dernière condition de l'équilibre, que les signes de λ, $\mu\cdots$ soient respectivement contraires à ceux de dL, $dM\cdots$; ainsi l'équilibre du système éxige que l'on ait, pour tous les déplacemens imaginables,

$$Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = \lambda dL + \mu dM + \cdots$$

et que λ, $\mu\cdots$ obtiennent les signes contraires à ceux des différentielles dL, $dM\cdots$ rapportées aux déplacemens possibles. En transportant tous les termes d'un même côté, les conditions de l'équilibre d'un système quelconque seront exprimées

1mo par l'équation

$$o = Pdp + Qdq + Rdr + \cdots + \lambda dL + \mu dM + \cdots$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacemens imaginables.

2do par la condition que les quantités λ, $\mu \cdots$ aient respectivement les mêmes signes que les différentielles dL, $dM \cdots$ pour les déplacemens possibles. Il est évident que si une ou plusieurs des quantités dL, $dM \cdots$ ne pouvait être que zéro, pour les déplacemens possibles, les signes des facteurs qui répondent à ces quantités seraient indifférens. —

II. Pour appliquer les considérations précédentes à quelques exemples particuliers, rapportons le système aux coordonnées rectangles, et désignons par X, Y, Z les forces parallèles aux axes, appliquées à un point du système. Si l'on représente par dx, dy, dz les projections d'un déplacement sur les axes coordonnés, le trinome $Xdx + Ydy + Zdz$ exprimera le moment pris en ne considérant qu'un seul point du système, et la somme

$$\Sigma\, (Xdx + Ydy + Zdz)$$

étendue à tous les points, représentera la valeur du moment total.

Cela posé, désignons par dL, $dM \cdots$ les fonctions linéaires de dx, dy, $dz \cdots$ qui, par la nature du système, ne peuvent changer de signe qu'en passant des déplacemens possibles à ceux qui ne le sont pas; nous aurons, pour l'équilibre, l'équation

$$o = \Sigma\, (Xdx + Ydy + Zdz) + \lambda dL + \mu dM + \cdots$$

qui doit avoir lieu pour toute valeur imaginable de dx, dy, $dz \cdots$; et dans laquelle λ, $\mu \cdots$ ont respectivement les mêmes signes que les fonctions dL, $dM \cdots$ rapportées aux déplacemens possibles. —

III. Considérons, pour premier exemple, l'équilibre d'un point m posé sur une surface; désignons par $L = o$ l'équation de la surface; les coordonnées de m y doivent satisfaire, en les y mettant et en désignant par dL la variation de L, due à un déplacement quelconque de m; nous aurons, pour l'équilibre de ce point,

$$o = Xdx + Ydy + Zdz + \lambda dL.$$

Pour déterminer le signe de dL, par conséquent celui de λ, observons que la surface $L = o$ partage l'espace en deux parties qu'il est facile de distinguer, car dans l'une, la quantité L est plus grande que zéro, et dans l'autre, elle est plus petite. Supposons que le point m ne peut se déplacer que dans l'espace où L est plus grand que zéro, et sur la surface même. Il s'en suivra que, pour les déplacemens possibles, la fonction L conservera sa valeur, ou bien augmentera, en sorte que dL, toujours pour les déplacemens possibles, sera zéro ou positive, et ne pourra devenir négative que pour les déplacemens impossibles; donc, la quantité λ doit être positive.

En désignant par x, y, z les coordonnées du point m, et en considérant L comme une fonction de x, y, z, on aura

$$dL = \frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz$$

et par suite, l'équation de l'équilibre donnera

$$X + \lambda \frac{dL}{dx} = o$$

$$Y + \lambda \frac{dL}{dy} = o$$

$$Z + \lambda \frac{dL}{dz} = o,$$

ou bien

$$-\lambda = \frac{X}{\frac{dL}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dL}{dz}} = \frac{-\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

On a donné le signe — à la dernière fraction, parce que chacune des trois premières, à cause de λ positive, est négative. Si le point était assujetti à rester sur la surface, les trois premières fonctions, et par conséquent la quatrième aussi, auraient pu avoir un signe quelconque. C'est en effet en cela que consiste la différence entre les conditions de l'équilibre d'un point posé sur la surface, et celles d'un point assujetti à y rester.

IV. Comme seconde application, nous exposerons l'équilibre du système connu sous le nom de polygone funiculaire. Désignons par n le nombre des angles, que

nous distinguerons les uns des autres par les numéros $1, 2, 3 \cdots n$, et représentons, pour l'angle portant le numéro i, par x_i, y_i, z_i les coordonnées, par X_i, Y_i, Z_i, les forces parallèles aux axes, et par r_i la partie de la corde comprise entre les deux angles consécutifs i et $i+1$. Les mêmes lettres x, y, z, X, Y, Z, r, numérotées convenablement, exprimeront, pour tous les autres angles, ce que $x_i, y_i, z_i, X_i, Y_i, Z_i, r_i$ représentent pour l'angle i.

Cela posé, le moment total pourra s'exprimer par la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

et en même temps, à cause de l'inextensibilité de la corde, il faut que la différentielle dr_i ne puisse acquérir de valeur positive que pour les déplacemens que le système ne peut jamais recevoir, et cela doit être, quel que soit le numéro i. Donc, si nous désignons par λ_i une quantité négative, la condition relative à l'angle i donnera dans l'équation générale de l'équilibre un terme $\lambda_i dr_i$; tout autre angle fournissant des termes pareils, on pourra exprimer tout ce que les *équations de condition* introduisent dans la formule générale de l'équilibre par $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i dr_i$, ou bien, par $\sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda_i dr_i$, pourvu que l'on fasse $\lambda_n = o$.

D'après ce qui précède, l'équation de l'équilibre du système que nous considérons, deviendra

$$(A) \qquad o = \sum_{1}^{n+1} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i + \lambda_i dr_i),$$

et de plus, la quantité λ_i doit être négative, quel que soit le numéro i.

L'équation (A) devant avoir lieu quels que soient les différentielles dx_1, dy_1, dz_1, dx_2, dy_2, dz_2, ... on doit égaler séparément à zéro les coëfficiens de toutes ces différentielles, ce qui donnera, quel que soit i

$$o = X_i + \lambda_i \frac{dr_i}{dx_i} + \lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dx_i}$$
$$o = Y_i + \lambda_i \frac{dr_i}{dy_i} + \lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dy_i}$$

$$o = Z_i + \lambda_i \frac{dr_i}{dz_i} + \lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dz_i}$$

pourvu, toutefois, que l'on fasse $\lambda_0 = o$.

Or, il est facile de voir, que $\frac{dr_{i-1}}{dx_i} = -\frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}}$, $\frac{dr_{i-1}}{dy_i} = -\frac{dr_{i-1}}{dy_{i-1}}$, $\frac{dr_{i-1}}{dz_i} = -\frac{dr_{i-1}}{dz_{i-1}}$; donc, les équations précédentes deviendront

$$o = X_i + \lambda_i \frac{dr_i}{dx_i} - \lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}}$$

$$o = Y_i + \lambda_i \frac{dr_i}{dy_i} - \lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dy_{i-1}}$$

$$o = Z_i + \lambda_i \frac{dr_i}{dz_i} - \lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dz_{i-1}},$$

ou bien, en faisant usage de la notation des différences finies

$$o = X_i + \Delta\left(\lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}}\right)$$

$$o = Y_i + \Delta\left(\lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dy_{i-1}}\right)$$

$$o = Z_i + \Delta\left(\lambda_{i-1} \frac{dr_{i-1}}{dz_{i-1}}\right),$$

d'où, en intégrant avec le signe Σ, et en faisant attention que $\lambda_0 = o$,

$$\overset{s+1}{\underset{1}{\Sigma}} X_i = -\lambda_s \frac{dr_s}{dx_s}$$

(B) $$\overset{s+1}{\underset{1}{\Sigma}} Y_i = -\lambda_s \frac{dr_s}{dy_s}$$

$$\overset{s+1}{\underset{1}{\Sigma}} Z_i = -\lambda_s \frac{dr_s}{dz_s}.$$

En supposant $s = n$, on trouve

$$o = \overset{n+1}{\underset{1}{\Sigma}} X_i, \quad o = \overset{n+1}{\underset{1}{\Sigma}} Y_i, \quad o = \overset{n+1}{\underset{1}{\Sigma}} Z_i;$$

en faisant, pour abréger,

$$\overset{s+1}{\underset{1}{\Sigma}} X_i = A_s, \quad \overset{s+1}{\underset{1}{\Sigma}} Y_i = B_s, \quad \overset{s+1}{\underset{1}{\Sigma}} Z_i = C_s, \quad \sqrt{(A^2_s + B^2_s + C^2_s)} = R_s,$$

et en observant que $-\frac{dr_s}{dx_s}$, $-\frac{dr_s}{dy_s}$, $-\frac{dr_s}{dz_s}$ représentent les cosinus des angles λ_s, μ_s, ν_s que le côté r_s du polygone fait avec les axes coordonnés, les équations (B) se réduiront à

$$\lambda_s = \frac{A_s}{\cos. \lambda_s} = \frac{B_s}{\cos. \mu_s} = \frac{C_s}{\cos. \nu_s} = -R_s.$$

On doit donner le signe moins à la résultante R_s, parce que la quantité λ_s, et par suite, les fractions $\frac{A_s}{\cos. \lambda_s}$, $\frac{B_s}{\cos. \mu_s}$, $\frac{C_s}{\cos. \nu_s}$ sont négatives. Le signe de λ_s, et par conséquent celui de R_s, serait indifférent, si le polygone était formé de verges raides, en sorte que les équations de l'équilibre d'un semblable polygone seraient

$$\frac{A_s}{\cos. \lambda_s} = \frac{B_s}{\cos. \mu_s} = \frac{C_s}{\cos. \nu_s} = \pm R_s.$$

Ainsi le principe des vîtesses virtuelles fait bien distinguer le cas des verges raides de celui des cordes flexibles.

Si les points d'application des forces, au lieu d'être fixement attachés, pouvaient glisser le long de la corde, les conditions précédentes ne seraient plus suffisantes pour le maintien de l'équilibre; en effet, on pourrait alors déranger le système de manière que quelques unes des longueurs $r_1, r_2 \cdots\cdots$ augmentant, il n'y aurait que leur somme $r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_{n-1}$ qui ne saurait croître pour aucun des déplacemens possibles, ensorte qu'il n'y aurait qu'une seule condition

$$dr_1 + dr_2 + \cdots\cdots\cdots + dr_{n-1} < o$$

à laquelle les déplacemens possibles doivent satisfaire. D'où il est facile de conclure que ce nouveau problème peut être regardé, quant à la solution, comme un cas particulier de celui qui précède, et qu'il s'en déduit en faisant

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots\cdots = \lambda_{n-1}.$$

V. Nous parlerons encore de l'équilibre d'un fil flexible, dont chaque élément est sollicité par des forces données; cette question est comprise, comme la précédente, dans celle du polygone funiculaire, et elle peut s'en déduire en supposant que chaque côté du polygone devient infiniment petit, et le nombre n infiniment grand. Mais nous allons la traiter directement, par la considération des infiniment petits. Nous remarquerons d'abord que cette question dépend de la considération de deux espèces de différentielles, la première, comme toutes celles que nous avons eu à considérer jusqu'à présent, est relative aux déplacemens infiniment petits qu'on peut concevoir dans le système, la seconde se rapporte au passage d'un point du fil au point infini-

ment voisin; nous marquerons les dernières par la lettre d, et nous désignerons les différentielles de la première espèce, comme dans la Mécanique analytique, par la lettre δ.

Cela posé, soient Xdm, Ydm, Zdm les forces parallèles aux axes, appliquées à l'élément dm du fil, élément qui répond aux coordonnées x, y, z. En ne considérant que ce seul élément, le moment sera $(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm$, la somme $S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm$, étendue à tous les élémens du fil, exprimera le moment total.

A cause de l'inextensibilité du fil, l'élément ds de sa longueur ne pourra, dans tout déplacement virtuel, que diminuer ou rester le même. Or, comme $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, la variation δds, due à un déplacement quelconque, aura pour expression $\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}$; donc cette dernière quantité, pour les déplacemens possibles, ne peut être que zéro ou négative; par conséquent, en prenant une quantité négative λ, l'élément ds fournira dans l'équation de l'équilibre le terme $\lambda \left(\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}\right)$; chaque autre élément du fil fournissant un terme pareil, on aura pour l'équilibre l'équation suivante:

$$o = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm + \lambda \left(\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}\right)\right];$$

qui doit avoir lieu pour tous les déplacemens imaginables; en poursuivant le calcul comme dans la Mécanique analytique *), on parviendra au résultat de ce grand ouvrage, à cela près, que notre analyse donne une condition de plus, savoir, que la fonction λ doit nécessairement être négative, sans quoi il n'y aurait pas d'équilibre, quand même toutes les autres conditions seraient satisfaites.

Nous avons supposé tacitement que le fil était entièrement libre; mais s'il y avait des conditions particulières à remplir relativement à ses extrémités, il faudrait modifier, conformément à ces conditions, l'équation

$$o = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm + \lambda \left(\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}\right)\right]$$

de l'équilibre.

---

*) Pages 137, 138, 139 et 140.

Si, par exemple, les extrémités étaient fixes, alors, en désignant par x', y', z' les coordonnées du premier point de la corde et par x'', y'', z'' celles du dernier point, on aurait eu pour tous les déplacemens virtuels $\delta x' = o$, $\delta y' = o$, $\delta z' = o$, $\delta x'' = o$, $dy'' = o$, $dz'' = o$, ce qui ajouterait à l'équation générale de l'équilibre la fonction

$$a'\delta x' + b'\delta y' + c'\delta z' + a''\delta x'' + b''\delta y'' + c''\delta z''$$

dans laquelle les quantités a', b', c', α'', b'', c'' sont indéterminées de valeur et de signe, et nous aurions pour tous ces déplacemens imaginables

$$o = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \lambda\left(\frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds}\right)\right]$$
$$+ a'\delta x' + b'\delta y' + c'\delta z' + a''\delta x'' + b''\delta y'' + c''\delta z''.$$

Dans cette équation, toutes les différentielles marquées par δ, y compris celles qui se rapportent aux limites, sont absolument arbitraires. Au moyen de l'intégration par parties, la formule précédente se réduira à

$$S\left[\left(Xdm - d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}\right)\delta x + \left(Ydm - d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}\right)\delta y + \left(Zdm - d\cdot\lambda\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right]$$
$$+ \left(a'' + \lambda''\frac{dx''}{ds''}\right)\delta x'' + \left(b'' + \lambda''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta y'' + \left(c'' + \lambda''\frac{dz''}{ds''}\right)\delta z''$$
$$+ \left(a' + \lambda'\frac{dx'}{dz'}\right)\delta x' + \left(b' + \lambda'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta y' + \left(c' + \lambda'\frac{dz'}{ds'}\right)\delta z';$$

les quantités marquées d'un accent se rapportent au commencement, et celles qui sont marquées de deux accents se rapportent à la fin de la corde. En égalant séparément à zéro les coëfficiens de tous les δ, on trouvera d'abord ces trois équations relatives à tous les points du fil

$$o = Xdm - d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}$$
$$o = Ydm - d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}$$
$$o = Zdm - d\cdot\lambda\frac{dz}{ds},$$

puis, on aura pour les extrémités les conditions

$$o = a' - \lambda'\frac{dx'}{ds'},\quad o = b' - \lambda'\frac{dy'}{ds'},\quad o = c' - \lambda'\frac{dz'}{ds'}$$
$$o = a'' + \lambda''\frac{dx''}{ds''},\quad o = b'' + \lambda''\frac{dy''}{ds''},\quad o = c'' + \lambda''\frac{dz''}{ds''}$$

auxquelles on peut toujours satisfaire au moyen des indéterminées a', b', c', a'', b'', c''.

Si une des extrémités, par exemple la première, était assujettie à rester sur une surface $L = o$, L étant une fonction de x', y', z', et l'autre extrémité était libre, l'équation de l'équilibre serait

$$o = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\left(\frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}\right)\right] + \mu\delta L$$

μ étant une quantité indéterminée de valeur et de signe. Mais, si le point (x', y', z') était seulement posé sur la surface $L = o$, alors le signe de la quantité μ serait fixé, (Voyez le paragraphe III.)

VI. Pour dernière application, nous dirons quelques mots de l'équilibre des fluides incompressibles. En désignant par Xdm, Ydm, Zdm les composantes parallèles aux axes de la force appliquée à une molécule dm du liquide, et, comme plus haut, par δx, δy, δz les projections d'un déplacement quelconque de l'élément dm sur les axes coordonnés, la molécule dm fournira, pour le moment total, le terme $(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm$; la somme

$$S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm,$$

étendue à toute la masse liquide, exprimera la valeur du moment total pour un déplacement quelconque. On peut partager en trois classes tous les déplacemens qu'on peut imaginer dans un liquide incompressible, 1° les déplacemens accompagnés de la diminution du volume, 2° les déplacemens où le volume ne change pas, 3° les déplacemens accompagnés de l'augmentation du volume. Les déplacemens de la première espèce sont impossibles par la nature du système, il est inutile de s'en occuper. Quand aux deux autres espèces: il faut, pour l'équilibre, que le moment total relatif à ces déplacemens, soit zéro ou négatif.

En désignant par $dxdydz$ le volume de la molécule dm, la variation $\delta(dxdydz)$ de ce volume, due à un déplacement quelconque, peut être exprimée, comme on le sait, par $\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) dxdydz$; pour les déplacemens possibles la variation précédente doit être zéro ou positive; donc, d'après la théorie générale, en prenant une quantité positive p, fonction de x, y, z, on aura pour tous les déplacemens imaginables

$$o = S\left[\varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + p\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)\right] dxdydz,$$

ϱ étant la densité du liquide.

Il en résultera pour toute la masse liquide

$$\frac{dp}{dx} = \varrho X, \quad \frac{dp}{dy} = \varrho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \varrho Z.$$

et l'on aura $p = o$ pour toute l'étendue de sa surface. Notre analyse est la même que celle de la Mécanique analytique *) à cela près, que celle-ci ne fait pas voir que la quantité p doit nécessairement être positive pour tous les points du liquide, et que si cette condition n'est pas remplie, le liquide se déplacera de manière à ne plus former une masse continue.

Lagrange n'a pas considéré les déplacemens accompagnés de l'augmentation du volume, et ne les a empêchés par aucune condition, c'est pourquoi toutes celles qu'il a admises, étant remplies, néanmoins le fluide pourrait se briser. Pour en donner un exemple, il n'y a qu'à considérer un liquide, dont chaque molécule est sollicitée par une force répulsive, émanant d'un centre fixe, et dont la surface n'éprouve aucune pression. Admettons que la force répulsive soit proportionelle à la distance; nous aurons $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, et

$$dp = \varrho\,(xdx + ydy + zdz);$$

en supposant la densité constante, nous trouverons

$$p = \frac{\varrho\,(x^2 + y^2 + z^2)}{2} + C,$$

ou bien, en faisant $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

$$p = \frac{\varrho r^2}{2} + c.$$

Pour la surface libre, on a $o = \frac{\varrho r^2}{2} + c$; donc cette surface est sphérique; elle a pour centre le foyer de la force répulsive. En désignant par R son rayon, nous aurons $c = -\frac{\varrho R^2}{2}$, et par conséquent

$$p = \frac{\varrho}{2}\,(r^2 - R^2).$$

---

*) Page 194 et suivantes.

Ainsi on pourrait croire, d'après l'analyse précédente, que l'équilibre pourrait subsister avec une surface sphérique; cependant, comme rien n'empêche aux molécules du liquide de se dissiper dans l'espace, la force répulsive les dissipera nécessairement. Or, d'après l'analyse que nous avons établie, l'équilibre est impossible, parce que la quantité $p = \frac{\varrho}{2}(r^2 - R^2)$ est négative.

Mais si la force était attractive, et que la sphère fût creuse, l'équilibre aurait lieu. En effet, on trouverait dans ce cas

$$dp = -\varrho r dr$$

d'où

$$p = C - \varrho \frac{r^2}{2}$$

pour la surface la plus éloignée du centre; on trouve

$$o = C - \frac{\varrho R^2}{2}$$

et, en retranchant,

$$p = \frac{\varrho}{2}(R^2 - r^2).$$

donc la pression est positive. Si l'on désigne par r_o le rayon de la surface la plus voisine du centre, on aura pour la pression en chaque point de cette surface

$$\frac{\varrho}{2}(R^2 - r^2_o).$$

Ainsi une couche sphérique, dont toutes les molécules seraient sollicitées par une force attractive émanant du centre de la couche, resterait en équilibre, tandis que si la force est répulsive, la même couche se disperserait dans l'espace. Ce résultat ne doit nullement nous surprendre; car les systèmes, dont nous avons considéré l'équilibre, sont tels que les forces qui s'y détruisent mutuellement étant renversées, c'est-à-dire recevant les directions contraires à celles qu'elles avaient d'abord, l'équilibre ne subsistera plus, et que, si un système de forces est l'équivalent d'un autre système, ce dernier ne le sera pas du premier. Par un système équivalent d'un autre système, nous entendons celui dont toutes les forces, étant renversées, équilibreraient les forces de l'autre système.

VII. *) Nous terminerons ce mémoire par quelques considérations relatives au mouvement des systèmes.

Si les forces P, Q, $R\cdots\cdot$ (art. I.) ne se font pas équilibre, le moment total $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdot$ deviendra nécessairement positif pour quelques uns des déplacemens possibles; et partant l'équation

$$o = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdot + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdot$$

n'aura pas lieu. Mais si l'on désigne par P', Q', $R'\cdots\cdot$ les forces *dynamiques* du système, et par $P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \cdots\cdot$, le moment de ces forces, on aura, pour tous les déplacemens imaginables,

$$o = P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \cdots + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdot + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots$$

car les forces dynamiques équilibrent toujours les forces motrices.

Nous appelons, d'après M. Ampère, force dynamique, la réaction que la matière oppose à tout changement du mouvement, c'est-à-dire, au changement de vîtesse, comme au changement de direction. Si un système quelconque est en repos ou en mouvement rectiligne et uniforme, les forces dynamiques sont évidemment nulles; elles ne le sont pas, si le mouvement est varié; mais elles sont toujours capables de détruire les forces motrices, ou bien, si l'on veut, elles peuvent toujours détruire ces dernières.

Désignons par m, m', $m''\cdots$ les masses dont le système que nous considérons est composé, et représentons par x, y, z les coordonnées rectangles de la masse m, par x', y', z' celles de la masse m', et ainsi de suite; toutes ces coordonnées sont relatives aux mêmes axes. Si de plus, nous désignons par t le temps, écoulé depuis une époque fixée, et par la caractéristique d les différences relatives à t, le moment de la force dynamique relative à la masse m aura pour expression $-\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}m$, et la somme $-\Sigma\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}m$, étendue à toutes les masses m, m', $m''\cdots\cdot$ représentera le moment total des forces dynamiques, en sorte que

$$P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \cdots\cdot = -\Sigma\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}m;$$

donc la formule

$$o = P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \cdots\cdot + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdot + \lambda\delta L + \mu\delta M\cdots$$

*) Le § VII et les suivans ont été ajoutés pendant l'impression.

deviendra

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdots$$

Cette équation est celle de Lagrange à cela près, que dans la Mécanique analytique, les quantités $\lambda, \mu \cdots$ ne sont connues ni en valeurs ni en signes, ce qui vient de ce que Lagrange ne considère que les systèmes dont les déplacemens possibles satisfont à des équations; or, il pourrait arriver dans le mouvement, comme dans l'équilibre, que les déplacemens dont nous parlons ne satisfassent à aucune équation; alors les signes des quantités $\lambda, \mu \cdots\cdots$ seraient connus d'avance, car ils doivent être respectivement les mêmes que ceux des fonctions $\delta L, \delta M \cdots\cdots$ rapportées aux déplacemens possibles.

La formule

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdots,$$

en y égalant séparément à zéro les coefficients de $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \cdots$, donnera pour déterminer les inconnues $x, y, z, x' \cdots\cdots \lambda, \mu \cdots\cdots$, autant d'équations qu'il y a de coordonnées $x, y, z, x' \cdots$, et si l'on ajoute à ces équations celles-ci $dL = o$, $dM = o \cdots$ dont le nombre est égal à celui des quantités $\lambda, \mu \cdots$, on aura en tout autant d'équations que d'inconnues, et ce sera un problème de calcul intégral que la détermination de ces inconnues. Nous désignons par $dL, dM \cdots\cdots$ ce que deviennent respectivement $\delta L, \delta M \cdots\cdots$ quand on y fait $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, $\delta x' = dx' \cdots\cdots$

VIII. Mais il y a ici une remarque essentielle à faire: c'est que, comme la plupart des déplacemens possibles ou virtuels ne rendent pas zéro les fonctions δL, $\delta M \cdots\cdots$, il se pourrait qu'à partir d'une certaine époque, les déplacemens effectifs $dx, dy \cdots\cdots$ ne satisfassent pas non plus à quelques unes des équations $dL = o$, $dM = o \cdots\cdots$, car $dx, dy \cdots\cdots$ étant respectivement compris parmi lss valeurs que $\delta x, \delta y \cdots\cdots$ peuvent recevoir sans cesser d'appartenir aux déplacemens possibles, on conçoit que les différences $dx, dy \cdots\cdots$ pourront bien devenir respectivement égales à celles des variations $\delta x, \delta y \cdots\cdots$ qui ne donnent pas $\delta L = o$, $\delta M = o \cdots$; dès lors, le nombre d'équations qui servent à déterminer le mouvement, semble devenir

moindre que celui des inconnues. Cette circonstance, on doit l'avoir en vue toutes les fois qu'on traite le mouvement d'un système dont les déplacemens possibles ne peuvent pas s'exprimer par des équations, et il est très important d'ajouter aux méthodes de la Mécanique analytique les considérations propres à établir toutes les équations nécessaires à la détermination du mouvement d'un pareil système.

Pour remplir cet objet, on posera toutes les équations

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdot + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdot$$

$dL = o$, $dM = o \cdots\cdot$, comme si l'on était assuré que les fonctions dL, $dM \cdots\cdot$ seront chacune égale à zéro dans tout le cours du mouvement, et l'on cherchera à résoudre ces équations par les règles du calcul intégral. En ayant tiré les valeurs de λ, $\mu \cdots\cdot$, on fera attention aux signes de ces quantités; si leurs signes sont, pour toutes les valeurs de t, respectivement les mêmes que ceux des fonctions δL, $\delta M \cdots$ rapportées aux déplacemens possibles, on est assuré que les déplacemens effectifs satisfont, pendant tout le cours du mouvement, aux équations $dL = o$, $dM = o \cdots$ et que la solution qu'on aura donné à la question est exacte et complète. Mais il en sera différemment, si, à partir d'un instant $t = \tau$, un ou plusieurs facteurs λ, $\mu \cdots$ reçoivent des signes contraires à ceux qu'ils devraient avoir pour l'équilibre des forces motrices et dynamiques. Ces puissances ne se détruisant plus, il faut en conclure que, depuis $t = \tau$, le mouvement qui fournit les forces dynamiques et que l'on a présupposé, ne peut pas avoir lieu, car les forces dynamiques doivent toujours détruire les forces motrices qui leur répondent. Or, comme l'on n'a présupposé que les équations $dL = o$, $dM = o \cdots\cdot$, il s'en suit que quelques unes d'entr'elles n'auront pas lieu, et ce seront évidemment les équations correspondantes à ceux des facteurs λ, $\mu \cdots$ qui auront changé leurs signes; on supprimera donc ces équations, mais en même temps on effacera dans la formule

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdot + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdot$$

et par conséquent, dans toutes celles qui en dérivent; tous les termes contenant ces mêmes facteurs, c'est-à-dire les facteurs où le changement des signes a eu lieu. On

trouvera de cette manière pour déterminer le mouvement, à partir de l'instant $t = \tau$, autant d'équations que d'inconnues, car, d'après ce qui précède, chaque équation $dL = o$, $dM = o \cdots\cdots$ qui disparaît, en quelque sorte emporte avec elle une inconnue de la question.

On peut remarquer que l'on aura, pour toutes les valeurs de t,

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdots,$$
$$\lambda dL = o, \; \mu dM = o \cdots\cdots$$

ensorte, que le nombre d'équations sera toujours le même que celui des inconnues; mais les équations changeront à diverses époques, car, pour un certain intervalle de temps, il faudra poser, par exemple, $dL = o$, et pour un autre intervalle, $\lambda = o$; il est visible d'ailleurs que λ deviendra zéro quand dL cessera de l'être.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple, supposons que l'intégration des équations $\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots$ $dL = o$, $dM = o \cdots\cdots$ et la discussion des valeurs de λ, $\mu \cdots\cdots$ fasse reconnaître que tous ces facteurs, depuis le commencement du mouvement jusqu'à $t = \tau$, aient les signes qu'exige l'équilibre des forces motrices avec les dynamiques, mais, qu'à l'instant $t = \tau$, le facteur λ devienne zéro, et puis ce même facteur change de signe. Le mouvement depuis $t = o$ jusqu'à $t = \tau$ sera défini par les équations

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \cdots\cdots$$
$$dL = o, \; dM = o \cdots\cdots$$

et il le sera par celles-ci

$$\Sigma \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2zdz}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots\cdots + \mu\delta M + \cdots\cdots, \; dM = o \cdots,$$

depuis $t = \tau$.

On vient de voir que les équations du mouvement peuvent changer à différentes époques; mais cela n'arrive pas à toutes les équations: il y en a qui restent inaltérables dans tout le cours du mouvement; celle par exemple, qui est connue sous le nom de principe des forces vives; on l'obtient en remplaçant dans la formule générale de la dynamique, la caractéristique δ par d. Ce changement de caractéristique

en faisant attention aux conditions $\lambda dL = o$, $\mu dM = o \cdots\cdots$ qui subsistent à toutes les époques du mouvement, conduit à l'équation

$$d\Sigma \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} m = 2 (Pdp + Qdq + Rdr + \cdots\cdots),$$

qui aura lieu quel que soit t. Il en sera de même pour toutes les équations qui, comme la précédente, sont indépendantes des déplacemens possibles du système; ainsi, toutes les fois que le principe des aires et celui du centre de gravité peuvent avoir lieu, les équations qui les expriment subsisteront pendant toute la durée du mouvement.

IX. Pour donner une idée de l'application de la théorie précédente, considérons le mouvement d'un point pesant posé sur un cercle vertical. En prenant les axes coordonnés des x et y dans le plan du cercle, le premier horizontalement et le second verticalement de bas en haut, l'origine au centre, l'équation du mouvement sera

$$\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y}{dt^2} = - g\delta y + \lambda (x\delta x + y\delta y), \ \lambda (xdx + ydy) = o.$$

λ ne peut jamais devenir négative, car pour les déplacemens possibles, la fonction $x^2 + y^2$ ne peut que rester la même ou augmenter. Supposons d'abord $xdx + ydy = o$. En faisant $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, nous aurons

$$d \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + 2gdy = o,$$

d'où, en intégrant et en admettant que le mouvement commence du repos,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g (y_o - y)$$

y_o étant l'ordonnée de la position initiale du point. En posant $\delta x = x$, $\delta y = y$, et en désignant par r le rayon du cercle, on aura

$$\frac{xd^2x + yd^2y}{dt^2} + gy = \lambda r^2$$

or

$$d (xdx + ydy) = xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = o,$$

donc

$$\lambda r^2 = gy - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = g (3y - 2y_o).$$

Il est visible, par cette valeur de λ, que le mouvement ne saurait se faire dans le cercle un seul instant, si y_o n'est pas positif. Supposons en conséquence $y_o > o$; il

*

est facile de voir que y diminuera avec le temps, car, si l'on pose $y = r$ cos. θ, $x = r$ sin. θ, on trouvera, par l'équation $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g\,(y - y_0)$, que $\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{r}$ (cos. θ_0 — cos. θ), θ_0 étant la valeur initiale de θ, d'où $\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{r}}\sqrt{(\text{cos.}\,\theta_0 - \text{cos.}\,\theta)}$; il faut d'abord que $\theta_0 < \theta$, donc θ doit augmenter au commencement du mouvement, puis θ ne peut pas commencer à diminuer avant que $\frac{d\theta}{dt}$ ne devienne zéro ; ainsi θ ne diminuera pas avant de devenir $= 2\pi - \theta_0$; donc, il faut poser $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}} \cdot \sqrt{(\text{cos.}\,\theta_0 - \text{cos.}\,\theta)}$ depuis $\theta = \theta_0$ jusqu'à $\theta = 2\pi - \theta_0$; donc y diminuera certainement; car $\frac{dy}{dt} = -r$ sin. $\theta \frac{d\theta}{dt}$, et pourra devenir zéro et même négatif; mais dès que y se réduira à $\frac{2y_0}{3}$, la quantité λ sera égale à zéro, et puis plus tard elle deviendra négative. Donc le point ne se mouvra dans le cercle que jusqu'à $y = \frac{2y_0}{3}$, et puis il abandonnera le cercle, en sorte que, à partir de $y = \frac{2y_0}{3}$, son mouvement sera donné par l'équation $\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y}{dt^2} + g\delta y = o$, laquelle se décomposera en deux

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + g = o.$$

On peut regarder la vîtesse $\sqrt{\frac{2gy_0}{3}}$ et les coordonnées y_0, $\sqrt{(r^2 - y^2_0)}$ comme appartenant à l'état initial du mouvement, qui aura lieu à partir de $y = \frac{2y_0}{3}$. Nous n'entrerons point dans d'autres détails relativement à l'exemple particulier que nous avons choisi à cause de sa trop grand, simplicité.

X. Nous avons tacitement supposé dans tout ce qui précède, que les coefficiens de δx, δy, δz, $\delta x' \cdots$, dans les fonctions δL, $\delta M \cdots$ ne renfermaient pas explicitement le temps t. Mais si cette variable y était contenue, les considérations précédentes ne suffiraient pas pour établir toutes les équations du mouvement car les déplacemens effectifs ne seraient pas compris parmi ceux des déplacemens possibles qui satisfont aux équations $\delta L = o$, $dM = o \cdots$; nous n'aurions donc pas $dL = o$, $dM = o \cdots$, et par suite on n'aurait pas à toutes les époques, $\lambda dL = o$, $\mu dM = o \cdots$

En admettant que le temps t entre explicitement dans les coefficiens de δL, $\delta M \cdots$, ces fonctions-elles mêmes seront en quelque sorte mobiles, et l'on peut regarder les quantités $dx, dy, dz, dx' \cdots$ comme composées chacune de deux parties; l'une serait due aux déplacemens des fonctions $\delta L, \delta M \cdots$ et l'autre repondrait aux mouvemens de $m, m' \cdots$ par rapport à ces fonctions. Supposons en conséquence $dx = \Delta x + Dx$, $dy = \Delta y + Dy$, $dz = \Delta z + Dz$, $dx' = \Delta x' + Dx' \cdots$ $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta x' \cdots$ répondant aux déplacemens des fonctions $\delta L, \delta M \cdots$ et Dx, $Dy, Dz, Dx' \cdots$ aux mouvemens des points $m, m' \cdots$ par rapport à ces fonctions. On aura d'abord $DL = o$, $DM = o \cdots$; $DL, DM \cdots$ sont respectivement ce que deviennent $\delta L, \delta M \cdots$ en y faisant $\delta x = Dx$, $\delta y = Dy \cdots$ c'est-à-dire, si l'on a par exemple $\delta L = A\delta x + B\delta y + C\delta z + A'\delta x' + \cdots$ on aura $DL = ADx$ $BDy + CDz + A'Dx' + \cdots$ En mettant pour $Dx, Dy, Dz, Dx' \cdots$ leurs valeurs $dx - \Delta x$, $dy - \Delta y$, $dz - \Delta z$, $dx' - \Delta x' \cdots$ nous aurons $dL = \Delta L$, $dM = \Delta M \cdots$ Or, les quantités $\Delta L, \Delta M \cdots$ doivent être données; en les représentant respectivement par $Tdt, T'dt \cdots$ on aura $dL = Tdt$, $dM = T'dt \cdots$ Ce sont les équations qui remplacent, dans le cas que nous examinons, les formules $dL = o$, $dM = o \cdots$ relatives à l'hypothèse de $\delta L, \delta M \cdots$ indépendantes du temps t On fera de $dL = Tdt$, $dM = T'dt \cdots$ le même usage que de $dL = o$, $dM = o \cdots$ Il pourra aussi arriver qu'à partir d'une certaine époque, qu'on déterminera comme précédemment, les équations $dL = Tdt$, $dM = T'dt$ ne seront pas satisfaites, mais celles-ci $\lambda\,(dL - Tdt) = o$, $\mu\,(dM - T'dt) = o \cdots$ le seront pendant toute la durée du mouvement, et en les combinant avec la formule générale de la dynamique, on aura toujours autant d'équations qu'il en faut pour déterminer complètement le mouvement.

Nous nous proposons de publier un traité de la science de l'équilibre et du mouvement, où nous exposerons en détail ce que nous n'avons fait qu'indiquer dans ce mémoire. On verra, dans notre traité, que l'extension que Lagrange a donné au principe de Jean Bernoulli, extension qui a paru obscure ou inexacte aux plus célèbres géomètres de notre temps, est cependant légitime, et résulte des principes

mêmes de la chose. On y verra aussi que toutes les questions que l'on peut proposer sur l'équilibre ou le mouvement des systèmes se résolvent avec facilité par le principe des vîtesses virtuelles, mais surtout, nous y développerons les conditions de la stabilité de l'équilibre, matière qui, ce me semble, n'a pas été traitée avec toute la généralité et toute l'étendue que l'on peut désirer.

BEOBACHTUNGEN

DER

INCLINATION UND INTENSITÄT DER MAGNETNADEL,

ANGESTELLT

AUF EINER REISE UM DIE WELT AUF DEM SLOOP SENIAWIN

IN DEN JAHREN 1826, 1827, 1828 u. 1829

vom Capitain Fr. B. Lütke.

BERECHNET UND BEARBEITET

VON

E. LENZ.

(Gelesen den 12. October 1834.)

Dem Wunsche des Herrn Capt. Lütke entsprechend, habe ich die magnetischen Beobachtungen, welche derselbe auf seiner Reise um die Welt in den oben angeführten Jahren angestellt hat, die er aber selbst zu bearbeiten durch seine vielfachen, wichtigen Geschäfte verhindert wird, einer strengen Berechnung unterworfen und sie in diejenige Form gebracht, in welcher sie, meiner Meinung nach, für die Bekanntmachung am geeignetsten sind. Die Resultate seiner Beobachtungen hat der Verfasser bereits dem Herrn Professor Hansteen mitgetheilt und sie sind von letzterem auch bei seiner im Jahre 1833 erschienenen Charte der isodynamischen Linien benutzt worden, ohne dass sie jedoch damals bereits diejenigen vollständigen Correctionen erhalten hatten, deren sie fähig sind. Obgleich diese Correctionen im Ganzen den Lauf der Hansteenschen isodynamischen Linien nicht wesentlich verändern werden, so verdient doch eine so zahlreich und so vollständig angestellte Beobachtungsreihe, wie die des Herrn Lütke, gewiss so streng wie möglich berechnet und der gelehrten Welt in einer vollständigen Zusammenstellung

vorgelegt zu werden, welches ich in nachfolgender Abhandlung zu thun mich bemüht habe.

Ich werde in dem Folgenden die Beobachtungen der Inclination von denen der Intensität trennen, weil ich glaube, dass das Ganze dadurch leichter übersehbar wird; ich beginne daher mit der:

Inclination der Magnetnadel.

Capit. Lütke hatte 3 Inclinatorien zu seiner Disposition. Das erste war ein englisches, von Jones verfertigtes, messingenes Instrument, welches nichts Besonderes vor den sonst gebräuchlichen Instrumenten der Art aufzuweisen hatte. Es war mit 2 Nadeln versehen, die wir ins Künftige mit *A* und *B* bezeichnen wollen. *A* war 7,1 engl. Zoll lang, in der Mitte 0,4 Zoll, an den Enden aber 0,15 Zoll breit und 0,04 Zoll dick. Die Enden waren scharf zugeschliffen und hatten jedes einen kleinen Strich, der als Index auf dem getheilten Kreise diente. Die Axe war von Kupfer, trug aber an den Enden, die auf den Agatflächen auflagen, 2 kleine Stahlcylinderchen von 0,02 Zoll Dicke. Die Nadel *B* war der vorigen ganz ähnlich, nur an den Enden nicht stumpf abgeschnitten, sondern spitz zulaufend, so dass diese Spitzen selbst als Index auf dem Kreise einspielten.

Die beiden andern Instrumente waren Tascheninclinatorien aus der Fabrik von Ishora, die für's Künftige mit den NN°. 1 und 2 bezeichnet werden sollen; die Durchmesser der Kreise betrugen $3\frac{1}{2}$ Zoll, die Nadeln liefen spitz nach beiden Enden zu und hatten stählerne Axen. Eine Unvollkommenheit dieser Instrumente, die ich aus vielfacher eigner Erfahrung kenne, ist die, dass die Nadeln beim Abheben und Wiederauflegen auf die Agatflächen nicht genau auf dieselben Punkte der Axe zu liegen kommen.

Die Beobachtungen der Inclination wurden, wie dieses gewöhnlich geschieht, bei jeder Nadel in 4 verschiedenen Lagen angestellt, nämlich erstens so, dass die Theilung des Instruments nach Osten und zweitens, dass sie nach Westen gekehrt war; dann wurden die Pole der Nadel umgekehrt und die beiden so eben erwähnten

Beobachtungen nochmals wiederholt, welches die dritte und vierte Lage ausmacht. Ausserdem aber kehrte Capitain Lütke die Nadel noch so auf den Agatschärfen um, dass die Axe, die früher auf der rechten Schärfe lag, auf der linken zu liegen kam, und die früher links liegende auf der rechten und wiederholte in dieser Lage alle 4 Beobachtungen nochmals. Dadurch erhielt er eine zweite Bestimmung der Neigung, die von der ersten Bestimmung nur darin verschieden ist, dass die Lage der Axen gegen die der Agatschärfen verwechselt ist; wenn daher die Axen genau in gerader Linie lägen und vollkommen cylindrisch wären, die Schärfen aber genau in einer horizontalen Ebene lägen, so müssten die beiden Resultate genau übereinstimmen. Wir werden sehen, dass die Abweichungen zwar nicht gross waren, aber doch immer existirten.

Die Ablesung geschah immer an beiden Enden der Nadel, um den Fehler der Excentricität der Axen gegen den getheilten Kreis zu eliminiren. Ich werde aber der Kürze halber im Folgenden die Ablesungen an beiden Enden nicht einzeln anführen, sondern immer schon das Mittel aus beiden hinsetzen. Endlich noch wurde jede einzelne Ablesung mehrmals wiederholt, nachdem die Nadel vorher wieder etwas in Schwingungen gesetzt worden war, um so auch den Fehler einer mangelhaften Einspielung der Nadel zu vermindern.

Auf diese Weise hatte Capitain Lütke alle möglichen Mittel angewandt, um die Beobachtungen von den Fehlern des Instruments unabhängig zu machen und es bleiben nur noch 3 Ursachen, welche die Abweichnngen der Resultate der verschiedenen Nadeln erklären

1) die nicht vollkommene Cylindricität der Axen,

2) die nicht vollkommene Abhebung der Nadeln von den Axen, die vorzüglich den Instrumenten von Ischora vorgeworfen werden kann.

3) Ein geringer Eisengehalt des Metalls, aus dem der getheilte Kreis besteht.

Allein da Capitain Lütke fast an allen Landungsplätzen immer alle Nadeln zugleich beobachtete, so werden auch die hieraus entspringenden Fehler sehr vermindert werden in dem aus ihnen hergeleiteten mittleren Resultate.

In dem Folgenden werde ich nun die Beobachtungen selbst unter dem unten stehenden Schema mittheilen, in welchem die Ausdrücke *Lage* 1 und *Lage* 2 die Beobachtungen bezeichnen, je nachdem die eine Axe der Nadel auf der rechten oder linken Agatschärfe aufruht, *Mark. Ende Nord* und *Mark. Ende Süd* die Beobachtungen vor und nach dem Umkehren der Pole, O und W aber die Beobachtungen, wo der getheilte Kreis nach Ost oder West gekehrt ist. Die neben dem Resultate eingeklammerte Zahl bezeichnet aus wie vielen einzelnen Ablesungen in jeder Lage die mitgetheilte Angabe das Mittel ist.

Lage 1.				Lage 2.				
Mark. Ende. N.		Mark. Ende. S.		Mark. Ende. N.		Mark. Ende. S.		
O	W	O	W.	O	W.	O	W.	(5)

Zur Berechnung der wahren Neigung an den verschiedenen Beobachtungsörtern aus den Beobachtungen in den 4 Lagen bediente ich mich folgender drei Formeln:

1. Wichen die beobachteten Neigungen in allen 4 Lagen nicht mehr als um 1° von einander ab, so nahm ich das Mittel aus allen 4 Ablesungen als wahre Neigung an, da dieses für kleine Differenzen erlaubt ist. Heissen also die 4 Beobachtungen vor und nach Umkehrung der Pole der Nadel α, α', α'', α''' und die wahre Neigung I, so ist die Formel in diesem Falle

$$I = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha'''}{4}.$$

Ich werde die Anwendung dieser Formel durch *A. M.* (Arithmetisches Mittel) bezeichnen.

2. War die Abweichung der Ablesungen besonders gross in den Lagen O und W, so wurde die von Mayer angegebene Formel, die in diesem Falle gerade besonders brauchbar ist, angewandt. Sie ist bekanntlich, wenn wir $\cot.\ \alpha + \cot.\ \alpha' = M$, $\cot.\ \alpha - \cot.\ \alpha' = m$, $\cot.\ \alpha'' + \cot.\ \alpha''' = N$ und $\cot.\ \alpha'' - \cot.\ \alpha''' = n$ setzen, folgende:

$$\cot.\ I = \frac{M \cdot n + N \cdot m}{2\,(m + n)}$$

Wenn ich mich dieser Formel bedient habe, werde ich es durch *M.F* (Mayers Formel) andeuten. Ich bemerke noch, dass bei Anwendung dieser Formel der Fehler

einer ungleich grossen Kraft des Magnetismus der Nadel vor und nach dem Umkehren der Pole eliminirt wird.

3. Stimmten aber die mit O und W bezeichneten Ablesungen gut mit einander, gaben aber die Mittel aus O und W bei Mark. Ende. Nord und Mark. Ende Süd sehr von einander abweichende Resultate, so bediente ich mich der Formel

$$\text{tg.}\ I = \frac{\text{tg.}\ M + \text{tg.}\ M'}{2}$$

wo M und M' eben die Mittel aus O und W vor und nach Umwendung der Pole bedeuten. Bei dieser Formel ist aber vorausgesetzt, dass die magnetische Kraft der Nadel vor und nach dem Umwenden der Pole dieselbe sey, oder dass die Nadel jedesmal bis zur Sättigung magnetisirt sey. Um diese Formel herzuleiten, will ich von der in Poggend. Annal. Bd. XXIII. pag. 449 von Kupffer verhandelten Formel ausgehen. In Voraussetzung des Gleichbleibens der Kraft vor und nach dem Umkehren der Pole ist diese Formel

$$\text{tg.}\ I = \frac{1}{\cot.\ \alpha + \cot.\ \alpha'} + \frac{1}{\cot.\ \alpha'' + \cot.\ \alpha'''}$$

wo α, α', α'', α''' die oben schon erklärten Bedeutungen haben. Sind α und α' so wie α'' und α''' sehr wenig von einander verschieden, wie wir dieses gerade bei Anwendung dieser Formel voraussetzen, so können wir setzen

$$\cot.\ \alpha + \cot.\ \alpha' = 2\ \cot.\ \frac{\alpha+\alpha'}{2} = 2\ \cot.\ M$$

$$\text{und}\ \cot.\ \alpha'' + \cot.\ \alpha''' = 2\ \cot.\ \frac{\alpha''+\alpha'''}{2} = 2\ \cot.\ M'$$

$$\text{folgl.}\ \text{tg.}\ I = \frac{1}{2\ \cot.\ M} + \frac{1}{2\ \cot.\ M'}$$

$$\text{oder}\ \text{tg.}\ I = \frac{\text{tg.}\ M + \text{tg.}\ M'}{2}$$

Die Resultate, welche aus dieser Formel berechnet sind, werde ich mit *M. d. T.* (Mittel der Tangenten) bezeichnen.

Ausser den Beobachtungen, die nach dem oben angeführten Schema vollständig ausgeführt worden sind, hat Capitain Lütke noch eine Reihe solcher angestellt, die nicht so vollständig sind und daher einer besondern Correction bedürfen. Auf dem

Meere *) nämlich, wo die Sicherheit der Ablesung wegen des Schwankens des Schiffes doch nur bis auf $\frac{1}{2}^{0}$ angeschlagen werden kann, hat er die Umkehrung der Pole nicht bei jeder Bestimmung der Neigung, sondern nur von Zeit zu Zeit vorgenommen, in den zwischenliegenden Beobachtungsorten aber nur die mit O und W bezeichneten 2 Beobachtungen gemacht. Um sich nun hier der Wahrheit so viel möglich zu nähern, muss eine Correction angebracht werden, die ich, im Ganzen der von Lütke selbst angegebenen Methode folgend, folgendermassen bewerkstelligte. Ich nahm die nächst vorhergehende und nächst folgende, mit demselben Instrumente angestellte, Inclinationsbestimmung und bestimmte bei jeder ihre Abweichung von denjenigen Resultaten, die dieselbe Nadel gegeben hätte, wenn sie blos in der Lage O und W, ohne Umkehrung der Pole, beobachtet worden wäre, wie dieses an den zwischenliegenden Puncten geschah und nannte letztere Bestimmung die *scheinbare* Inclination; die auf diese Weise erhaltenen Differenzen der wahren und scheinbaren Inclination werden an beiden Orten nicht dieselben seyn und ich bestimmte also die Zu- oder Abnahme dieser Differenz. Endlich setzte ich voraus, diese Zu- oder Abnahme der Differenz sey der Veränderung der scheinbaren Neigung (der aus einer Beobachtung O und W erhaltenen) proportional, wodurch ich im Stande war, die Zu- oder Abnahme der Differenz, folglich auch die Differenz selbst und endlich die wahre Neigung zu bestimmen. Ich werde diese Rechnung an einem Beispiele erläutern. An den drei, der Kürze halber im Folgenden

*) Um auf dem Meere beobachten zu können, liess Capitain Lütke einen grossen halbkreisförmigen Bügel aus Messing mit dem Bogen aufwärts an dem horizontalen Brette befestigen, welches den Eingang in die Kajüte vom Verdeck aus bedeckte; in der Mitte dieses grossen Bügels war, mittelst zweier kleinen gegen einander rechtwinklich befestigten Messingbügel, ein rundes Brett, auf welches die magnetischen Instrumente gestellt wurden, so aufgehängt, dass es durch seine Schwere immer die nahezu horizontale Stellung einnahm, ohne sich doch in dieser Ebene selbst im Azimuthe drehen zu können. Um das bedeutende Schwanken des Brettes beim Schaukeln des Schiffes zu vermindern, war am Brette ein Tuchlappen befestigt, der bis an den Boden reichte und durch Reibung die Bewegungen des Brettes mässigte. Diese Vorrichtung war indessen weniger vollkommen, als die von Erman befolgte, wo das die Instrumente tragende Brett nach Art der Peilcompasse aufgehängt war. Capitain Lütke konnte bei seiner Vorrichtung bei stärkerem Schaukeln des Schiffes zwar nicht mehr beobachten.

mit ***M, N, P*** bezeichneten, der Zeit nach in dieser Ordnung auf einander folgenden Beobachtungsörtern finden wir folgende Beobachtungen angemerkt:

	Mark. Ende. Süd.		Mark. Ende. Nord.	
Bei *M*.	O	W	O	W
	13° = 35′	13° = 50′	25° = 40′	28° = 10′
	13 = 42,5		26 = 55	

Wahre *I* nach *M. d. T.* 20° = 35′, 8 Südl.

			Mark. Ende. Nord.	
Bei *N*.			O	W
			21 = 52,5	22 = 40
			21 = 46,2 Südl.	

	Mark. Ende. Nord.		Mark. Ende. Süd.	
Bei *G*.	O	W	O	W
	+ 10 = 24	12 = 24	— 4 = 36	2 = 46
	+ 11 = 24		— 3 = 42	

Wahre *I* nach *M. d. T.* 3 = 53,9 Südl.

Hier ist die Beobachtung für *M* und *G* vollständig, die für *N* aber unvollständig; letztere soll also nach jenen eine Correction erhalten. Nach dem oben Auseinandergesetzten bestimme ich also

Die Differ. d. wahren v. d. scheinb. *I* in *M* = 26° = 55′ — 20° = 35′, 8 = 6° = 19′, 2
— — — — — — — — — *G* = 11 = 24 — 3 = 53, 9 = 7 = 30, 1

Zunahme der Differenz = 70′, 9.

Veränder. d. scheinb. Neig. von *M* bis *T* = 26° = 55′ — 11 = 24 = 15° = 31 = 931′
— — — — — — *M* bis *N* = 26 = 55 — 21 = 46,2 = 5 = 8,8 = 308′8.

Wir haben also für die Zunahme der Differenz in *N* die Proportion

$$\frac{931}{308,8} = \frac{70,9}{x}$$

woraus sich ergiebt $x = 23', 5$,

folglich die Differenz der scheinbaren und wahren Inclination in *N*

$$= 6° = 19', 2 + 23', 5 = 6° = 42', 7$$

und die wahre Neigung in *N* folglich oder

$$I = 21°\,46',2 - 6°\,42',7 = 15°\,3,5 \text{ südl.}$$

wie wir solches auch in der weiter unten folgenden Tabelle der Resultate angegeben finden.

Auf diese Weise also sind alle nicht vollständigen Beobachtungen berechnet worden; natürlich sind die auf diese Weise erhaltenen Resultate nicht so genau, als die aus vollständigen Beobachtungen hergeleiteten und daher habe ich sie im Folgenden mit einem * bezeichnet. Sie sind sämmtlich mit dem Tascheninclinatorium N°. 2 angestellt worden.

Capitain Lütke hat es nicht versäumt zu untersuchen, ob das Eisen seines Schiffs auf die Neigung der Nadeln, wenn solche auf dem Schiffe bestimmt wurde, eine merklichen Einfluss ausübe und zu dem Ende mehrmals Versuche an einem und demselben Orte auf dem Lande und auf dem Schiffe angestellt. Ich finde in seinem Journale hierüber folgende Beobachtungen erwähnt:

In Tome bei Conception. Breite = 36° 36′ südlich.

Das Tascheninclinat. N°. 2 gab auf dem Schiffe (als Mittel aus O u. W) = 50° 4,5
— — — — — — — — Lande — — — — = 50° 35,0
Differenz = — 30,7

Auf der Insel Sitcha in Neu Archangel. Breite = 57° 3′ nördl.

Das — — — — — auf dem Schiffe — — — — = 77° 24
— — — — — — — — Lande — — — — = 76° 49
Differenz + 25,0

In Kamtschatka im Hafen von Peter und Paul. Breite = 53° 1′ nördl.

Das — — — — — auf dem Schiffe — — — — = 62° 32
— — — — — — — — Lande — — — — = 61° 30
Differenz + 1° 2

Capitain Lütke bemerkt, dass die Beobachtungen wegen des starken Schwankens des Schiffes sehr unsicher waren.

Auf der Insel Lugunor. Breite 5° 29′ nördl.

Das — — — — — auf dem Schiffe — — — — = 7° 21
— — — — — — — — Lande — — — — = 8° 4
Differenz — 43

Wenn wir die Beobachtungen in Kamtschatka, da sie unter so ungünstigen Umständen angestellt wurden, weglassen, so finden wir, dass die Unterschiede der Beobachtungen auf dem Lande und auf dem Schiffe höchstens 40′ betragen, also nicht viel mehr als die Unsicherheit der Ablesungen auf dem Schiffe, und da diese Abweichung wahrscheinlicher noch verringert werden würde, wenn die Beobachtungen vollständig in allen vier Lagen und bei zahlreicheren Ablesungen angestellt worden wären, so können wir wohl annehmen, dass auf Lütke's Schiffe das Eisen auf die Neigungsnadel nur einen unmerklichen Einfluss ausgeübt habe; dieses wird noch dadurch bestätigt, dass die Abweichung der Beobachtung auf dem Schiffe und der entsprechenden auf dem Lande am grössten auf Lugunor, bei der kleinsten Inclination, und am kleinsten auf Sitcha, bei der grössten Inclination, ausfiel, während es bekannt ist, dass der Einfluss des Eisens um so bedeutender wird, je grösser die magnetische Breite ist.

Endlich muss ich zum Verständnisse des Folgenden noch bemerken, dass bei der ausführlichen Angabe der Versuche die Orte der Beobachtung der Kürze halber durch die Buchstaben *A*, *B*, *C* etc., und zwar der Zeit der Anstellung nach, bezeichnet worden sind; in der zuletzt gegebenen Tabelle der erhaltenen Resultate finden sich die diesen Bezeichnungen entsprechenden Längen und Breiten der Orte, so wie die Abweichungen der Compassnadeln, wie Lütke sie mit dem gewöhnlichen Peilcompasse bestimmt und in seinem Journale angemerkt hat.

Ich lasse jetzt die Beobachtungen selbst folgen, in derselben Ordnung, in welcher sie angestellt wurden.

	Erste Lage.				Zweite Lage.			
	Mark. Ende. N.		Mark. Ende. S.		Mark. Ende. N.		Mark. Ende. S.	
	O	W	O	W	O	W	O	W
Punkt A. *Nadel B.*	18°=15′,8	17=19,2	10°=50′,0	10°=50′,0	17°=8,7	17°=3	10°=49′,5	10=51,7
	Nach *M. d. T.* wahre $I = 14°, 11', 4$ (6)							
Tascheníncl.	10=52,5	9=15,0	19 = 22,5	18 = 10	10=10,0	10=35,0	19=12,5	19=00
	Nach *M. d. T.* wahre $I = 14° = 38, 5$ (3)							

		Erste Lage.				Zweite Lage.			
		Mark. Ende. N.		Mark. Ende. S.		Mark. Ende. N.		Mark. Ende. S.	
		O	W	O	W	O	W	O	W
	Taschenincl. N°. 2.	5°= 0,0	6=30,0	22 = 17,0	24 = 30,0	4=20,0	7 = 0,0	22 = 2,0	24=54,0
	Nach *M. d. T.* wahre I = 14 = 55,6 (4)								
	Als Mittel aus allen 3 Bestimmungen wahre I = 14°, 35′, 2								
PUNKT B.	*Taschenincl.* N°. 2.			34°= 30,0	30 = 58,1			31=46,9	31=48,8
	Nach *A. M.* scheinbare I = 32=15,9 Correction — 7=28,4 folglich wahre I = 24=47,5* (4)								
PUNKT C.	*Taschenincl.* N°. 2.	49=40,8	46=12,5	38 = 39,2	37=37,5	48 = 3,7	47=12,5	38=36,2	37=20,0
	Nach *M. d. T.* wahre I = 43 = 12,1 (6)								
PUNKT D.	*Taschenincl.* N°. 2.	49=41,2	47=55,0	57 = 10,0	55 = 2,5	49 = 0,0	47=30,0	55=20,0	55=35,0
	Nach *M. d. T.* wahre I = 52°= 27′, 2 (6)								
PUNKT E.	*Taschenincl.*			60=50,0	57=50,0			59=25,0	58=37,5
	Scheinbare I nach *A. M.* = 59=10,6 Correction = 3=20,3 Wahre I = 55=50,3* (6)								
PUNKT G.	*Taschenincl.* N°. 2.	55=45,0	53=33,7	47 = 42,2	47=15,0	(54=50)	54=30,0	48=7,5	46=37,5
	Nach *M. d. T.* wahre I = 51°= 19, 4 (4) Die eingeklammerte Beobachtung habe ich interpolirt, da ich sie im Journale nicht vorfand.								
PUNKT H.	*Taschenincl.* N°. 2.	41=17,5	40=12,1	52 = 0,9	48 = 52,5	41=21,3	40 = 4,2	50=51,6	50 = 1,3
	Nach *M. d. T.* wahre I = 45°, 55, 4 (6)								
	Nadel B.	49=59,8	40=14,6	42 = 45,9	47 = 8,8	49=45,9	49=48,2	46=12,8	43=13,9
	Nach *M. F.* wahre I = 45°, 9′, 9 (6) — Diese Beobachtung war unzuverlässig, weil die Nadel etwas am Kreise streifte Im Mittel aus beiden Bestimmungen I = 45 32,6								
PUNKT I.	Nadel *A.*	49=21,2	32 = 36	48 = 36,4	32 = 9,2	49=27,1	31=50,1	32 = 35	48=38,6
	Nach *M. F.* wahre I = 39°= 13′, 5 (6)								

	Erste Lage.				Zweite Lage.			
	Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W	Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W
Nadel B.	39°=49′,0	42°=14′,1	38°=34′,6	35°=26′,7	42°=29′,1	40°=29′,3	42°=36′,9	39°=32′,3
	Nach *M. F.* wahre $I = 40° = 19',6$ (6)							
Tascheníncl. N°. 2.	46=53,3	44=11,3	35=12,5	33=38,0	45=58,7	43=45,0	35=15,9	33=56,6
	Nach *M. d. T.* wahre $I = 40° = 16',4$ (6)							

Im Mittel aus allen 3 Bestimmungen $I = 39° = 56',4$

Punkt K. *Taschenincl.* N°. 2. 35 = 7,5 | 33 = 52,5

Scheinbare *I* nach *A. M.* = 34=30,0

Correction + 5 = 31,0

Wahre $I = 40° = 1',0$* (4)

Punkt L. *Taschenincl.* N°. 2. 26=37,5 | 25=26,2

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 26°=1′,9

Correction + 6 = 4,5

Wahre $I = 32° = 6',4$* (4)

Punkt M. *Taschenincl.* N°. 2. 13=35 | 13 = 50 | 25 = 40 | 28 = 10

Nach *M. d. T.* wahre $I = 20° = 35',8$ (6)

Punkt N. *Taschenincl.* N°. 2. 20=52,5 | 22 = 40

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 21=46,2

Correction — 6=42,7

Wahre $I = 15° = 3',5$* (6)

Punkt O. *Taschenincl.* N°. 2. 13=12,5 | 15=10,0

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 14=11,2

Correction — 7 = 17,4

Wahre $I = 6° = 53',8$* (6)

	Erste Lage.				Zweite Lage.			
	Mark.	Ende N.	Mark.	Ende. S.	Mark.	Ende N.	Mark.	Ende S.
	O	W	O	W	O	W	O	W

PUNKT Q. *Taschenincl.* N°. 2. 8° ≈ 30′,0 | 5° ≈ 54′,0
Scheinb. *I* nach *A. M.* = 7 ≈ 12,0
Correction — 7 ≈ 40,1
Wahre *I* = 0° ≈ 28′,1* südl. (5)

PUNKT R. *Taschenincl.* N°. 2. 8 ≈ 55,0 | 7 ≈ 40
Scheinb. *I* nach *A. M.* = 8 ≈ 17,5
Correction — 7 ≈ 41,4
Wahre *I* = 0° ≈ 36′,1* nördl. (6)

PUNKT S. *Taschenincl.* N°. 2. 10 ≈ 50 | 9 ≈ 5
Scheinb. *I* nach *A. M.* = 9 ≈ 57, 5
Correction — 7 ≈ 43, 3
Wahre *I* = 2° ≈ 14′,2* nördl. (6)

PUNKT T. *Taschenincl.* N°. 2. 10 ≈ 7,5 | 8 ≈ 25,0
Scheinb. *I* nach *A. M.* = 9 ≈ 16,2
Correction — 7 ≈ 42,5
Wahre *I* = 1° ≈ 33′,7* nördl. (6)

PUNKT U. *Taschenincl.* N°. 2. 10 ≈ 8,0 | 9 ≈ 30,0
Scheinbare *I* nach *A. M.* = 9 ≈ 53, 7
Correction — 7 ≈ 43, 1
Wahre *I* = 2° ≈ 10′, 6* nördl. (6)

PUNKT V. *Taschenincl.* N°. 2. 14 ≈ 15,0 | 12 ≈ 40,0 | − 0 ≈ 35 | − 3 ≈ 40
Nach *M. d. T.* wahre *I* = 5°, 42′,9 nördl. (6)

PUNKT W. *Taschenincl.* N°. 2. 2 ≈ 50 | 1 ≈ 17, 5
Scheinb. *I* nach *A. M.* = 2 ≈ 3,7
Correction + 7 ≈ 39,7
Wahre *I* = 9° ≈ 43′,4* nördl. (6)

	Erste Lage.				Zweite Lage.			
	Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W	Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W

Punkt X. *Taschenincl.* N°. 2. 25°= 00 | 24°= 00

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 24 = 30

Correction + 5 = 35,3

Wahre *I* = 30°= 5′, 3* nördl. (1)

Punkt Y. *Taschenincl.* N°. 2. 37=52,5 | 37=30,0 | 48=52,5 | 46=30,0

Nach *M. d. T.* wahre *I* = 43°= 8′, 4 nördl. (4)

Punkt Z. *Taschenincl.* N°. 2. 51=30 | 49 = 00

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 50 = 15

Correction — 4 = 12

Wahre *I* = 46°= 3′* nördl. (4)

Punkt A′ *Taschenincl.* N°. 2. 61=30 | 59 = 10

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 60 = 20

Correction — 2 = 41,9

Wahre *I* = 57°= 38′, 1* nördl. (3)

Punkt B′ *Taschenincl.* N°. 2. 66 = 7,5 | 63 = 45,0 | 60=45,0 | 59 = 30,0

Nach *M. d. T.* wahre *I* = 62°= 43′, 6 nördl. (4)

Punkt C′ *Taschenincl.* N°. 2. 64 = 3,7 | 63 = 7,5

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 63 = 35,6

Correction + 2 = 4,2

Wahre *I* = 65°= 39′, 8 nördl. (4)

Punkt D′ *Taschenincl.* N°. 2. 67=15,0 | 66 = 7,5 | 71=11,2 | 68 = 41,2

Nach *M. d. T.* wahre *I* = 68°= 25′, 6 nördl. (4)

Punkt E′ *Taschenincl.* N°. 2. 74=3,0 | 71=57,5

Scheinb. *I* nach *A. M.* = 73 = 00

Correction — 1=16,7

Wahre *I* = 71°= 43′, 3 nördl. (5)

		Erste Lage.				Zweite Lage.			
		Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W	Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W
PUNKT F′	*Taschenincl.* N°. 2.	78°=2′,9	75°=30′,5	75°=12′,9	74°=51′,2	76°=57′,9	77°=0′,9	76°=2′,5	73°=51′,3
		Nach *A. M.* wahre *I* = 75°=56′, 25 (6)							
	Nadel A.	67=20,1	84=36,1	84=5,7	67=26,8	84=27,3	68=2,1	68=18,3	84=6,7
		Nach *M. F.* wahre *I* = 75°=44′,8 (6)							
	Nadel B.	76=36,2	75=35,0	75 32,2	76=31,9	75=46,8	79=23,2	76=41,4	75=15,2
		Nach *M. F.* wahre *I* = 76°=3′, 4 (6)							
		Als Mittel aus obigen 3 Bestimmungen *I* = 75°=54′,8.							
PUNKT G′	*Taschenincl.* N°. 2.	67=35,9	66=18,3	71=31,2	69=24,2	67=36,2	66=21,7	70=22,5	69=52,5
		Nach *M. d. T.* wahre *I* = 68°=45′, 2 (6)							
	Nadel A.	76=26,9	59=53,0	61=23,3	76=58,0	59=36,2	76=27,5	76=22,5	61=7,7
		Nach *M. F.* wahre *I* = 68°=6′, 0 (6)							
		Als Mittel aus beiden Bestimmungen *I* = 68=25,6							
PUNKT H′	*Taschenincl.* N°. 2.	64=49,6	67=45,4	60=56,6	62=3,4	65 58,5	66=20,4	60 55,8	62=11,7
		Nach *M. d. T.* wahre *I* = 64°=9′, 5 (6)							
	Nadel A.	56=27,3	72=59,4	72=25,7	55=45,4	73=15,1	56=21,5	55=53,5	72=27,3
		Nach *M. F.* wahre *I* = 63°=51′,6 (6)							
	Nadel B.	65=20,2	63=55,5	65=3,6	63=15,5	63=59,2	63=34,8	64=23,6	65=7,8
		Nach *A. M.* wahre *I* = 64°=20′, 9 (6)							
		Mittel aus allen 3 Bestimmungen *I* = 64°=7′,0							
PUNKT I′	*Taschenincl.* N°. 2.			54°=7′,5	55=0,0				
		Nach *A. M.* scheinb. *I* = 54=33,7							
		Correction + 3=22, 8							
		Wahre *I* = 57°=56′,5 (4)							
PUNKT K′	*Taschenincl.* N°. 2.	46=20,0	48=20,0	53=45,0	56=25,0				
		Nach *M. d. T.* wahre *I* = 51°=32′ (6)							

		Erste Lage				Zweite Lage			
		Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W.	Mark. O	Ende N. W.	Mark. O	Ende S. W.
PUNKT L′	*Taschenincl.*			48° 36′,0	51° 30′,0				
	N°. 2.	Scheinb. *I* nach *A. M.* = 50° 3							
		Correction — 4° 46,5							
		Wahre *I* = 44° 16′,5 (5)							
PUNKT M′	*Taschenincl.*	32°45	35°30	20°7	21°40				
	N°. 2.	Nach *M. d. T.* wahre *I* = 27° 55′,2 (6)							
PUNKT N′	*Taschenincl.*	5°41	7°22	20°23	22°41				
	N°. 2.	Nach *M. d. T.* wahre *I* = 14° 16′,7 (4)							
PUNKT O′	*Taschenincl.*	11°20	9°44	−4°17	−6°7	11°27	9°42	−4°8	−9°42
	N°. 2.	Nach *M. d. T.* wahre *I* = 2° 49′,8 (6)							
	Nadel B.	3°28,5	5°7,7	1°49,2	5°73,0	1°9,0	2°46,2	1°20,3	2°30
		Nach *M. F.* wahre *I* = 2° 46′,8 (6)							
	Nadel A.	3°50,8	3°11,4	1°13,0	3°28,3	4°58,5	3°33,3	2°30,2	2°17,2
		Nach *A. M.* wahre *I* = 3° 7′,8 (6)							
		Mittel aus allen 3 Bestimmungen *I* = 2° 54′,8.							
PUNKT P′	*Taschenincl.*	7°30,0	9°22,0	−8°30,0	−5°57,5				
	N°. 2.	Nach *M. d. T.* wahre *I* = 0° 36′,9 nördl. (4)							
PUNKT Q′	*Taschenincl.*			9°5,0	7°10,5				
	N°. 2.	Scheinb. *I* nach *A. M.* = 8° 7,9							
		Correction — 7° 37,6							
		Wahre *I* = 0° 30′,3 südl. (6)							
PUNKT R′	*Taschenincl.*	9°45,0	8°21,0	−4°30,0	−7°7,5				
	N°. 2.	Nach *M. d. T.* wahre *I* = 1° 38′,7 südl. (5)							
PUNKT S′	*Taschenincl.*	13°00	14°37,5	−4°00	−3°00				
	N°. 2.	Nadel *M. d. T.* wahre *I* = 5° 16′,5 nördl. (4)							
PUNKT T′	*Taschenincl.*	6°30	5°48,7	−8°18,8	−10°22,5				
	N°. 2.	Nach *M. d. T.* wahre *I* = 1° 37′,3 nördl. (4)							

		Erste Lage.				Zweite Lage.			
		Mark.	Ende N.	Mark.	Ende S.	Mark.	Ende N.	Mark.	Ende S.
		O	W	O	W	O	W	O	W
Punkt U′	*Taschenincl.* N°. 2.	4° 49′,2	8° 24′,4	− 9° 51′,7	− 7° 25′,8	5° 10′	7° 37′,5	− 9° 20′,0	− 6° 48′,6
			Nach *M. d. T.* wahre *I* = 0° 56′, 6 südl. (6)						
	Nadel A.	0 = 45,2	1 = 14,3	0 = 23,3	1 = 27,0	1 = 24,5	1 = 38,3	0 = 33,5	0 = 4, 3
			Nach *A. M.* wahre *I* = 0° 49′, 5 südl. (6)						
	Nadel B.	3 = 15,8	− 1 = 36,7	− 3 = 36,5	4 = 33,6	− 2 = 45,0	4 = 32,2	2 = 22,7	− 2 = 41
			Nach *M. F.* wahre *I* = 0° 31′, 2 südl. (6)						
			Als Mittel aus allen 3 Bestimmungen wahre *I* = 0° 45′, 8 südl.						
Punkt V′	*Taschenincl.* N°. 2.	4 = 5,8	4 = 44,2	21 = 4,6	21 = 3,3	2 48,3	6 = 47,5	18 = 51,2	20 = 40
			Nach *M. d. T.* wahre *I* = 12° 45′,1 (6)						
	Nadel A.	16 = 27	11 = 22,5	15 = 55	8 = 48,8				
			Nach *M. F,* wahre *I* = 12° 38′, 5 (6)						
	Nadel B.	15 = 50,2	17 = 8,0	10 = 27,0	10 = 28,3	15 = 55,7	15 = 51,5	10 = 36,2	9 = 14,5
			Nach *M. d. T.* wahre *I* = 13°, 13′, 0 (6)						
			Als Mittel aus allen 3 Bestimmungen *I* = 12° 52′,2.						
Punkt X′	*Taschenincl.* N°. 2.	7 = 41,5	10 32,5	− 8 = 20,5	− 7 = 7,0	7 = 13,9	9 = 32,1	− 8 = 25,0	− 6 = 00
			Nach *M. d. T.* wahre *I* = 0° 39′,2 nördl. (5)						
Punkt Y′	*Nadel A.*	44 11,5	30 = 26,0	31 = 14,1	46 = 00	30 = 37,4	44 = 0,5	45 = 19,9	31 = 7,2
			Nach *M. F.* wahre *I* = 36° 44′,7 (6)						
	Nadel B.	34 = 1,7	34 = 51,5	39 = 16,1	38 = 5,3	34 = 52,6	34 = 6,5	40 = 48,4	38 = 17,5
			Nach *M. d. T.* wahre *I* = 36° 48′, 2 (6)						
			Als Mittel aus beiden Bestimmungen wahre *I* = 36° 48′, 2						
Punkt Z′	*Nadel A.*	65 = 28,2	77 = 24,5	76 = 28,8	61 = 39,2	76 = 32,4	60 = 18,8	76 = 22,1	61 = 47,1
			Nach *M. F.* wahre *I* = 69° 14′, 3 (6)						
	Nadel B.	69 = 46,1	70 = 21,3	68 = 33,1	68 = 58,2	68 = 23,9	69 = 48,9	69 = 23,8	68 = 11,6
			Nach *A. M.* wahre *I* = 69° 10′,7 (6)						
			Als Mittel aus beiden Bestimmungen wahre *I* = 69° 12′, 5.						

		Erste Lage. Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W	Zweite Lage. Mark. O	Ende N. W	Mark. O	Ende S. W
PUNKT *a.*	*Nadel A.*	83° 30′,5	69° 17′,0	70° 33′,4	84° 24′,2	69° 52′,6	83° 29′,7	83° 23′,9	74° 11′
		Nach *M. F.* wahre $I = 76° 44',7$ (6)							
	Nadel B.	74 25,4	76 59,0	17 11,7	75 53,6	76 56,1	79 00	75 26,7	76 17,7
		Nach *A. M.* wahre $I = 76° 31',1$ (6)							
	Taschenincl. N°. 2.	74 52,1	76 2,5	76 1,7	78 39,2	74 20,0	76 41,6	77 12,1	77 51,6
		Nach *M. d. T.* wahre $I = 76° 31',7$ (6)							
		Als Mittel aus allen 3 Bestimmungen $I = 76° 35',8$							
PUNKT *b.*	*Nadel A.*	69 27,2	82 51,2	82 27,6	68 40,2	82 48,8	73 5,3*)	69 19,9	82 3,6
		Nach *M. F.* wahre $I = 75° 39', 5$ (6)							
	Nadel B.	75 55,4	74 35,0	75 17,1	75 48,6	75 57,5	76 46,7	76 48,2	75 54,7
		Wahre I nach *A. M.* $= 75° 52', 6$ (6)							
	Taschenincl. N°. 2.	77 55,4	75 29,1	74 28,3	73 57,5	77 11,7	76 37,5	75 20,4	72 55,8
		Nach *M. d. T.* wahre $I = 75° 37',1$ (6)							
		Als Mittel aus allen 3 Bestimmungen wahre $I = 75° 43', 1.$							
PUNKT H′	*Nadel A.*	72 7,9	56 42,7	57 1,3	72 23,5	56 43,4	71 16,7	72 20,0	55 9,9
		Nach *M. F.* wahre $I = 63° 43', 0$ (6)							
	Taschenincl. N°. 2.	61 0,9	62 10,8	65 31,7	67 25,4	60 54,2	63 3,3	65 57,1	65 55,8
		Nach *M. d. T.* wahre $I = 64° 10', 6$ (6)							
		Als Mittel aus beiden Bestimmungen wahre $I = 63 56,8$							
PUNKT *c.*	*Taschenincl.* N°. 2.	22 2,5	24 19,2	8 15,0	9 5, 8	23 5,0	23 37,5	7 27,5	10 4, 2
		Nach *M. d. T.* wahre $I = 16° 15', 5.$ (6)							

*) Diese Beobachtung ist, wie sich aus der Vergleichung mit den übrigen Ablesungen ergiebt, auf jeden Fall falsch um mehrere Grade. Daher benutze ich nur die Beobachtungen in der ersten Lage.

Magnetische Intensität.

Für die Beobachtung der magnetischen Intensität wandte Capitain Lütke zweierlei Bestimmungen an, nämlich die mit der *Inclinationsnadel* und die mit der *Declinationsnadel.* Die Instrumente zu beiden Beobachtungsarten waren ursprünglich von Johnson in London verfertigt.

Für die Schwingungen der Inclinationsnadel in der Verticalebene des magnetischen Meridians war ein Instrument bestimmt, welches nichts Besonderes vor einem gewöhnlichen Inclinatorium voraus hatte, ausser dass es gänzlich von Holz war, um die Einwirkung des Metalls auf die Verminderung der Schwingungsbögen zu vermeiden, eine Einwirkung, die bekanntlich jetzt auf eine magneto-electrische zurückgeführt worden ist. Das Instrument hatte 3 Nadeln, 1) eine durchbrochene rhomboidalische, die wir ins Künftige mit *C* bezeichnen wollen, 2) eine volle elliptische *D* und eine durchbrochene elliptische *E*, jede von ihnen war 7,1 Zoll englisch lang und in der grössten Breite bei der Axe 2 Zoll breit. Dieses Instrument entsprach aber seinem Zwecke ganz und gar nicht; die Holztheile hatten nicht Genauigkeit und Festigkeit genug, die Säulen, welche die Axen der Nadeln trugen, veränderten (wahrscheinlich auch durch hygroscopische Einwirkung) ihre Lage, endlich waren durch schlechtes Einpacken die Nadeln auf dem Transporte von London nach Portsmouth beschädigt worden; deshalb wurden die grossen Verticalnadeln zur Bestimmung der Intensität wenig gebraucht und nicht anders als in dem Messinginclinatorium. Dagegen sind eine ganze Reihe solcher Beobachtungen mit dem kleinen, schon oben beschriebenen Tascheninclinatorium N°. 1 aus Ischora ausgeführt worden, weshalb der Magnetismus der Nadel in demselben nicht umgewandt oder sonst absichtlich verändert und die Nadel also zu Inclinationsbestimmungen nicht gebraucht ward.

Das Instrument von Johnson für Schwingungen der Horizontalnadeln bestand ursprünglich aus einem horizontalen hölzernen Kreise auf 3 Füssen, welcher mit einem kostbaren Glasdeckel überdeckt wurde; es war aber zum Transport von London

nach Portsmouth von Herrn Johnson so nachlässig eingepackt worden (obgleich er sich dasselbe mit 13 Lst. bezahlen liess), dass Alles in 1000 kleinen Stücken in letzterer Stadt ankam. Obgleich es nun eigentlich billig gewesen wäre, Alles in diesem Zustande nach London zurückzuschicken, so wollte Capitain Lütke doch nicht ganz ohne ein Instrument der Art bleiben, er beschloss also das Instrument bei sich auf dem Schiffe wieder in den Stand setzen zu lassen. Statt des kostbaren Glasdeckels wurde die Nadel daher mit einem Holzkasten bedeckt, der oben eine Glasplatte hatte; diese war in der Mitte durchbohrt und trug eine verticale Röhre, in welcher der Seidenfaden, welcher die Nadel trug, herabhing. Der Nadeln wurden 5 gebraucht, die ich mit N°. 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnen werde und die folgende Gestalten hatten:

N°. 1 und 2 waren Cylinder, 2 Zoll lang und 0,1 Zoll dick, von Stebbing in Portsmouth gemacht, als Zugabe zu den übrigen von Johnson.

N°. 3 war rhomboidalisch und voll, 2 Zoll lang, in der Mitte 0,25 Zoll breit und 0,03 Zoll dick.

N°. 4 war elliptisch, 2 Zoll lang, in der Mitte (in der kurzen Axe der Ellipse) 0,5 Zoll breit und 0,03 Zoll dick.

N°. 5 war ein durchbrochenes Rhomboid, 2 Zoll lang, in der Mitte 1 Zoll breit und 0,03 Zoll dick.

Die späte Ankunft aller dieser Instrumente verhinderte Capitain Lütke, zu seinem grossen Bedauern, die Beobachtungen bereits in Portsmouth anzufangen, wodurch er eine Beobachtung gehabt hätte, die mit einer an demselben Orte, nach Beendigung der Reise angestellten, verglichen, die Veränderung der Kraft der magnetischen Nadeln während der ganzen Dauer der Reise angegeben hätte.

Auch für die Intensität bestimmte Capitain Lütke den etwanigen Einfluss des Eisens des Schiffes; ich finde folgende Beobachtung hierüber in seinem Journal:

Ort der Beobacht.	Breite.	Länge von Greenwich.	Bezeichnung der Nadel.	Zeit von 10 Schwing. auf dem Schiffe	auf dem Lande	Unterschied.
Rio de Janeiro	22° 53′ S.	43° 13′ W.	Horizontalnadel N°. 1	23″,940	34″,020	+0″,080
			— — — N°. 4	27, 860	27, 760	—0, 100
			— — — N°. 5	21, 250	21, 310	+0, 060
Tome	36 37 –	72 57 —	Vertical-Nadel N°. 1	12, 064	12, 022	—0, 042
			Horizont.-Nadel N°. 1	23, 786	23, 753	—0, 033
Sitcha	57 3 N.	135 16 —	Vert.-N. N°1 a. d. Verd.	10, 408	10, 414	+0, 006
			— — i. d. Caj.	10, 564		—0, 150
Kamtschatka	53 1 –	201 16 —	Vertikalnadel N° 1	11, 496	11, 538	+0, 042
Ualan	5 21 –	196 35 —	Vertikalnadel N° 1	13, 897	13, 827	—0, 070
			Horizontalnadel N° 1	22, 746	22, 495	—0, 251
			— — — N° 2	22, 779	22, 646	—0, 133
Lugunor	5 29 –	206 2 —	Horizontalnadel N° 1	22, 687	22, 544	—0, 143

Aus vorstehender Tabelle sieht man, dass bis Kamtschatka der Einfluss des Eisens des Schiffes auf die Bestimmung der magnetischen Intensität auf dem Schiffe von keiner Erheblichkeit war, nur durfte die Beobachtung nicht in der Kajüte angestellt werden, wie solches die Sitchaer Beobachtungen darthun; Capitain Lütke schreibt dies dem Umstande zu, dass sich gerade unter seiner Cajüte die mit Eisenblech beschlagene Brodkammer befand. In Ualan und Lugunor ist der Einfluss des Eisens merklicher, wahrscheinlich, wie Capitain Lütke meint, durch ein zufällig in der Nähe befindliches Eisenstück, denn an der Vertheilung der Haupteisenmassen auf dem Schiffe war nichts verändert worden. Doch sind die Unterschiede zwischen den Schiffs- und Landbeobachtungen doch nur zwischen 1 und 2 Zehntel der Secunde enthalten und machen daher die in diesen Gegenden auf dem Schiffe angestellten Schwingungsbeobachtungen, deren überhaupt nur 4 sind und die ohnehin nicht die Genauigkeit der Landbeobachtungen haben, nicht unbrauchbar.

Ich werde nun zuerst die Zeiten von 10 Schwingungen der verschiedenen Nadeln folgen lassen, wie sie sich aus den unmittelbaren Beobachtungen ergaben, sie sind abgeleitet aus den Beobachtungen von oft 250 Schwingungen, wo zuweilen, namentlich bei den Landbeobachtungen, die Zeit jeder zehnten Schwingung angege-

ben worden ist, öfter aber sind grössere Intervalle genommen. Ich habe die einzelnen Beobachtungen nicht für nöthig gehalten hieher zu setzen, da sie zu viel Raum eingenommen hätten und da die Abweichungen der einzelnen beobachteten Intervallen von 10 Schwingungen weit geringer sind, als die Fehler, die durch andere Umstände entstehen, namentlich durch Veränderung der magnetischen Kraft der Nadeln. Die näheren Angaben der mit *A, B, C, D* etc. bezeichneten Orte, findet man, wie schon bei den Inclinationsbeobachtungen bemerkt wurde, in der, die Endresultate sämmtlicher Beobachtungen enthaltenden, Tabelle gegen das Ende dieser Abhandlung.

(A)

Ort der Beob.	Zeit der Beob.	Zeit von 10 Schwingungen der Nadeln in Secunden: der Horizontalnadeln					der Verticalnadeln				Temp. nach Reaum.
		1	2	3	4	5	N° 1	*C*	*D*	*E*	
A	4. Jan. 1827	24,02	24,19	24,31	27, 76	21, 31					22,2
B	16. — —		24,83		27, 89	21, 67					22,0
C	25. — —		24,91		28, 25	22, 28					14,0
D	31. — —		25,29		29, 22	22, 60	11, 23				9,0
E	3. Febr. —						11, 056				8,0
F	8. — —						10,77(?)				4,0
G	1. März —						11, 53				12,0
H	5. — —	23,753	23,862		27,600	21,499	12, 022				18,0
I	22. — —	23,407	23,576	23,331	27,119	21,108					16,0
K	11. Apr. —	23,460					12, 349				15,5
L	18. — —	22,926					12, 706				18,0
M	27. — —	22,665					13, 189				20,0
N	30. — —	22,425					13, 208				22,0
O	2. Mai —						13, 339				22,0
P	3. — —						13, 379				22,0
Q	4. — —	22,146	22,294		25,700		13, 361				22,0
R	4. — —						13, 389				21,5
S	5. — —	22,173					13, 408				21,5
T	6. — —						13, 416				21,0
U	7. — —	22,200					13, 389				21,0
V	8. — —						13, 309				20,0
W	9. — —						13, 325				21,0
X	19. — —						12, 794				19,5

Ort der Beob.	Zeit der Beob.	Zeit von 10 Schwingungen der Nadeln in Secunden									Temp. nach Reaum.
		der Horizontalnadeln					der Verticalnadeln				
		1	2	3	4	5	N° 1	*C*	*D*	*E*	
Z	25. Mai 1827						12,302				17,0
A'	30. — —						11,589				13,5
B'	1. Juni —						11,279				10,5
C'	3. — —						10,865				9,5
D'	6. — —						10,621				8,0
E'	9. — —						10,611				7,5
F'	13. — —	34,349	34,569	33,890	39,673	31,065	10,414	24,547	23,999	27,732	13,0
G'	11. Aug. —	29,356	29,496	29,209	34,045	26,904	11,009	25,663	25,199	30,309	11,0
H'	30. Sept. —	27,816	27,974	28,624	32,331	25,253	11,544	26,680	26,113		5,0
I'	23. Oct. —						12,166				6,0
K'	26. — —						12,752				8,5
L'	1. Nov. —						13,163				17,0
M'	13. — —						13,965				21,0
N'	18. — —						14,096				22,0
O'	28. — —	22,495	22,646	22,999	25,869	20,203	13,791				24,5
P'	23. Dec. —	22,410	22,504	22,978	25,733	20,180	14,091				23,0
Q'	23. — —	22,338									22,7
R'	24. — —	22,250									22,0
S'	7. Jan. 1828	22,632									21,5
T'	13. — —	22,577									22,0
U'	23. — —	22,544	22,576	22,898	26,118	20,366					24,0
V'	23. Febr. —	23,022	23,075	23,419	26,538	20,709	13,885				23,5
X'	24. März —	22,676	22,710	22,880	25,813	20,367					23,0
Y'	28. Apr. —	24,142	24,117	24,324	27,476	21,455	13,179				20,0
H'	6. Juni —	28,525	28,486	28,791	32,398	25,436	11,542		25,921		7,5
Z'	24. — —	30,82	30,784	31,071	35,458	27,571	11,162				13,0
a'	18. Juli —	36,575	36,570	36,775	41,893	32,719	10,817		24,235		7,9
b'	25. Aug. —	35,542	35,542	35,720	40,316	31,491	10,840		24,457		6,0
H'	9. Oct. —	28,103	28,103	38,787	32,560	25,498	11,583		25,749		3,0
c'	4. Jan. 1829	22,906	22,906	23,015	25,954	20,272					24,0

Bei allen im Obigen enthaltenen Beobachtungen wurden die Zählungen der Schwingungen einer jeden Nadel immer bei gleichen Elongationswinkeln begonnen und beendigt, nämlich zwischen 30° und 10°; ich habe daher keine Correction weiter für die Reduction auf unendlich kleine Bogen angebracht.

Indem ich nun zur Berechnung der Intensitäten aus diesen Versuchen schreite, werde ich zuerst die Horizontalnadeln vornehmen, hernach aber die Resultate der übrigen Nadeln hinzufügen.

Die erste Correction, die wir für die Schwingungen der Nadel 1—5 anzubringen haben, ist die Reduction auf eine und dieselbe Temperatur, da bekanntlich die Kraft der Nadel beim Steigen der Temperatur abnimmt. Dazu liegen uns folgende Beobachtungen vor, die zu dem Zwecke mit den 5 Horizontalnadeln in dem, von allen stöhrenden Eisenmassen entfernten, magnetischen Pavillon der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg angestellt wurden. Es wurden nämlich die Zeiten von 10 Schwingungen in Temperaturen beobachtet, die, durch Heitzung, um etwa 20° von einander differirend waren. Jedes der folgenden Resultate ist das Mittel aus 4 Schwingungsreihen, die nur um einige Einheiten in den dritten Decimalstellen von einander abweichen.

Für Nadel 1 bei	— 5,87	Reaum. Zeit von 10 Schwingungen	31,443
	+ 14,94	— — — — — —	31,715
— — 2 bei	— 3,33	— — — — — —	31,572
	+ 14,71	— — — — — —	31,917
— — 3 bei	— 5,89	— — — — — —	41,067
	+ 15,00	— — — — — —	40,290
— — 4 bei	— 6,13	— — — — — —	35,201
	+ 15,11	— — — — — —	35,696
— — 5 bei	— 4,90	— — — — — —	31,320
	+ 15,55	— — — — — —	31,697.

Bei Betrachtung dieser Resultate muss nun sogleich auffallen, dass die Nadel N° 3 in der Kälte mehr Zeit auf 10 Schwingungen braucht, als in der Wärme. Ein Fehler der Zählung kann nicht angenommen werden, da alle 4 Reihen in der Zahl der Schwingungen sehr genau übereinstimmen; eben so wenig kann man die Anomalie einer zufälligen plötzlichen Störung des Uhrgangs zuschreiben, da 2 Beobachtungsreihen an einem Chronometer, 2 aber an einem Comparateur gezählt

wurden und beide gleichfalls gut mit einander stimmen. Dieses Factum bleibt daher für jetzt unerklärt und ich war nicht im Stande, bei den Beobachtungen mit der Nadel 3 eine Correction für die Wärme anzubringen.

Bei den übrigen 4 Horizontalnadeln ist dieses aber auf folgende Weise bewerkstelligt worden. Ich reducirte alle Schwingungszeiten auf diejenigen, die die Nadel bei 15° Reaum. gegeben hätte. Sey zu dem Ende die Anzahl der Schwingungen in St. Petersburg bei den Temperaturen t und t' mit n und n' bezeichnet und bedeute y einen zu bestimmenden Coefficienten (der die Veränderung der Schwingungszeit für 1° Reaum. Temperaturveränderung ausdrückt, wenn die ganze Schwingungszeit zur Einheit angenommen wird), x aber die unbekannte Schwingungszeit bei 15°, so haben wir die Gleichungen

$$n\,[1+(15-t)y]=x$$
$$n'\,[1+(15-t')y]=x.$$

Hieraus erhalten wir durch Subtraction und mit einigen Verwandlungen

$$y=\frac{n-n'}{(15-t')\,n'-(15-t)\,n}$$

Setzen wir in diese Formeln die so eben angegebenen Werthe für n, n', t, t' bei den Nadeln 1, 2, 4, 5, so erhalten wir für jede derselben y und hiemit die Gleichungen

für die Nadel	1	Schwingungszeit bei 15° oder	$x=n\,[1+0{,}00041570\,(15-t)]$
— — —	2	— — — — — —	$x=n\,[1+0{,}00060584\,(15-t)]$
— — —	4	— — — — — —	$x=n\,[1+0{,}00066134\,(15-t)]$
— — —	5	— — — — — —	$x=n\,[1+0{,}00058843\,(15-t)]$

Die hiernach corrigirten Schwingungszeiten der Nadeln 1, 2, 4 und 5 sind nun in nachfolgender Tabelle enthalten:

Ort der Beobacht.	Corrigirte Schwingungszeiten			
	1	2	4	5
A	23, 949	24, 084	27, 628	21, 220
B		24, 725	27, 761	21, 581
C		24, 925	28, 269	22, 293
D		25, 304	29, 336	22, 679
H	23, 723	23, 819	27, 545	21, 461
I	23, 397	23, 562	27, 101	21, 096
K	23, 411			
L	23, 923			
M	22, 618			
N	22, 360			
Q	22, 082	22, 199	25, 581	
S	22, 113			
U	22, 145			
F'	34, 378	34, 611	39, 728	31, 101
G'	27, 356	29, 568	34, 135	26, 967
H'	27, 816	28, 144	32, 544	25, 401
O'	22, 495	22, 516	25, 707	20, 090
P'	22, 410	22, 395	25, 597	20, 085
Q'	22, 338			
R'	22, 250			
S'	22, 632			
T'	22, 577			
U'	22, 544	22, 453	25, 963	20, 258
V'	23, 022	22, 957	26, 389	20, 606
X'	22, 676	22, 600	25, 676	20, 271
Y'	27, 142	24, 044	27, 385	21, 392
H'	28, 525	28, 616	32, 559	25, 548
Z'	30, 820	30, 821	35, 505	27, 604
a	36, 575	36, 747	42, 115	32, 873
b	35, 582	35, 736	40, 556	31, 659
H'	28, 575	28, 307	32, 817	25, 678
c	22, 874	22, 781	25, 800	20, 165

(B)

Um nun aus diesen corrigirten Schwingungszeiten die Intensität des Erdmagnetismus an den verschiedenen Beobachtungsorten auf dieselbe Einheit bezogen zu erhalten, wählte ich dazu diejenige Einheit, die Hansteen seinen Arbeiten über diesen Gegenstand zu Grunde legte, nämlich die von Humboldt in Peru auf dem magnetischen Aequator beobachtete. Hansteen giebt für diese Einheit die magnetische Intensität im Hafen von Peter und Paul in Kamtschatka $= 1,4470$ an; indem ich von diesem Werthe ausging, wodurch meine Resultate mit denen Hansteens unmittelbar vergleichbar sind, führte ich die Rechnung folgendermaassen:

Es sey in Kamtschatka die Zeit von 10 Horizontalschwing. $= t$, die Inclin. $= I$
— — an einem andern Orte . . . . $= t'$, — — $= I'$
die horizont. magnet. Kraft in Kamtsch. u. an d. andern Orte hiesse H u. H'
— ganze — — — — — — — — 1,4470 u. K,

so hat man die Gleichungen

$$\frac{H}{H'} = \frac{t'^2}{t^2}$$

$$1,447 \cdot \cos. I = H$$

$$K \cdot \cos. I' = H'$$

woraus wir durch Elimination von H und H' erhalten

$$K = \frac{1,447 \cdot t^2 \cdot \cos. I}{t'^2 \cdot \cos. I'}$$

Nach dieser Formel habe ich nun K für die verschiedenen Beobachtungsörter berechnet, indem ich die Werthe von t und t' aus der Tafel (B) für die Nadeln 1, 2, 4, 5 und aus der Tafel (A) für die Nadel 3 in diese Formel setzte. Die folgende Tafel enthält die Resultate, wobei man sich also erinnern muss, dass für die Nadel 3 keine Wärmecorrection angebracht worden ist. Die Inclinationen I sind aus dem ersten Theile dieser Abhandlung entlehnt.

Ort der Beob.	Inclination an diesem Orte.	Berechnete Intensitäten.				
		1	2	3	4	5
A	14° 35,2	0,8878	0,8912	0,9049	0,9056	0,9352
B	24 = 47,5		0,9015		0,9562	0,9550
C	43 = 12,1		1,1046		1,1485	1,1250
D	52 = 27,2		1,2822		1,2756	1,3003
H	45 = 32,6	1,2504	1,2592		1,2590	1,2635
I	39 = 56,4	1,1703	1,1754	1,2401	1,1880	1,1944
K	40 = 1,0	1,1714				
L	32 = 6,4	1,0166				
M	20 = 35,8	1,0292				
N	15 = 3,5	1,0207				
Q	0 = 28,1	1,0107	1,0152		1,0224	1,7312
S	2 = 14,2	1,0086				
U	2 = 10,6	1,0057				
F′	75 = 54,8	1,7133	1,7160	1,8514	1,7415	1,7312
G′	68 = 25,6	1,7851	1,5564	1,6407	1,5615	1,5242
H′	64 = 7,0	1,4470	1,4470	1,4470	1,4470	1,4470
O′	2 = 54,8	0,9830	0,9882	0,9797	1,0137	1,0109
P′	0 = 36,9	0,9879	0,9976	0,9805	1,0211	1,0104
Q′	0 = 30,3	0,9940				
R′	1 = 38,7	1,0018				
S′	5 = 16,5	0,9717				
T′	1 = 37,3	0,9729				
U′	0 = 45,8	0,9771	0,9925	0,9871	0,9926	0,9932
V′	12 = 52,2	0,9606	0,9738	0,9680	0,9853	0,9845
X′	0 = 39,2	0,9648	0,9796	0,9957	1,0148	0,9919
Y′	36 = 48,2	1,0614	1,0809	1,0925	1,1142	1,1123
H′		1,3789	1,3996	1,4303	1,4457	1,4304
Z′	69 = 12,5	1,4591	1,4838	1,5103	1,4950	1,5065
a	76 = 35,8	1,5787	1,5984	1,6510	1,6271	1,6262
b	75 = 43,1	1,5662	1,5882	1,6443	1,6488	1,6483
H′	63 = 56,8	1,3687	1,4303	1,4307	1,4229	1,4158
c	16 = 15,5	0,9886	1,0042	1,0178	1,0469	1,0440

(C)

In der so eben mitgetheilten Tabelle der Intensitäten ist vorausgesetzt worden, die Nadeln haben ihre Kraft unverändert behalten während der ganzen Dauer der Reise; da dieses aber schwerlich der Fall ist, so müssen wir suchen aus diesen Be-

obachtungen die Veränderungen der Nadel, in Hinsicht auf ihre magnetischen Kräfte, zu ermitteln und wo möglich eine Correction anzubringen, die die erhaltenen Werthe den wahren Intensitäten so nah wie möglich brächte. Wären sämmtliche Beobachtungen zwischen 2 an einem und demselben Orte angestellten enthalten, so würde man aus den gefundenen Werthen der magnetischen Intensität an diesem Orte vor und nach der Beobachtungsreihe diese Correction auffinden können. Dieses ist aber leider nicht der Fall gewesen und Capitain Lütke bedauerte es schon bei der Ausfahrt aus England, dass die späte Ankunft der Instrumente aus London keine Beobachtung in England zuliess und doch war dies der einzige Ort, wo das Schiff auf der Rückfahrt wieder eintraf. Es bleibt also nur übrig die Beobachtungen in Kamtschatka, welcher Ort mit H' in unsern Tabellen bezeichnet ist, zu einer wenigstens annähernden Correction zu benutzen. An diesem Orte nämlich sind, wie aus der letzten Tabelle ersichtbar, 3 Mal zu verschiedenen Zeiten Beobachtungen über die Intensität der Cylinder angestellt worden; diese Beobachtungen umschliessen aber nur einen Theil der übrigen der Zeit nach, nämlich nur 18, während 32 vor der ersten Beobachtung in Kamtschatka und eine nach der letzten an diesem Orte angestellt wurden. Für diese 33 Bestimmungen der Intensität des Erdmagnetismus wird es daher begreiflicher Weise viel misslicher eine Correction anzubringen, als für die 18 dazwischenliegenden, indessen glaubte ich doch, dass wenn ich jene ganz ohne eine solche liesse, die Fehler grösser werden würden, als wenn ich eine, wenn auch weniger genaue, Correction anbrächte. Diese Correction berechnete ich folgendermassen:

Setzen wir aus unsrer obigen Tabelle die dreimaligen Beobachtungen in Kamtschatka oder an dem Orte H' heraus, so haben wir:

	Zeit d. Beobachtung.	Intensitäten mit den Nadeln:				
		1	2	3	4	5
Beobacht. 1 in H'	30. Sept. 1827	1, 4470	1, 4470	1, 4470	1, 4470	1, 4470
— 2 —	6. Juni 1828	1, 3789	1, 3996	1, 4303	1, 4457	1, 4304
— 3 —	9. Oct. 1828	1, 3687	1, 4303	1, 4307	1, 4229	1, 4158

woraus sich ergiebt

	Veränderung der Intensitäten bei der Nadel:				
	1	2	3	4	5
für einen Zeitraum von 249 Tagen	0, 0681	0,0474	0,0167	0,0013	0,0166
— — — — — 125 —	0, 0102	− 0,0307	0,0004	0,0228	0,0146

Nehmen wir nun an, die Stärke des Erdmagnetismus sey in Kamtschatka alle 3 Mal gleich oder wenigstens wenig verschieden gewesen, so zeigt uns die eben mitgetheilte kleine Tabelle, dass die magnetischen Intensitäten sämmtlicher Nadeln schwächer geworden seyen und dass die Schwächung derselben den zwischen den 3 Beobachtungen verflossenen Zeitintervallen nicht proportional war, denn das zweite Zeitintervall ist fast genau die Hälfte des ersten, die Intensitätsabnahme ist aber bei keiner Nadel in diesem Verhältnisse kleiner, ja bei der Nadel 2 ist sogar eine Zunahme der Intensität zu bemerken, die wohl nicht anders erklärt werden kann, als durch den Einfluss des Erdmagnetismus auf den vielleicht nicht genug gehärteten Stahl der Nadel, denn vor der grossen Annäherung künstlicher Magnete hat Capitain Lütke sich gewiss sorgfältig gehütet. Am besten haben sich die Nadeln 3, 4 und 5 gehalten; deshalb glaubte ich die Resultate von N°. 3 zu den übrigen hinzuziehen zu müssen, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dass diese Nadel keine Correction für die Temperatur erhalten hatte, indem diese Correction wohl kleiner ausfallen möchte, als die Ungewissheit bei der Correction für die Abnahme der Kraft der Nadeln anzuschlagen ist.

Um diese letztere nun zu bewerkstelligen, fing ich damit an sie für die, der Zeit nach, zwischen der ersten und zweiten Kamtschatkischen Beobachtung liegenden Intensitäten zu bestimmen und verfuhr dabei folgendermassen:

Es seyen an einem und demselben Orte (also bei uns in Kamtschatka) zu zwei verschiedenen Zeiten T und $T_{(n)}$ die magnetischen Intensitäten a und $a_{(n)}$ beobachtet, zwischen diesen Beobachtungen aber die Intensitäten an verschiedenen andern Orten

mit derselben Nadel bestimmt worden und zwar zur Zeit $T_{(1)}$ die Intensität $a_{(1)}$
— — $T_{(2)}$ — — $a_{(2)}$
— — $T_{(3)}$ — — $a_{(3)}$
etc.

Wir beobachten bekanntlich eigentlich die Producte des Erdmagnetismus in dem Magnetismus der Nadel. Nehmen wir nun an, die Intensitäten des Erdmagnetismus für die Beobachtungsorte seyen zu den Zeiten T, $T_{(1)}$, $T_{(2)} \cdots\cdots T_{(n)}$ gewesen: b, $b_{(1)}$, $b_{(2)}$, $b_{(3)} \cdots b_{(n)}$, die schwächer werdenden Intensitäten der Nadel eben an denselben Ort $= 1$, $1 - \delta_{(1)}$, $1 - \delta_{(2)}$, $1 - \delta_{(3)} \cdots$, $1 - \delta_{(n)}$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a = b \cdot 1 \\ a_{(1)} = b_{(1)}\,(1 - \delta_{(1)}) \\ a_{(2)} = b_{(2)}\,(1 - \delta_{(2)}) \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ a_{(n)} = b_{(n)}\,(1 - \delta_{(n)}) \end{array}\right\} \quad (a)$$

Setzen wir also voraus, die Intensitäten des Erdmagnetismus an dem ersten Orte haben bei der letzten Beobachtung, die an demselben Orte angestellt ward, sich nicht verändert, so haben wir

$$a = b$$

$$a_{(n)} = b\,(1 - \delta_{(n)})$$

woraus wir erhalten $\delta_{(n)} = \frac{a - a_{(n)}}{a}$

Nehmen wir nun an, die Veränderungen der Intensitäten der Nadeln zwischen den Beobachtungen an einem und demselben Orte seyen den Zeiten proportional gewesen, so erhalten wir

$$\delta_{(1)} = \frac{T_{(1)} - T}{T_{(n)} - T} \cdot \delta_{(n)} \qquad \delta_{(2)} = \frac{T_{(2)} - T}{T_{(n)} - T} \cdot \delta_{(n)}$$

Setzen wir diese Werthe von $\delta_{(1)}$, $\delta_{(2)}$ etc. in die Gleichungen (a) und entwickeln daraus ihnen $b_{(1)}$, $b_{(2)}$ etc. so erhalten wir

$$b_{(1)} = \frac{a_{(1)}}{1 - \frac{T_{(1)} - T}{T_{(2)} - T} \cdot \delta_{(n)}}$$

$$b_{(2)} = \frac{a_{(2)}}{1 - \frac{T_{(2)} - T}{T_{(2)} - T} \cdot \delta_{(n)}}$$

etc.

Die Werthe von α, $a_{(1)}$, $a_{(2)} \cdots a_{(n)}$ sind in der Tabelle (C) gegeben, die Zeiten T, $T_{(2)}$ etc. finden sich in der Tabelle A, aus diesen Werthen berechnete ich zuerst $\delta_{(n)}$ für die verschiedenen Nadeln und dann $b_{(1)}$, $b_{(2)}$ etc. oder die corregirten Intensitäten des Erdmagnetismus. Für die 32 Beobachtungen vor der ersten Kamtschatkaschen nahm ich $\delta_{(n)}$ wie im Intervall zwischen den ersten beiden Kamtschatkaschen Beobachtungen an, für die eine Beobachtung nach dem zweiten Intervall aber nahm ich diesen Werth wie in diesem Intervall an.

Ehe ich aber die Tabelle der auf diese Weise corrigirten Intensitäten hier folgen lasse, will ich noch die mit der kleinen Inclinationsnadel N° 1 angestellten Bestimmungen der magnetischen Erdkraft der Berechnung unterwerfen. Dieselben haben nicht die Genauigkeit, welche mit den horizontalen Schwingungsnadeln erreicht werden kann, weil sie (ausser der grösseren Reibung an den Axen) einer Fehlerquelle mehr unterworfen sind, als jene. Diese liegt darin, dass unmöglich der Schwerpunkt der Nadel genau mit der Drehungsaxe derselben zusammenfällt, dass also die Nadel nicht in der wahren Inclination sich einstellt; daraus folgt, dass, wenn die beobachtete Intensität $= f$ ist und die Nadel mit der wahren Inclination den Winkel α bildet, die wahre Intensität durch $\frac{f}{\cos. \alpha}$ ausgedrückt werden muss; man wird also die Intensität gegen die wahre um so kleiner finden, je grösser α ist. Aus einer Inclinationsbestimmung an dem Punkt A (Rio de Janeiro) mit derselben kleinen Nadel N°. 1 ersieht man, dass der Winkel α hier circa 4° beträgt, woraus folgt, dass die Intensität an diesem Orte, wenn sie durch dieses In-

strument bestimmt worden wäre, um $\frac{1}{400}$ zu klein ausgefallen wäre. Da aber der Winkel α bei verschiedenen Inclinationen verschieden ist, so ist $\frac{1}{\cos. \alpha}$ kein constanter Factor und folglich lässt sich die Correction nicht in Rechnung bringen.

Da es nun aber offenbar schade wäre, wenn deshalb die ziemlich bedeutende Reihe von Inclinationsbestimmungen, die der Capitain Lütke mit dieser Inclinationsnadel angestellt hat, verloren gingen, so habe ich die Bestimmungen mit derselben wenigstens interpolationsweise benutzt und zwar auf folgende Art:

Ich nahm das aus den corrigirten Intensitätsbestimmungen der Horizontalnadeln an jedem Orte berechnete arithmetische Mittel als die wahre Intensität dieser Orte an; es seyen nun diese wahren Intensitäten an 2 Orten, zwischen welchen ich mittelst der Schwingungen der Inclinationsnadel N°. 1 interpoliren will $= b$ und $b_{(n)}$, die Schwingungszeiten der Inclinationsnadel an diesem Orte $= a$ und $a_{(n)}$, so ergiebt sich die beobachtete Intensität für den zweiten Ort oder $a_{(n)}$ durch die Gleichung

$$a_{(n)} = \frac{a^2}{a^2{}_{(n)}} \cdot b$$

und, wenn wir die früheren Bezeichnungen für $a_{(1)}$, $a_{(2)} \cdots b_{(1)}$, $b_{(2)} \cdots \delta_{(1)}$, $\delta_{(2)} \cdots$ beibehalten, so haben wir die Gleichungen

$$a_{(1)} = b_{(1)} \; (1 - \delta_{(1)})$$
$$a_{(2)} = b_{(2)} \; (1 - \delta_{(2)})$$
$$\vdots$$
$$a_{(n)} = b_{(n)} \; (1 - \delta_{(n)})$$

Setzen wir die letzte Gleichung hier $a_{(n)}$ seinen Werth, so erhalten wir

$$\delta_{(n)} = \frac{b_{(n)} - \frac{a^2}{a^2{}_{(n)}} \cdot b}{b_{(n)}}$$

Da nun $b_{(2)}$ und b durch die Horizontalnadeln bekannt sind, so finden wir $\delta_{(n)}$ und wenn $\delta_{(1)}$, $\delta_{(2)} \cdots$ den zwischenliegenden Zeitintervallen proportional sind, so ergeben sich $b_{(1)}$, $b_{(2)} \cdots$ nach den Formeln

$$b_{(1)} = \frac{a_{(1)}}{1 - \frac{T_{(1)} - T}{T_{(n)} - T} \delta_{(n)}}, \quad b_{(2)} = \frac{a_{(2)}}{1 - \frac{T_{(2)} - T}{T_{(n)} - T} \cdot \delta_{(n)}} \text{ etc.}$$

Mit Anwendung dieser Formeln ergaben sich aus den Beobachtungen aller Nadeln, mit Ausschluss von *C*, *D*, *E*, die zu wenig gebraucht wurden, um ihre Unveränderlichkeit gehörig prüfen zu können, folgende Intensitäten:

Ort der Beob.	Corrigirte Intensitäten des Erdmagnetismus.					Inclinator. N°. 1.	Mittel oder wahre Intensität.
	Nadel 1.	Nadel 2.	Nadel 3.	Nadel 4.	Nadel 5.		
A	0, 8449	0, 8607	0, 8939	0, 9048	0, 9238		0, 8856
B		0, 8720		0, 9553	0, 9439		0, 9237
C		1, 0697		1, 1474	1, 1123		1, 1098
D		1, 2427		1, 2745	1, 2859		1, 2677
E						1, 3203	1, 3203
F						1, 4127	1, 4127
G						1, 3236	1, 3236
H	1, 2029	1, 2255		1, 2580	1, 2514		1, 2345
I	1, 1294	1, 1464	1, 2293	1, 1872	1, 1570		1, 1699
K	1, 1351					1, 1708	1, 1529
L	0, 9864					1, 1061	1, 0462
M	1, 0002					1, 0277	1, 0139
N	0, 9926					1, 2902	1, 1414
O						1, 0047	1, 0047
P						0, 9977	0, 9977
Q	0, 9836	0, 9961		1, 0218			1, 0005
R						0, 9965	0, 9965
S	0, 9817					0, 9948	0, 9890
T						0, 9948	0, 9948
U	0, 9792					0, 9999	0, 9896
V						1, 0135	1, 0135
W						1, 0124	1, 0124
X						1, 1124	1, 1124
Z						1, 2125	1, 2125
A'						1, 3764	1, 3764
B'						1, 4559	1, 4559
C'						1, 5731	1, 5731
D'						1, 6526	1, 6526
E'						1, 6624	1, 6624
F'	1, 6787	1, 6918	1, 8423	1, 7409	1, 7225		1, 7352
G'	1, 7684	1, 5462	1, 6369	1, 5612	1, 5207		1, 6041
H'	1, 4470	1, 4470	1, 4470	1, 4470	1, 4470	1, 4470	1, 4470

Ort der Beob.	Corrigirte Intensitäten des Erdmagnetismus.					Inclinator. N°. 1.	Mittel oder wahre Intensität.
	Nadel 1.	Nadel 2.	Nadel 3.	Nadel 4.	Nadel 5.		
I'						1, 3027	1, 3027
K'						1, 1859	1, 1859
L'						1, 1127	1, 1127
M'						0, 9886	0, 9886
N'						0, 9704	0, 9704
O'	0, 9941	0, 9959	0, 9823	1, 0139	1, 0138	1, 0138	1, 0023
P'	1, 0038	1, 0088	0, 9841	1, 0214	1, 0143	0, 9710	1, 0006
Q'	1, 0100						1, 0100
R'	1, 0181						1, 0181
S'	0, 9902						0, 9902
T'	0, 9926						0, 9926
U'	0, 9988	1, 0078	0, 9924	0, 9930	0, 9984		0, 9981
V'	0, 9878	0, 9929	0, 9745	0, 9860	0, 9912	1, 0000	0, 9888
X'	0, 9979	1, 0027	1, 0037	1, 0155	1, 0000		1, 0040
Y'	1, 1042	1, 1116	1, 1031	1, 1150	1, 1232	1, 1100	1, 1112
Z'	1, 5325	1, 5602	1, 5279	1, 4998	1, 5262	1, 5486	1, 5325
a'	1, 6609	1, 6404	1, 6703	1, 6372	1, 6507	1, 6519	1, 6519
b'	1, 6514	1, 6192	1, 6635	1, 6170	1, 6784	1, 6482	1, 6461
c'	1, 0504	1, 0010	1, 6297	1, 0766	1, 0640		1, 0444

Um aus den verschiedenen Angaben der Intensitäten an einem und demselben Orte, durch die verschiedenen Nadeln die wahrscheinlichste Intensität zu finden, müsste man die Gewichte dieser Angaben kennen; da es aber nicht möglich ist, diese anzugeben, so habe ich die Gewichte aller gleich gesetzt und also das arithmetische Mittel aus allen für ein und denselben Ort berechneten Intensitäten für die wahre Intensität angenommen; die letzte Columne der vorhergehenden Tabelle enthält diese Werthe.

Zum Schluss habe ich sämmtliche Endresultate der in dieser Abhandlung berechneten Inclinationen und Intensitäten in nachfolgender Tabelle vereinigt, wo man zugleich die geographische Lage und die nähere Bezeichnung der Orte *A*, *B*, *C* etc. findet. In einer besondern Columne habe ich aus Capitain Lütke's Journal

die Declinationen der Magnetnadel für diese verschiedenen Orte hinzugefügt; sie sind mit dem auf Schiffen gebräuchlichen Azimutalkompas bestimmt und machen daher keine Ansprüche auf sehr grosse Genauigkeit. Die Bedeutung der einigen Inclinationen beigefügte Sternchen ist aus dem Früheren zu ersehen; dieselben bedeuten nämlich eine geringere Genauigkeit dieser Angaben.

	Beobachtungsort.	Breite.	Länge von Greenwich.	Zeit der Beobachtung.	Declination.	Inclination.	Intensität.
A	Praja Grande bei Rio de Jan.	22° = 53′ S.	43° = 13′ W.	4. Jan. 1827	3° = 00′ O.	14° = 35′, 2 S.	0, 8856
B	Auf dem Meere	29 = 10 —	46 = 25 —	16. — —	6 = 24 —	24 = 47,5* —	0, 9237
C	— — —	40 = 55 —	53 = 00 —	25. — —	14 = 21 —	43 = 12,1 —	1, 1098
D	— — —	49 = 18 —	57 = 12 —	31. — —		52 = 27,2 —	1, 2677
E	— — —	53 = 16 —	58 = 23 —	3. Febr. —		55 = 50,3* —	1, 3203
F	— — —	75 = 25 —	61 = 33 —	8. — —	24 = 48 —		1, 4127
G	— — —	41 = 00 —	77 = 30 —	1. März —		51 = 19,4 —	1, 3236
H	Tome bei Conception	36 = 37 —	72 = 57 —	5. — —	17 = 2 —	45 = 32,6 —	1, 2345
I	Valparaiso . .	33 = 2 —	71 = 30 —	22. — —	15 = 0 —	39 = 56,4 —	1, 1699
K	Auf dem Meere	29 = 38 —	81 = 34 —	11. Apr. —	12 = 47 —	40 = 1 * —	1, 1529
L	— — —	21 = 51 —	91 = 55 —	18. — —	10 = 45 —	32 = 6,4* —	1, 0462
M	— — —	13 = 9 —	108 = 40 —	27. — —	8 = 5 —	20 = 35,8 —	1, 0139
N	— — —	9 = 38 —	116 = 35 —	30. — —	5 = 45 —	15 = 3,5* —	1, 1414
O	— — —	6 = 1 —	119 = 52 —	2. Mai —	4 = 19 —	6 = 53,8* —	1, 0047
P	— — —	4 = 20 —	121 = 47 —	3. — —	4 = 24 —	3 = 53,9 —	0, 9977
Q	— — —	2 = 29 —	123 = 34 —	4. — —	4 = 00 —	0 = 28,1* —	1, 0005
R	— — —	2 = 2 —	123 = 56 —	4. — —		0 = 36,1* N.	0, 9965
S	— — —	1 = 15 —	124 = 30 —	5. — —	4 = 19 —	2 = 14,2* —	0, 9890
T	— — —	1 = 10 —	125 = 29 —	6. — —	5 = 9 —	1 = 33,7* —	0, 9948
U	— — —	0 = 56 S.	126 = 43 —	7. — —	4 = 53 —	2 = 10,6* —	0, 9896
V	— — —	0 = 35 N.	127 = 4 —	8. — —	4 = 46 —	5 = 42,9 —	1, 0135
W	— — —	2 = 24 —	127 = 52 —	9. — —	4 = 42 —	9 = 43,4* —	1, 0124
X	— — —	13 = 13 —	133 = 00 —	19. — —	5 = 49 —	30 = 5,3* —	1, 1124
Y	— — —	21 = 19 —	141 = 3 —	24. — —	10 = 00 —	43 = 8,4 —	
Z	— — —	23 = 26 —	141 = 58 —	25. — —	11 = 6 —	46 = 3 * —	1, 2125
A′	— — —	25 = 21 —	146 = 4 —	30. — —	13 = 00 —	57 = 38,1* —	1, 3764
B′	— — —	40 = 28 —	146 25 —	1. Juni —	17 = 11 —	62 = 43,6 —	1, 4559
C′	— — —	44 = 54 —	145 = 10 —	3. — —	22 = 14 —	65 = 39,8* —	1, 5731

Beobachtungsort.		Breite.	Länge von Greenwich.	Zeit der Beobachtung.	Declination.	Inclination.	Intensität.
D'	Auf dem Meere	48° = 44' —	143° = 27' N.	6. Juni 1827	23° = 1' O.	68° = 25,6' N.	1, 6526
E'	— — —	52 = 29 —	140 = 52 —	9. — —	24 = 25 —	71 = 43,3* —	1, 6624
F'	Neu-Archang.	57 = 3 —	135 = 16 —	13. — —		75 = 54,8 —	1, 7352
G'	Unalaschka . .	53 = 54 —	166 = 30 —	11. Aug. —	19 = 50 —	68 = 25,6 —	1, 6041
H'	Peter-Pauls Hafen in Kamtsch.	53 = 1 —	201 = 16 —	30. Sept. —	3 = 43 —	64 = 7,0 —	1, 4470
I'	Auf dem Meere	45 = 27 —	200 = 58 —	23. Oct. —	3 = 58 —	57 = 56,5* —	1, 3027
K'	— — —	39 = 7 —	200 = 57 —	26. — —	4 = 38 —	51 = 32,0 —	1, 1859
L'	— — —	32 = 59 —	198 = 11 —	1. Nov. —	7 = 12 —	40 = 40,5* —	1, 1127
M'	— — —	18 = 44 —	196 = 5 —	13. — —	8 = 45 —	27 = 55,2 —	0, 9886
N'	— — —	11 = 27 —	198 = 8 —	18. — —	8 = 24 —	14 = 16,7 —	0, 9704
O'	Ualan	5 = 21 —	196 = 35 —	28. — —	8 = 51 —	2 = 54,8 —	1, 0023
P'	Auf dem Meere	4 = 17 —	197 = 6 —	23. Dec. —	9 = 00 —	0 = 36,9 N.	1, 0006
Q'	— — —	3 = 47 —	197 = 1 —	23. — —		0 = 30,3 Süd	1, 0100
R'	— — —	2 = 56 —	197 = 10 —	24. — —	8 = 58 —	1 = 38,7 —	1, 0181
S'	— — —	6 = 55 —	201 = 58 —	7. Jan. 1828	8 = 00 —	5 = 16,5 N.	0, 9902
T'	Insel Los Valientes . .	5 = 46 —	202 = 55 —	13. — —	7 = 00 —	1 = 37,3 N.	0, 9926
U'	— Lugunor .	5 = 29 —	206 = 2 —	23. — —	6 = 29 —	0 = 45,8 Süd	0, 9981
V'	— Guahan .	13 = 26 —	215 = 16 —	23. Febr. —	2 = 57 —	12 = 52,2 N.	0, 9888
X'	— Ulean . .	7 = 22 —	216 = 3 —	24. März —	3 = 7 —	0 = 39,2 N.	1, 0040
Y'	— Bonin . .	27 = 4 —	217 36 —	28. Apr. —	0 = 6 W.	36 = 48,2 —	1, 1112
Z	Kuruginsky . .	58 = 34 —	196 = 33 —	24. Juni —		69 = 12,5 —	1, 5325
a	Laurentius-Brig	65 = 38 —	170 = 46 —	18. Juli —	24 = 4 O.	76 = 35,8 —	1, 6519
b	Heilige Kreuzb.	65 = 28 —	178 = 32 —	25. Aug. —		75 = 43,1 —	1, 6461
c	Manilla	14 36 —	243 = 42 —	4. Jan. 1829	0 = 10 —	46 = 15,5 —	1, 0444

ÜBER

DAS GESETZ DER LEITUNGSFÄHIGKEIT

FÜR

ELECTRICITÄT BEI DRÄTHEN

VON VERSCHIEDENEN LÄNGEN UND DURCHMESSERN;

VON

E. LENZ.

(Gelesen den 28. November 1834.)

Wenn auch Van Marum, Priestley, Childern, Harris und Davy schon vor Galvani's glänzender Entdeckung vermittelst der Entladung von Leidner Batterieen die Leitungsfähigkeit verschiedener Metalldräthe zu bestimmen suchten, so sind doch die ersten *genaueren* Versuche hierüber erst nach dieser Periode angestellt worden an der einfachen Galvanischen Kette und an der Voltaschen Säule: sonderbarer Weise haben diese genauern Versuche aber zu widersprechenden Resultaten geführt. Während die Versuche Davy's, Pouillet's, Becquerel's, Christie's, Ohm's und Fechner's das Gesetz darthun, dass Dräthe eines und desselben Metalls die Electricität in umgekehrtem Verhältnisse ihrer Längen und in directem ihrer Querschnitte (also im quadratischen ihrer Durchmesser) leiten, behaupten Barlow und Cumming nach den ihrigen, die Leitungsfähigkeit verhalte sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Längen und direct wie die Durchmesser der Dräthe (oder wie die Quadratwurzeln ihrer Querschnitte). Ritchie, der diesen Gegenstand zuletzt behandelt hat (Poggend.

*

Bd. 32.) der aber als Engländer gewohnter Maassen die Arbeit der deutschen Physiker Ohm und Fechner ganz und gar nicht kennt, glaubt diesen Widerspruch daraus erklären zu können, dass die Leitungsfähigkeit der Dräthe verschieden sey für verschiedene Stärken des Stroms, indem er mittelst seiner Multiplicatordrehwage fand, dass, wenn er 2 Dräthe in verschiedene Ketten brachte, die Stärke der Ströme in ihnen nicht dasselbe Verhältniss zu einander behielten. Er erklärt sich die Sache nach seiner eigenthümlichen Ansicht der electrischen Leitung folgendermaassen:

» Setzen wir voraus, dass keine Fortführung der Electricität längs dem Drathe »stattfinde, sondern dass alle Erscheinungen der Ablenkung u. s. w. hervorgehn aus »einer bestimmten Anordnung des wesentlich zum Drathe selbst gehörigen Fluidums. »Setzen wir ferner voraus, dass ein Querschnitt des Draths 100 Theilchen Electri»cität enthalte, und dass die Batterie im Stande sey $\frac{1}{4}$ hiervon oder 25 Theile zu »ordnen, so bleiben bei einer Verstärkung der Kraft nur 75 zu ordnen übrig. »Nehmen wir nun an, wir hätten einen andern Drath, dessen Querschnitt nur 25 »Atome enthielte, so ist klar, dass dieselbe Batterie im Stande seyn wird, mehr als »ein Viertel dieser Anzahl zu ordnen, so dass das Verhältniss seiner Leitungsfähig»keit nicht das von 1 zu 4 seyn wird, sondern ein ganz anderes. Vergrössern wir »die Batterie, verdoppeln wir z. B. die Grösse der Platten, so ist klar, dass wir die »Ablenkungskraft dadurch nicht verdoppeln werden, denn von 100 Theilen sind »nur 75 zurückgeblieben, von denen nur ein Theil durch den hinzukommenden »Theil der Batterie geordnet werden kann. Folglich wächst die Ablenkungskraft sehr »langsam mit der vermehrten Grösse der Platten oder der Stärke der Säure. Es lässt »sich einer der Leitungsdräthe so dünn denken, dass die Batterie fast seine gesammte »Electricität ordnet und in diesem Falle wird eine Vergrösserung der Batterie schwer»lich eine Verstärkung der Ablenkungskraft in dem Leiter erzeugen.«

So weit Ritchie. Dass diese seine Ansicht nicht richtig sey, lässt sich leicht aus Erfahrungen darthun, zu denen die Maassbestimmungen Fechners vielfache Belege darbieten. So z. B. giebt es allerdings Anordnungen in geschlossenen galvanischen Ketten, die ein solches Verhältniss der Säule zu den verbindenden Dräthen darbie-

ten, dass eine Vermehrung der Plattenpaare keine merkliche Verstärkung des Stroms im Drathe hervorbringt. Hier müsste nun nach Ritchie's Ansicht das ganze Fluidum des Draths bereits geordnet seyn und es wäre also überhaupt nicht möglich einen stärkeren Strom durch ihn hindurch zu leiten; allein dieses ist nun ganz und gar nicht der Fall, denn wenn man, statt die Anzahl der Plattenpaare zu vermehren, ihre Dimensionen z. B. verdoppelt, so wird der Strom im Drathe fast genau doppelt so stark werden. Dieses beweist also, dass nicht alles Fluidum des Verbindungsdrathes bereits geordnet war und dass es nur einer anderen Disposition der voltaischen Batterie bedurfte, um die Anordnung einer doppelten Anzahl der Theile des Fluidums (immer in Ritchie's Sinn gesprochen) hervorzubringen. Mit andern Worten, die Ansicht Ritchies lässt den Unterschied der Wirkung vielplattiger und grossplattiger Voltaischer Säulen völlig unerklärt.

Wir sind aber schon seit einigen Jahren im Besitz einer Theorie der galvanischen Kette, die von Ohm herrührt und diesem Mangel nicht unterworfen ist, die aber leider sowohl in Frankreich als in England völlig unbekannt geblieben ist, weil sie nur in deutscher Sprache bekannt gemacht wurde. Wenn man mit ihr vertraut ist, so erklären sich sowohl die Abweichungen der Resultate Barlow's von denen der übrigen Physiker, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigten, als auch die Zweifel Ritchie's vollkommen. Hätte letzterer in dem von ihm in jener Abhandlung ausgesprochenen Satze: »die Leitungsfähigkeit muss eine Function seyn von allen zum »Versuch beitragenden Grössen; d. h. dem Durchmesser und der Länge des Drathes, »der Grösse der Batterie und der Stärke der Säure,« statt des Wortes die »Leitungsfähigkeit« den Ausdruck »die Stärke des Stroms« gebraucht, so hätte er die richtige Erklärung der scheinbaren Anomalieen gegeben.

Ehe ich die einfache Ohmsche Formel hier anführe, muss ich bemerken, dass dieser Gelehrte statt des Wortes *Leitungsfähigkeit* stets sich des Ausdrucks *Leitungswiderstand* bedient; letzterer ist der Leitungsfähigkeit umgekehrt proportional, so dass man hat, wenn L den Leitungswiderstand bedeutet,

$$L = \frac{1}{\text{Leitungsfähigkeit}}$$

Bedeutet also L den Leitungswiderstand einer galvanischen Kette und A die electromotorische Kraft derselben (wobei es hier einerlei ist, ob man sich diese durch den Contact oder durch chemische Affinität erzeugt denkt), so ist die Formel Ohms für die Stärke des Stroms F bekanntlich die folgende

$$F = \frac{A}{L}$$

L drückt aber nicht blos den Leitungswiderstand des Verbindungsdrathes aus, sondern den der *ganzen Kette*, d. h. also die Summe der Leitungswiderstände der Flüssigkeit und der festen Theile derselben. Nehmen wir als Einheit des Leitungswiderstandes den eines Drathes von bestimmter Substanz, Länge und Dicke an, so werden wir in dieser Einheit den Widerstand der eigentlichen Batterie (der Platten und der Flüssigkeit zusammen) durch l ausdrücken können und den des Verbindungsdraths, der eben auf sein Leitungsvermögen geprüft werden soll, durch λ; dann wird unsre Formel verwandelt in

$$F = \frac{A}{l + \lambda}$$

woraus sich der Leitungswiderstand des Verbindungsdrathes ergiebt

$$\lambda = \frac{A}{F} - l$$

Wenn, wie dieses bei Versuchen über die Leitungsfähigkeit der Dräthe der Fall ist, die electromotorische Kraft unverändert gelassen wird, so kann man dieselbe als Einheit annehmen und also die Formel auch so schreiben

$$\lambda = \frac{1}{F} - l.$$

Hat man nun mit Dräthen von verschiedenem Leitungswiderstande $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ etc. die Kette geschlossen und dabei die entsprechenden Stromkräfte $F_{(1)}$, $F_{(2)}$, $F_{(3)}$ erhalten, so haben wir die Proportion

$$\lambda_{(1)} : \lambda_{(2)} : \lambda_{(3)} \cdots\cdots = \left(\frac{1}{F'} - l\right) : \left(\frac{1}{F''} - l\right) : \left(\frac{1}{F'''} - l\right).$$

Die Leitungswiderstände sind also den Intensitäten der beobachteten Ströme nicht umgekehrt proportional (oder den Leitungsfähigkeiten direct), sondern man wird von letzteren erst die constante Grösse l abziehen müssen, ehe dieses Verhältniss wirklich stattfindet.

Wenden wir uns nun, nach Feststellung dieser einfachen Ansicht, nochmals zu den oben angeführten Versuchen der verchiedenen Gelehrten über Leitungsfähigkeit der Dräthe, so finden wir, dass Ohm und Fechner ihre Versuche mit Zugrundelegung derselben berechnet haben, dass aber die Versuche Davy's und Becquerels in der Art angestellt wurden, dass sie einem Fehler aus der Nichtbeachtung derselben nicht unterworfen waren; daher die Uebereinstimmung ihrer Resultate mit denen der deutschen Physiher. Davy schloss nämlich die Pole einer Voltaischen Säule zu gleicher Zeit und neben einander durch 2 Verbindungen; die eine ward durch einen einfachen Metalldrath bewirkt, in der andern befand sich ein Wasserzersetzungsapparat; der Strom theilte sich also zwischen beiden Verbindungen und es wurde die Metallleitung so lange durch Abnahme der Länge oder Zunahme der Breite verstärkt, bis der durch's Wasser gehende Strom so schwach wurde, dass dieses nicht mehr zersetzt ward. Diese Grenze suchte nun Davy durch Dräthe verschiedener Dicke zu erreichen und fand auf diese Weise, dass 2 Dräthe verschiedener Dicke dieselbe Grenze erreichten, wenn ihre Längen ihren Querschnitten proportional waren. Da hier immer dieselbe Stärke des Stroms bei beiden Verbindungsdräthen erreicht wurde, so muss, unabhängig von jeder Theorie über die Abhängigkeit der Intensität der Ströme von den Theilen der Kette, der eine Drath an Leitungsfähigkeit dem andern genau gleich gesetzt werden können, woraus sich dann das Verhältniss der Länge zur Dicke, ergiebt. Diese Beobachtungsart muss daher Resultate geben, die keinen bestimmten Fehler einschliessen, die aber nur einen sehr geringen Grad von Genauigkeit in der Messung zulassen können.

Becquerel wand 2 Dräthe derselben Substanz aber von verschiedener Länge und Dicke auf gleiche Weise um einen Multiplicatorrahmen, so dass die Windungen des einen zwischen denen des andern lagen; wurde daher durch beide derselbe Strom aber in entgegengesetzter Richtung hindurchgeleitet, so musste die Multiplicatornadel in Ruhe bleiben. Er verband die Enden eines jeden Draths mit derselben voltaischen Säule, aber auf entgegengesetzte Weise in Hinsicht auf die Pole derselben. Da die Dräthe verschiedene Querschnitte hatten, so war bei glei-

cher Länge der Strom in dem dickeren Drathe stärker, als der im dünnern und es fand daher eine Ablenkung der Multiplicatornadel statt; er verminderte nun die Länge des dünnern Draths so lange, bis die Ströme in beiden gleich stark wurden, d. h. bis die Multiplicatornadel in Ruhe blieb. Auf diese Weise erhielt er nun 2 Dräthe von verschiedener Länge und Dicke, die die Electricität gleich gut leiteten und er folgerte aus der Vergleichung ihrer Dimensionen, »dass bei gleich gut leiten»den Dräthen derselben Substanz die Längen sich wie die Massen der Dräthe verhal»ten d. h. wie die Querschnitte.« Dieser Satz ist es, den auch die Davyschen Versuche eigentlich nur beweisen und Ritchie wendet dieses daher mit Recht gegen Versuche der Art ein, allein er macht es mit Unrecht Becquerel zum Vorwurf, als habe er dieses nicht selbst sehr wohl bemerkt. Erst nachdem Becquerel auf anderm Wege ermittelt hatte, dass die Leitungen sich verkehrt wie die Längen verhalten, zog er aus den so eben erwähnten Versuchen den richtigen Schluss, dass sie sich direct wie die Querschnitte verhalten.

Pouillet brachte verschiedene Dräthe successiv zwischen die Pole einer und derselben Säule und bestimmte die Kraft des Stroms nach der Tangente des Ablenkungswinkels. Er giebt an, die Leitung dem Querschnitt proportional gefunden zu haben; was die Längen betrifft, so kann er zu dem interessanten Resultate, dass sich die Stärke des Stroms umgekehrt wie die Längen der Dräthe verhalte, wenn man zu dieser eine constante Grösse addirt. Bezeichnen wir nämlich die Stärke zweier Ströme durch F und F', die entsprechenden Längen der geprüften Leitungsdräthe mit λ und mit λ' und mit l eine constante Grösse, so ist die Formel Pouillet's

$$\frac{F'}{F} = \frac{l+\lambda}{l+\lambda'}$$

Dieses ist nun aber eine unmittelbare Folgerung unsrer Formel für die Stärke des Stroms noch Ohms Theorie, denn nach ihr haben wir für die Leitungswiderstände λ und λ' (die den Längen pronortional sind)

$$F = \frac{A}{l+\lambda} \text{ und } F' = \frac{A}{l+\lambda'}$$
$$\text{folglich } \frac{F'}{F} = \frac{l+\lambda}{l+\lambda'}$$

welches ganz Pouillet's Formel ist, nur hat hier l seine bestimmte Bedeutung, es ist nämlich der Leitungswiderstand aller übrigen Theile der Kette, ausser dem geprüften Drathe.

Eine sehr sorgfältige Versuchsreihe für den in Frage stehenden Punkt liefert uns eine Arbeit Christie's bei Erzeugung der Ströme durch electromagnetische Vertheilung vermittelst des grossen Knightschen Magneten. Ganz und gar nicht mit Ohms Ansichten bekannt, führte ihn, ganz wie Pouillet, eine genaue Discussion seiner Beobachtungen dazu, der Leitung der geprüften Dräthe eine Constante hinzuzufügen, die den Leitungswiderstand des Multiplicatordraths ausdrückt. Er musste also auf diese Weise richtige Resultate finden und in der That ward er zu der Formel für die Leitungsfähigkeit $\frac{D^2}{L}$ geführt, wo D den Durchmesser des Draths und L seine Länge bedeutet Mit dieser Formel die Ablenkungswinkel berechnend, fand er die beobachteten mit den berechneten sehr wohl übereinstimmend *).

Barlow experimentirte wie Pouillet und er hätte gewiss dieselben Resultate gefunden, wenn er drauf gefallen wäre, der Leitung seiner Dräthe eine Constante hinzuzufügen, wie ich solches von Pouillet erwähnt habe. So musste er fehlerhafte Resultate erhalten und in der That glaubte er zu finden, dass das Leitungsvermögen der Quadratwurzel der Länge umgekehrt und dem Querschnitt direct proportional sey. Es lässt sich in der That leicht ein solches Verhältniss des Leitungswiderstandes der Säule zu dem der geprüften 2 Dräthe auffinden, dass bei der Berechnungsart Barlows nahezu ein solches Gesetz herauskömmt. Hätte er z. B. 2 Dräthe desselben Durchmessers von den Längen m und n angewandt, so musste er seine An-

*) In der sonst so ausgezeichneten Abhandlung Christie's vermisst man eine scharfe Unterscheidung der erregten electromotorischen Kraft und des erzeugten Stroms; letzterer ist bekanntlich gleich jener *dividirt durch den Leitungswiderstand.* Die electromotorische Kraft, die der Magnet in den Spiralen hervorruft, ist, bei allen Substanzen und Dimensionen derselben, *dieselbe* (vergl. Mém. de l'Acad. de St.-Pétersbourg, Sciences mathém. Tom. II. p. 427), der Strom aber dem Leitungswiderstande umgekehrt proportional; da bei Faraday's Versuch hierüber der ganze Leitungswiderstand der Kette in den zu je 2 und 2 verglichenen Dräthen derselbe blieb, so musste er die durch Vertheilung in ihnen erregten Ströme gleich finden.

sicht bestätigt finden, wenn sich der Leitungswiderstand der Säule selbst nahezu auf einen Drath von demselben Durchmesser und der Länge

$$\frac{m\sqrt{(n)} - n\sqrt{(m)}}{\sqrt{(m)} - \sqrt{(n)}}$$

reduciren liesse. Nun ist es zwar nicht wahrscheinlich, dass die Säule immer gerade von dieser Beschaffenheit gewesen sey, allein die Versuche stimmen auch mit der, nach seiner Ansicht angestellten, Berechnung so wenig überein, dass sich Abweichungen von 6°—7° zeigen.

Cumming bediente sich als Erreger des Stroms einer thermoelectrischen Kette, allein auch er nahm auf die Leitung der thermoelectrischen Metalle selbst keine Rücksicht und seine Versuche stimmen mit seiner Ansicht, wie er selbst zugiebt, nur approximativ.

Wir sehen also aus Obigem, dass die Widersprüche der Versuche Barlow's, Cumming's und Ritchie's gegen das von den übrigen nachgewiesene Gesetz bei genauerer Würdigung der von ihnen angewandten Verfahrungsarten von selbst verschwinden. Nun ist aber der Satz, dass sich die Leitungsfähigkeit der Dräthe bei gleicher Substanz umgekehrt wie ihre Längen und direct wie ihre Querschnitte verhalten, auf eine so entschiedene Weise und mit so richtiger Würdigung aller in Betracht kommender Umstände von Ohm und Fechner bestätigt worden, dass es fast überflüssig erscheinen möchte noch weitere Bestätigungen dafür anzuführen, wenn nicht das von mir schon mehrmals angewandte Verfahren die Stärke der Leitung durch Ströme der electrodynamischen Vertheilung *) zu bestimmen, eine so grosse Leichtigkeit in der Anstellung und Genauigkeit in der Beobachtung darböte (vergl. Memoires Sciences mathém. et phys. T. II.), dass es mir wenigstens werth

*) Auch Christie hat sich der durch electrodynamische Vertheilung erregten Ströme bei seinen oben erwähnten Versuchen bedient, allein später als ich, da er seine Abhandlung der Royal Society den 8. Februar 1833 vorlegte, während ich meine erste Abhandlung der Art in der KAISERLICHEN Akademie der Wissenschaften bereits am 7. November 1832 las. (Siehe Mémoires, Sciences mathématiques et physiques. T. II. pag. 427.)

schien, diese Methode auch hiefür anzuwenden und so alle Beweise für diesen wichtigen Punkt der Theorie der Säule völlig zu erschöpfen. Dieses ist in nachfolgenden Versuchsreihen geschehen, die also kein neues Gesetz begründen, sondern nur das alte, wie ich hoffe, für immer gegen alle ferneren Einwürfe sichern sollen.

Die Art, wie die Versuche angestellt wurden, ist ganz die in den obenerwähnten Abhandlungen angegebene und ich werde mich daher auf die dort auseinandergesetzte Beschreibung des Apparats und der Beobachtungsart berufen. Nur über einen Punkt, der wohl schon dort einer näheren Erörterung bedurft hätte, werde ich mich hier etwas ausführlicher verbreiten. Indem ich nämlich den Hufeisenmagneten mit seinen beiden Armen aufrecht stehend befestigt hatte, riss ich, um den Strom zu erregen, den cylindrischen Anker mit der ihn umgebenden electromotorischen Spirale von demselben ab und beobachtete die dadurch erzeugte plötzliche Abweichung der Multiplicatornadel durch's Fernrohr. Hier möchte nun der Zweifel entstehn, ob der auf diese Weise erregte Strom immer von derselben Stärke seyn werde oder ob die unmöglich genau gleichmässige Geschwindigkeit des Abreissens hier nicht von wesentlichem Einfluss sey und in der That hat Christie aus Furcht hievor in seinen Versuchen das Abziehen durch das Herabfallen eines bestimmten Gewichts von bestimmter Höhe, bewerkstelligt. Ich hatte mich aber gleich Anfangs durch Versuche überzeugt, dass die Schnelligkeit des Abreissens, wenn sie eine gewisse Grenze überstiegen hat, keinen Einfluss mehr auf die Stärke des Stroms habe. Die Versuche ergaben nämlich Folgendes:

	Versuch 1	2	3	Mittel
Bei absichtlich sehr langsamem Abreissen . .	100, 7	100, 7	100, 8	100,73
— — — — raschem — — . .	100, 7	101, 0	100, 6	100,77
Bei gewöhnlich angewandter Geschwindigkeit	101, 0	100, 2	100, 7	100,63

Aus den Mitteln ersieht man, dass der Einfluss der Schnelligkeit $= 0$ gesetzt werden kann, denn die Ablesungen der Ablenkungen auf der getheilten Scheibe des Multiplicators, gehen nicht über ein Paar Zehntel eines Grades. Ausser diesen Ver-

*

suchen, die direct zu dem Zwecke angestellt wurden, findet ihr Resultat zahlreiche Bestätigungen in meinen früheren Abhandlungen, wo sich an vielen Stellen mehrmals hinter einander dieselben Ablenkungsbeobachtungen wiederholt finden, um eine grössere Genauigkeit zu erreichen und wo deren Uebereinstimmung nichts zu wünschen übrig lässt; auch aus nachfolgenden Versuchsreihen wird man sich solche Beweise entlehnen können.

Auch möchte sich theoretisch der Grund dieser Unabhängigkeit der Stärke des Stroms von der Geschwindigkeit des Abreissens leicht angeben lassen. Der Strom entsteht in der electromotorischen Spirale dadurch, dass die magnetische Intensität des von ihr umwundenen Ankers von weichem Eisen von einem Maximum derselben bis zu einem Minimum abnimmt (dieses Minimum kömmt der 0 um so näher, je geringer die Cercitivkraft des Eisens ist.) Diese Abnahme der magnetischen Intensität des Ankers können wir in Gedanken in unendlich viel Theile zerlegt denken, wovon jeder in der electromotorischen Spirale einen unendlich kleinen Strom erzeugt, der wiederum auf die Multiplicatornadel einen unendlich kleinen Stoss ausübt; alle diese Stösse zusammen, bringen die ganze Ablenkung der Nadel hervor. Erfolgt nun die ganze Reihe der unendlich kleinen Stösse in so kurzer Zeit hinter einander, dass sie die Nadel alle noch in einer von der normalen sehr wenig verschiedenen Lage treffen, so wird die Summe ihrer Wirkung eben so gross seyn, als geschähen sie alle zu gleicher Zeit, oder als ginge das Eisen plötzlich vom Maximum zum Minimum über, und innerhalb dieser Grenzen wird die Geschwindigkeit von keinem Einfluss auf die Ablenkung seyn. Die Erfahrung lehrt nun, dass die von mir gewöhnlich angewandte Geschwindigkeit innerhalb dieser Grenze fiel, was dadurch um so leichter begreiflich ward, dass die Intensität des Ankers anfangs weit schneller abnimmt, als zuletzt, so dass man gewiss annehmen kann, dass mehr als $\frac{9}{10}$ der unendlich kleinen Intensitätsabnahmen innerhalb derBerührung des Ankers mit dem Magneten und einem Zoll Entfernung von demselben fällen.

Die ersten von mir veranstalteten Versuche beziehen sich auf das Gesetz der Leitungsfähigkeit der Dräthe bei verschiedenen Längen derselben. Zu dem Ende zer-

schnitt ich einen mit Seide besponnenen Kupferdrath (von der Dicke 0,023 englische Zoll) in 5 Theile, so dass jeder 7 englische Fuss lang war und beobachtete nun die Ablenkungen der Multiplicatornadel, die durch Abreissen des Ankers mit der electromotorischen Spirale vom Magneten hervorgebracht wurden, indem ich zwischen den Multiplicatordrath und die electromotorische Spirale gar keinen Drath oder einen, oder 2 oder 4 etc. hintereinander brachte. Die Verbindungen der Enden derselben geschah durch Eintauchen in Quecksilber. Die Beobachtungen sind in nachfolgender kleinen Tabelle enthalten, in welcher die Bedeutung der Bezeichnung 1, 2, 3, 4 aus meinen früheren Abhandlungen zu ersehen ist.

	Ablenkungswinkel					Berechnete Ablenkungswinkel.	Differenzen.
	1	2	3	4	Mittel.		
Ohne Zwischenbring. d. Draths { Am Anfang d. Vers	85°,3	89°,7	89°,7	88°,5	88°,31	88, 52	+ 0, 21
Ohne Zwischenbring. d. Draths { Am Ende des Vers.	85, 7	89, 3	89, 8	88, 5			
Mit Zwischenbring. von 7 Fuss	52, 3	52, 4	54, 5	53, 4	53, 15	53, 21	+ 0, 06
— — — — — 14 —	38, 2	38, 1	39, 6	39, 1	38, 75	38, 51	— 0, 24
— — — — — 21 —	29, 7	29, 8	31, 5	30, 6	30, 40	30, 25	— 0, 15
— — — — — 28 —	24, 3	24, 6	24, 8	25, 8	24, 87	24, 93	+ 0, 06
— — — — — 35 —	20, 9	20, 6	22, 0	20, 9	21, 10	21, 21	+ 0, 11

Die Berechnung der Werthe in der 7. Columne ist folgendermaassen bewerkstelligt worden. Ich nahm zur Einheit des Leitungswiderstandes die Länge eines englischen Fusses von dem Drath, aus welchem die 5 Dräthe geschnitten waren und nannte die diesem Leitungswiderstande zukommende unbekannte Stärke des Stroms py. Den gleichfalls unbekannten Leitungswiderstand des Multiplicatordraths und der electromotorischen Spirale zusammen bezeichne ich mit x. Nehmen wir nun die Hypothese an, dass die Leitungswiderstände der Dräthe ihren Längen proportional seyen und bezeichnen wir die in obiger Tabelle beobachteten Ablenkungen für die Leitungswiderstände x, $x + 7$, $x + 14$ etc. mit α_x, α_{x+7}, α_{x+14} etc., so ergeben sich uns, mit Zuziehung der in meinen frühern Abhandlungen gegebenen Formeln, die nachfolgenden Gleichungen:

$$\frac{A}{1} = py$$

$$\frac{A}{x} = p \cdot \sin. (\tfrac{1}{2} \alpha_x)$$

$$\frac{A}{x+7} = p \sin. (\tfrac{1}{2} \alpha_{x+7})$$

$$\frac{A}{x+14} = p \cdot \sin. (\tfrac{1}{2} \alpha_{x+14})$$

etc.

Durch Division der übrigen Gleichungen durch die erste und durch Bezeichnung der Werthe sin. $(\frac{1}{2}\alpha_x)$, sin. $(\frac{1}{2}\alpha_{x+7})$, sin. (α_{x+14}) etz., der Kürze halber, mit a, a', a'' etc. erhalten wir

$$\begin{array}{lll} x = \frac{y}{a} & \text{und hieraus } ax - y = o & \\ x+7 = \frac{y}{a'} & a'x - y + 7a' = o & \text{(A)} \\ x+14 = \frac{y}{a''} & a''x - y + 14a'' = o & \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array}$$

Werden diese Gleichungen nun in Hinsicht auf x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate gelöst, so erhält man:

$$x = 12,5386 \qquad y = 8,7508$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (A) und entwickelt aus ihnen a, a', a'' etc. oder sin. $(\frac{1}{2}\alpha_x)$, sin. $(\frac{1}{2}\alpha_{x+7})$, sin. $(\frac{1}{2}\alpha_{x+14})$, so erhält man diese Winkel $\frac{1}{2}\alpha_x$, $\frac{1}{2}\alpha_{x+7}$, $\frac{1}{2}\alpha_{x+14}$ und durch Multiplication derselben mit 2 endlich die in der 7. Columne gegebenen berechneten Ablenkungswinkel.

Die Differenzen dieser Werthe von den beobachteten, welche die 8. Columne enthält, zeigen durch ihre Geringfügigkeit, dass die der Rechnung zu Grunde gelegte Hypothese richtig sey, dass sich also die *Leitungswiderstände der Dräthe direct oder ihre Leitungsfähigkeiten umgekehrt wie die Längen der Dräthe verhalten.*

Eine andere Versuchsreihe mit denselben Dräthen wurde bereits früher angestellt; bei derselben hatte ich die electromotorische Spirale um 2 Windungen vermindert, ohne ihre Länge oder ihren Leitungswiderstand deshalb zu ändern. Die Versuche sind in folgender Tabelle enthalten:

		Ablenkungswinkel				
		1	2	3	4	Mittel
Ohne Zwischenbr. eines Drathes	Am Anf. d. Vers.	77°,9	81°,1	81°,7	81°,7	80°, 6
— — — — —	— Ende „ „	77, 3	80, 2	81, 3	80, 2	79,69
		77, 3	80, 2	81, 2	79, 8	
Mit Zwischenbringung von 7 Fuss		47, 6	48, 7	49, 9	49, 5	48,92
— — — — 14 —		34, 8	35, 0	36, 6	35, 8	35,55
— — — — 21 —		27, 4	27, 7	28, 4	28, 6	28,02
— — — — 28 —		22, 5	23, 3	23, 4	22, 8	23,00
— — — — 35 —		19, 4	18, 8	19, 8	19, 3	19,32

Wir sehen aus den am Anfang und Ende der Versuchsreihe beobachteten Ablenkungen ohne Zwischenbringung der Dräthe, dass die Kraft des Magneten während der Versuche etwas abgenommen hat. Ich habe daher vor der Berechnung eine kleine Correction an den beobachteten Ablenkungswinkel angebracht, die darauf beruht, dass die Abnahme der Kraft der Zeit proportional gewesen sei und dass die Beobachtungen mit den verschiedenen Drathlängen in gleichen Intervallen auf einander folgten, was nahezu der Fall war. Ich bezeichnete den Ablenkungswinkel ohne Zwischenbringung der Dräthe am Anfang des Versuchs mit α_x, am Ende desselben mit $\alpha_{(x)}$ und erhielt dann

$$\sin. \tfrac{1}{2}\,\alpha_x = (1+m)\,\sin.\left(\tfrac{1}{2}\,\alpha_{(x)}\right)$$

folglich

$$m = \frac{2 \cdot \cos. \frac{1}{4}\left(\alpha_x + \alpha_{(x)}\right) \cdot \sin. \frac{1}{4}\left(\alpha_x - \alpha_{(x)}\right)}{\sin. \frac{1}{2}\,\alpha_{(x)}}$$

Kannte ich auf diese Weise m für das Ende der Versuchsreihe, so fand ich die Correction eines jeden andern Ablenkungswinkels nach obigen Voraussetzungen leicht, indem ich die Sinus ihrer Hälften respectiv mit $\left(1+\frac{m}{6}\right)$, $\left(1+\frac{2m}{6}\right)$, $\left(1+\frac{3m}{6}\right)$ etc. multiplicirte. So sind die beobachteten Ablenkungswinkel der 2. Columne der nachfolgenden Tabelle berechnet:

	Beobachtete Ablenkungs-winkel	Berechnete Ablenkungs-winkel	Differenz.
Ohne Zwischenbringung der Dräthe	80°,60	80°, 53	— 0°,07
Nach — — von 7 Fuss	48, 96	49, 08	+ 0, 12
— — — — 14 —	35, 60	35, 62	+ 0, 02
— — — — 21 —	28, 09	28, 03	— 0, 06
— — — — 28 —	23, 07	23, 12	+ 0, 05
— — — — 35 —	19, 73	19, 69	— 0, 04

Die Berechnung der dritten Columne ist ganz nach den oben gegebenen Formeln (A) ausgeführt worden. Die Kleinheit der Differenzen in der 4. Columne beweist ebenfalls die Richtigkeit der Proportionalität der Leitungswiderstände und der Längen der Dräthe. Für x und y erhielt ich hier die Werthe

$$x = 12{,}583 \qquad y = 8{,}133$$

oben ergab sich $x = 12{,}539$, also die Leitungswiderstände nur um 0,044 englische Fuss verschieden. y musste bedeutend von dem vorigen Werth abweichen, da die electromotorische Spirale hier weniger Windungen hatte.

Indem ich jetzt zu den Versuchen übergehe, aus denen sich das Verhältniss der Leitungsfähigkeit zu den Durchmessern der Dräthe ergeben soll, bemerke ich zuerst, dass hier die Schwierigkeit, genau übereinstimmende Resultate zu erlangen, bei weitem grösser ist, als wo wir es mit Dräthen desselben Durchmessers, aber von verschiedenen Längen, zu thun hatten. Diese Schwierigkeit liegt darin, die Dräthe bei verschiedenen Durchmessern von sonst durchaus gleichmässiger Beschaffenheit zu erhalten. Nimmt man z. B. Kupferdräthe von verschiedner Dicke, wie man sie eben käuflich erhalten kann, so bekommt man ganz und gar abweichende Resultate. So fand ich einmal an 2 solchen Kupferdräthen denjenigen, der einen grössern Querschnitt hatte, schlechter leitend als den andern von geringerem Querschnitte, was wider alle sonstige Erfahrung streitet, indem darin alle Beobachter einig sind, dass dickere Leiter besser leiten als dünnere. Wie sehr eine geringe Beimischung fremder Substanzen die Leitungsfähigkeit eines Metalls ändert, erhellt auch aus den Versuchen

Pouillet's mit Dräthen aus verschiedenen Legirungen von Silber mit Kupfer und von Gold und Silber; aus ihnen ergab sich, dass bei denselben die Leitungsfähigkeit weit unter die eines jeden einzelnen Metalls herabsank. So z. B. fand sich die Leitungsfähigkeit des feinen Goldes = 84,41, dagegen die des 18 karatigen = 14,77, während das Silber, womit das Gold versetzt wird, besser leitet, als selbst das feine Gold.

Um die Verschiedenartigkeit der Reinheit des Kupfers zu eliminiren, verschaffte ich mir meine Dräthe in der Art, dass ich ein Stück ein und desselben dicken Kupferdraths zerschnitt und die dadurch erhaltenen einzelnen Stücke zu verschiedenen dünnern Durchmessern ausziehen liess; allein auch so werden eben durch das Ziehen die dünnern Dräthe etwas dichter werden als die dickeren und dadurch schon wird eine Verschiedenartigkeit der Substanz veranlasst. Ich suchte auch diesem Uebelstande dadurch abzuhelfen, dass ich die Dräthe sämmtlich ausglühte und dann erst mit Seide bespinnen liess, aber hier kann vielleicht das geringere oder stärkere Glühen von einigem Einflusse seyn.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass man für die nun folgende Versuchsreihe auf keine so grosse Uebereinstimmung wird Anspruch machen können, als bei den bisherigen über den Einfluss der Länge der Dräthe auf die Leitung; jedoch wird man aus dem Folgenden ersehn, dass diese Uebereinstimmung immer gross genug ist, um keinen Zweifel über die Richtigkeit des darzuthuenden Gesetzes zuzulassen.

Die angewandten Dräthe sind also, wie schon erwähnt worden, alle aus ein und demselben Stück eines dicken Draths genommen und durch die Löcher N°. 1, 6, 11, 18, 24, 30 gezogen worden; ich werde sie daher mit diesen Nummern bezeichnen. Sie wurden alle geglüht und mit Seide besponnen, dann ward einer nach dem andern zwischen die electromotorische Spirale und den Multiplicatordrath gebracht und die Ablenkung ganz wie in den früheren Versuchen bestimmt. Um das Verhältniss der Querschnitte dieser Dräthe zu haben, wurden von jedem 2 Fuss in unbesponnenem Zustande gewogen: die Gewichte sind den Querschnitten proportional. So ergaben sich folgende Abwägungen:

Gewicht von 2 Fuss des Draths N°. 1 7,7370 Grammes
N°. 6 5,0250
N°. 11 3,2408
N°. 18 1,4783
N°. 24 0,7750
N°. 30 0,3616

Auf die absoluten Dicken der Dräthe kommt es eigentlich hier nicht an, doch sind diese leicht daraus herzuleiten, dass der Drath N°. 1 nahezu 0, 046 engl. Linien im Durchmesser hatte.

Die Beobachtungen wurden so angestellt, dass ich zuerst die Ablenkung ohne allen Zwischendrath beobachtete, dann nach Dazwischenbringen von N°. 1, 2··· bis 6, dann wieder von 6, 5···· an bis 1 und endlich wieder ohne allen Zwischendrath. Indem ich hernach aus den gleichartigen Beobachtungen das Mittel nahm, musste der Einfluss einer Kraftabnahme des Magneten während der Versuchsreihe fast vollständig eliminirt werden. Die Länge sämmtlicher Dräthe war = 16 Fuss englisch.

Die Versuche sind in folgender Tabelle enthalten:

	Ablenkungswinkel				
	1	2	3	4	Mittel
Ohne allen Zwischendrath . . .	90°,7	93°,6	94°,9	95°,3	93°,62
16 Fuss des Draths N° 1 dazwisch.	64, 2	66, 3	67, 0	67, 4	66, 22
N° 6	55, 0	57, 1	57, 9	58, 5	57, 12
N° 11	44, 9	47, 4	47, 6	48, 6	46, 97
N° 18	29, 6	31, 5	31, 2	32, 0	31, 07
N° 24	19, 0	19, 8	19, 6	19, 7	19, 52
N° 30	9, 3	11, 4	10, 8	11, 5	10, 75
N° 30	9, 6	11, 6	11, 0	11, 7	10, 97
N° 24	18, 1	20, 3	19, 0	20, 2	19, 40
N° 18	29, 4	31, 5	31, 3	31, 8	31, 00
N° 11	45, 2	47, 5	48, 0	48, 6	47, 32
N° 6	55, 4	55, 3	58, 0	57, 3	56, 75
N° 1	64, 9	65, 4	67, 0	67, 7	66, 25
Ohne allen Zwischendrath . . .	91, 3	91, 9	93, 6	94, 7	92, 87

Nimmt man aus den unter gleichen Umständen angestellten Beobachtung das Mittel, so erhält man folgende Werthe

	Ablenkungswinkel		Differenz
	beobachtet	berechnet	
Ohne allen Zwischendrath	93°, 24	91°, 53	—1°,71
Mit dem Drath N°. 1	66, 24	65, 84	— 0,40
N°. 6	56, 94	57, 52	+ 0,58
N°. 11	47, 16	48, 09	+ 0,94
N°. 18	31, 04	31, 22	+ 0,18
N°. 24	19, 46	19, 78	+ 0,32
N°. 30	10, 86	10, 56	— 0,30

Die Berechnung ward folgendermaassen geführt:

Ich nenne die Stärke des Stroms, welcher statt fände, wenn er durch einen Drath, von der Länge der hier gebrauchten (d. h. von 16 Fuss) aber von einer solchen Dicke, dass 2 Fuss desselben 1 Gramme wägen, hindurchliefe, $= py$ (wo y eine unbekannte, aus dem Versuche zu bestimmende Grösse ist) und die Länge des Multiplicatordraths und der electromotorischen Spirale zusammen, auf dieselbe Dicke des Draths reducirt, $= x$. Setzen wir nun voraus, die Leitungsfähigkeit sey der Dicke der Dräthe direct oder der Leitungswiderstand ihr umgekehrt proportional, so werden wir, wenn $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Ablenkungswinkel bedeuten, folgende Gleichungen haben

$$\frac{A}{1} = py$$

$$\frac{A}{x} = p \cdot \sin.\ (\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\frac{A}{x + \frac{1}{7,737}} = p \cdot \sin.\ (\tfrac{1}{2}\alpha')$$

$$\frac{A}{x + \frac{1}{5,025}} = p \cdot \sin.\ (\tfrac{1}{2}\alpha'').$$

etc.

Dividiren wir hier die erste Gleichung durch sämmtliche 7 nachfolgende und setzen wir der Kürze halben sin. $(\frac{1}{2}\alpha') = a'$, etc. und $\frac{a'}{7,737} = \delta'$, $\frac{a''}{5,025} = \delta''$ etc., so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax \quad &- y &&= o \\ a'x \quad &- y + \delta' &&= o \\ a''x \quad &- y + \delta'' &&= o \\ a'''x \quad &- y + \delta''' &&= o \end{aligned}$$

etc.

Aus diesen Gleichungen bestimmte ich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werthe

$$x = 0,40679 \qquad y = 0,29146$$

uud durch Substitution dieser Werthe in eben diese Gleichungen und durch Entwickelung von $a, a', a'' \cdots$ oder sin. $\frac{1}{2}\alpha$, sin. $\frac{1}{2}\alpha'$, sin. $\frac{1}{2}\alpha''$ etc., endlich $\alpha, \alpha', \alpha''$. Diese Werthe sind in der obigen Tabelle unter der Columne »berechnete Ablenkungen« aufgeführt. Die Differenzen derselben von den beobachteten Ablenkungswinkeln, welche die letzte Columne enthält, sind grösser als bei den früheren Beobachtungen und auch grösser, als dass sie blossen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden könnten; ich habe bereits oben die Ursachen hievon auseinandergesetzt. Auf jeden Fall ist die Uebereinstimmung immer so gross, dass die Richtigkeit der der Berechuung zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass sich die *Leitungsfähigkeiten der Dräthe direct wie die Querschnitte* verhalten, keinem Zweifel unterliegt.

ОБЪ
АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ
ВЪ РАЗНОСТЯХЪ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ДРОБЕЙ;

СОЧИНЕНІЕ
ВИКТОРА БУНЯКОВСКАГО.

(Читано 19 Іюня 1835.)

Г-нъ Остроградскій, въ примѣчательномъ Разсужденіи своемъ объ интегрированіи раціональныхъ дробей *), открылъ новое, обширное поприще изслѣдованій въ интегральномъ изчисленіи. Первый вопросъ, рѣшенный имъ, состоитъ въ опредѣленіи условій, при которыхъ дифференціальная раціональная дробь допускаетъ алгебрическій интегралъ; въ семъ случаѣ, онъ предлагаетъ для опредѣленія сего интеграла способы, примѣчательные въ особенности тѣмъ, что они не требуютъ предварительнаго рѣшенія уравненія высшей степени, что̀ доселѣ казалось необходимымъ. Г. Остроградскій распространилъ свою теорію и на многія ирраціональныя функціи, весьма общаго вида. Сіе важное открытіе составитъ, безъ сомнѣнія, новую эпоху въ лѣтописяхъ интегральнаго исчисленія, которое, симъ самымъ, освободится теперь отъ нареканія въ несвязности своихъ теорій и частности донынѣ присвоенныхъ ему пріёмовъ.

---

*) *Mémoire sur l'intégration des fractions rationnelles, par M. Ostrogradsky.* (Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg, Tome second, 6me livraison.)

Вникая въ способъ, изложенный Г-мъ Остроградскимъ, я замѣтилъ, что оный можетъ быть приложенъ, съ нѣкоторыми измѣненіями, къ разысканію условій, при которыхъ раціональная дробь имѣетъ алгебрическій интегралъ въ разностяхъ. Предметомъ предлагаемаго Разсужденія будетъ какъ изслѣдованіе сихъ условій, такъ и самое опредѣленіе интеграла въ томъ случаѣ, когда онъ можетъ быть выраженъ въ алгебрическомъ видѣ.

§. 1. Изобразимъ чрезъ x и y двѣ перемѣнныя величины, коихъ зависимость выражается неразложимымъ уравненіемъ

$$(1)\qquad y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_{n-1} y + A_n = 0,$$

гдѣ $A_1, A_2 \cdots A_{n-1}, A_n$ суть цѣлыя функціи перемѣнной независимой x. Сверхъ того положимъ, для простоты, что конечное приращеніе измѣняемой x, то есть $\Delta x = 1$, и разсмотримъ случаи, въ которыхъ интегралъ

$$(2)\qquad z = \Sigma \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

можетъ быть выраженъ алгебрическою функціею перемѣнной x.

Такъ какъ z, по предположенію, будетъ алгебрическою функціею величины x, то, въ самомъ общемъ случаѣ, сія величина z должна удовлетворять нѣкоторому алгебрическому уравненію, напримѣръ уравненію степени m, и которое можно изобразить слѣдующимъ образомъ:

$$(3)\qquad Xz^m + X_1 z^{m-1} + \cdots + X_{m-1} z + X_m = 0,$$

разумѣя подъ $X, X_1 \cdots X_{m-1}, X_m$ цѣлыя функціи количествъ x и y. Сверхъ того должно предположить, что сіе уравненіе есть *неразложимое*, то есть такое, которое не допускаетъ никакихъ раціональныхъ множителей.

Обозначимъ чрезъ $X', X'_1 \cdots X'_{m-1}, z'$ значенія функцій $X, X_1 \cdots X_{m-1}, X_m, z$, когда, вмѣсто x, подставимъ $x + \Delta x$, то есть $x + 1$. Уравненіе (3) приметъ видъ

$$(4)\qquad X' z'^m + X'_1 z'^{m-1} + \cdots + X'_{m-1} z' + X'_m = 0.$$

Взявъ разность уравненія (2), найдемъ

$$z' - z = \frac{f(x, y)}{F(x, y)},$$

откуда

$$z' = z + \frac{f(x, y)}{F(x, y)};$$

подставляя сію величину z' въ уравненіе (4), получимъ новое уравненіе въ z, также степени m, и въ которомъ всѣ коеффиціенты будутъ нѣкоторыми раціональными функціями перемѣнныхъ x и y. Положимъ, что сіе новое уравненіе будетъ

$$(5) \qquad \mathfrak{X} z^m + \mathfrak{X}_1 z^{m-1} + \cdots + \mathfrak{X}_{m-1} z + \mathfrak{X}_m = 0.$$

И такъ, величина z удовлетворяетъ въ одно время двумъ уравненіямъ (3) и (5), одинакой степени m, и не имѣющимъ никакихъ общихъ дѣлителей, ибо, оба сіи уравненія должны быть *неразложимыя;* слѣдовательно, величина z необходимо будетъ раціональная функція перемѣнныхъ x и y, и уравненіе (3) будетъ только первой степени. И такъ, если интегралъ

$$\Sigma \frac{f(x, y)}{F(x, y)} = z$$

будетъ алгебрическій, то онъ изобразится чрезъ раціональную функцію измѣняемыхъ x и y.

Въ диссертаціи подъ заглавіемъ: *Note sur les intégrales des fonctions algébriques*, читанной въ Академіи 13 Декабря 1833 года, Г. Остроградскій предлагаетъ другое доказательство сего-же предложенія. Мы прилагаемъ здѣсь сіе самое доказательство къ разностнымъ функціямъ.

Положимъ, какъ и прежде,

$$z = \Sigma \frac{f(x, y)}{F(x, y)},$$

и замѣтимъ, что при опредѣленной величинѣ y, величина z будетъ также опредѣленная, почему z не можетъ получить бо́льшаго числа различныхъ значеній, какъ и самая перемѣнная y; слѣдовательно, степень уравненія, опредѣляющаго функцію z, которая предполагается алгебри-

ческою, необходимо будетъ n; а какъ z зависитъ отъ x и y, то сія зависимость должна выражаться раціонально, ибо, въ противномъ случаѣ, перемѣнная z допускала бы болѣе значеній нежели y, и для одной опредѣленной величины y, имѣла бы нѣсколько значеній, что́ невозможно. Изобразимъ чрезъ $B, B_1, B_2, B_3 \cdots C, C_1, C_2, C_3 \cdots$ цѣлыя функціи измѣняемой x; по предыдущему можно положить:

$$z = \frac{B + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y + \cdots\cdots}{C + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y + \cdots\cdots}.$$

Сверхъ того, можно допустить, что всѣ степени перемѣнной y, превышающія $(m-1)^{ю}$, исключены посредствомъ уравн. (1); слѣдовательно предыдущая величина z приметъ такой видъ

$$(6) \qquad z = \frac{Y_1 y^{n-1} + Y_2 y^{n-2} + \cdots\cdots + Y_{n-1} y + Y_n}{Z_1 y^{n-1} + Z_2 y^{n-2} + \cdots\cdots + Z_{n-1} y + Z_n},$$

гдѣ $Y_1, Y_2 \cdots Y_{n-1}, Y_n, Z_1, Z_2 \cdots Z_{n-1}, Z_n$ имѣютъ то же самое значеніе, какое имѣли выше коеффиціенты $B, B_1, B_2 \cdots C, C_1, C_2 \cdots$ Теперь покажемъ, что не нарушая всеобщности дроби (6), можемъ привести ея знаменателя къ виду цѣлой функціи одной перемѣнной x. Для сего помножимъ, какъ числителя такъ и знаменателя сей дроби на выраженіе $1 + P_1 y + P_2 y^2 + \cdots + P_{n-1} y^{n-1}$, разумѣя подъ коеффиціентами $P_1, P_2 \cdots P_{n-1}$ неопредѣленныя функціи измѣняемой x. Перемноживъ настоящимъ образомъ, и исключивъ посредствомъ уравн. (1) всѣ степени y, превышающія $(n-1)^{ю}$, получимъ формулу вида

$$z = \frac{q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \cdots + q_{n-1} y + q_n}{r_1 y^{n-1} + r_2 y^{n-2} + \cdots + r_{n-1} y + r_n},$$

гдѣ коеффиціенты $q_1, q_2 \cdots\cdots q_{n-1}, q_n, r_1, r_2 \cdots\cdots r_{n-1}, r_n$ будутъ цѣлыя функціи перемѣнной x, и сверхъ того, будутъ заключать величины $P_1, P_2 \cdots P_{n-1}$ только въ первой степени; и такъ, полагая

$$r_1 = o, \quad r_2 = o \cdots\cdots\cdots\cdots r_{n-1} = o,$$

получимъ раціональныя значенія въ x для коеффиціентовъ $P_1, P_2 \cdots P_{n-1}$, и предыдущая величина z обратится въ

$$z = \frac{q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \cdots + q_{n-1} y + q_n}{r_n}.$$

Очевидно, что количества $q_1, q_2 \cdots q_{n-1}, q_n, r_n$, по подстановленіи въ нихъ найденныхъ величинъ для $P_1, P_2 \cdots\cdots P_{n-1}$, будутъ вообще *дробными раціональными функціями* перемѣнной x; помножая же числителя и знаменателя предыдущей дроби на произведеніе всѣхъ знаменателей, входящихъ въ количества $q_1, q_2 \cdots q_{n-1}, q_n, r_n$, получимъ окончательно выраженіе вида

$$z = \frac{X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots\cdots + X_{n-1} y + X_n}{Y},$$

гдѣ $X_1, X_2 \cdots\cdots X_{n-1}, X_n, Y$ будутъ изображать цѣлыя функціи измѣняемой x.

И такъ, мы можемъ замѣнить въ интегралѣ (2) дробь $\frac{f(x,y)}{F(x,y)}$ отношеніемъ $\frac{f(x,y)}{M}$ двухъ цѣлыхъ функцій, изъ коихъ первая заключаетъ въ себѣ перемѣнную x и послѣдовательныя степени величины y, до $(n-1)^й$ включительно, а вторая, одну только измѣняемую x; почему, вмѣсто интеграла $\Sigma \frac{f(x,y)}{F(x,y)}$, можно разсматривать теперь $\Sigma \frac{f(x,y)}{M}$. Очевидно, что количество M и коеффиціенты различныхъ степеней y въ $f(x,y)$, всѣ извѣстны.

Если интегралъ $\Sigma \frac{f(x,y)}{M}$ алгебрическій, то можно принять

$$\Sigma \frac{f(x,y)}{M} = \frac{X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots\cdot + X_{n-1} y + X_n}{Y};$$

предполагая же, для краткости,

$$X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots\cdots + X_{n-1} y + X_n = \varphi(x,y),$$

получимъ

$$(7) \qquad \Sigma \frac{f(x,y)}{M} = \frac{\varphi(x,y)}{Y}.$$

Взявъ разности обѣихъ частей сего уравненія, и совокупивъ найденное разностное уравненіе съ уравн. (1), получимъ формулу, которая должна служить для опредѣленія неизвѣстныхъ $X_1, X_2 \cdots\cdots X_{n-1}$, X_n и Y, а слѣдовательно и самой величины интеграла $\Sigma \frac{f(x,y)}{M}$.

§. 2. Здѣсь намѣрены мы разсмотрѣть тотъ случай, когда уравненіе (1) будетъ первой степени въ отношеніи къ y, или, что все равно, когда $\frac{f(x,y)}{M}$ будетъ раціональною дробью перемѣнной x. Изобразимъ сію дробь чрезъ $\frac{L}{M}$; въ слѣдствіе доказаннаго выше заключаемъ, что если интегралъ $\Sigma\frac{L}{M}$ будетъ функція алгебрическая, то сія функція необходимо будетъ раціональная дробь; и такъ, обозначивъ чрезъ Q, X, Y три цѣлыя функціи перемѣнной x, можно предположить

$$\Sigma\frac{L}{M} = Q + \frac{X}{Y}, \tag{8}$$

и допустить сверхъ того, что степень функціи X ниже степени функціи Y, а также что дробь $\frac{X}{Y}$ есть несократимая.

Взявъ разность сего послѣдняго уравненія, и изобразивъ чрезъ Q', X', Y' значенія количествъ Q, X, Y, когда, вмѣсто x, подставимъ въ нихъ $x+1$, найдемъ

$$\frac{L}{M} = Q' - Q + \frac{YX' - XY'}{YY'}.$$

Положимъ, что по раздѣленіи L на M, получили частное K и остатокъ N; слѣдовательно будетъ

$$Q' - Q + \frac{YX' - XY'}{YY'} = K + \frac{N}{M},$$

откуда

$$Q' - Q = K$$

$$\frac{YX' - XY'}{YY'} = \frac{N}{M}. \tag{9}$$

Первое изъ сихъ двухъ уравненій доставляетъ непосредственно величину $Q = \Sigma K$, и уравненіе (8) принимаетъ видъ

$$\Sigma\frac{L}{M} = \Sigma K + \frac{X}{Y}. \tag{10}$$

Что касается до функцій X и Y, то онѣ должны быть выведены изъ уравн. (9). Симъ-то опредѣленіемъ мы теперь и займемся.

Замѣтимъ сперва, что въ первой части уравненія (9), степень числителя $YX' - XY'$, по крайней мѣрѣ двумя единицами менѣе степени

знаменателя YY'; слѣдовательно, когда степень функціи N будетъ только одною единицею ниже степени функціи M, то уравн. (9) не будетъ имѣть мѣста, а посему интегралъ $\Sigma \frac{N}{M}$ не можетъ быть алгебрическимъ; къ такому случаю отнести должно, напримѣръ, интегралъ $\Sigma \frac{1}{x}$.

Возьмемъ уравненіе

$$\frac{YX'-XY'}{YY'}=\frac{N}{M},$$

и положимъ что дробь $\frac{N}{M}$ есть несократимая. Легко видѣть, что относительно дроби $\frac{YX'-XY'}{YY'}$ можно сдѣлать два предположенія: или сія дробь будетъ несократимая, или два ея члена будутъ имѣть общаго дѣлителя. Второе предположеніе есть самое общее, и заключаетъ первое какъ частный случай. Но такъ какъ, при несократимости дроби $\frac{YX'-XY'}{YY'}$, функціи X и Y получаются весьма простымъ образомъ, то не худо будетъ разсмотрѣть сей частный случай отдѣльно.

§. 3. И такъ, допустимъ, что какимъ либо образомъ, мы удостовѣрились въ несократимости дроби $\frac{YX'-XY'}{YY'}$; въ семъ предположеніи получимъ два уравненія

$$(11)\qquad \begin{cases} YX'-XY'=N \\ YY'=M. \end{cases}$$

Мы опустили постояннаго множителя, на котораго N и M могутъ быть помножены, и коего, очевидно, нѣтъ надобности принимать въ разсмотрѣніе.

Замѣтимъ теперь, что такъ какъ функціи Y и Y' будутъ одной и той же степени, то степень функціи M, въ допущенномъ нами предположеніи, должна необходимо быть чётная; изобразимъ ее чрезъ $2m$; слѣдовательно, степень функціи Y будетъ m, и можно положить

$$Y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_mx^m,$$

*

гдѣ b_0, b_1, $b_2 \cdots\cdots b_m$ изображаютъ постоянные неопредѣленные коеффиціенты. Величина Y' выразится формулою

$$Y' = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_m + (b_1 + 2b_2 + \cdots\cdots + mb_m)\, x$$
$$+ \left(b_2 + \cdots\cdots + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} b_m\right) x^2 + \cdots\cdots + b_m x^m.$$

Слѣдовательно, полагая для краткости

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_m = B_0$$
$$b_1 + 2b_1 + \cdots\cdots\cdots + mb_m = B_1$$
$$b_2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} b_m = B_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

получимъ

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots + b_m x^m)\,(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots\cdots + b_m x^m) = M.$$

Сіе равенство приведетъ насъ къ $(2m+1)$ уравненіямъ, посредствомъ которыхъ можно будетъ опредѣлить коеффиціенты b_0, b_1, $b_2 \cdots\cdots b_m$. Очевидно сверхъ того, что изъ числа $(2m+1)$ уравненій, будетъ m *условныхъ* между количествами b_0, b_1, $b_2 \cdots b_m$; если сіи послѣднія не всѣ удовлетворяются, то должно будетъ заключить, что принятое предположеніе несправедливо.

Положимъ теперь

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_{m-2}\, x^{m-2} + a_{m-1}\, x^{m-1},$$

гдѣ нѣкоторые изъ коеффиціентовъ a_{m-1}, $a_{m-2} \cdots\cdots$ могутъ быть нулями. Найдемъ

$$X' = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{m-2} + a_{m-1} + (a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots + (m-2)\, a_{m-2}$$
$$+ (m-1)\, a_{m-1})\, x + \left(a_2 + \cdots\cdots + \frac{(m-2)(m-3)}{1\cdot 2} a_{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2} a_{m-1}\right) x^2 + \cdots\cdots$$
$$+ (a_{m-2} + (m-1)\, a_{m-1})\, x^{m-2} + a_{m-1}\, x^{m-1}.$$

Подставляя въ первое изъ уравненій (11) сіи значенія X и X', а также и найденныя величины для Y и Y', получимъ уравненіе, въ первой части котораго будутъ находиться неизвѣстныя a_0, a_1, $a_2 \cdots a_{m-2}$, a_{m-1}, коихъ число не превышаетъ m. Слѣдовательно, тожественность

двухъ частей сего равенства доставитъ намъ нетолько достаточное число уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ a_0, a_1, $a_2 \cdots$, но еще, сверхъ того, нѣсколько условныхъ уравненій, которыя должны удовлетворяться, если допущенное предположеніе справедливо.

Можно будетъ также опредѣлить величины X и X' изъ перваго уравн. (11), посредствомъ непрерывныхъ дробей, сообразуясь съ способомъ изложеннымъ Г-мъ Остроградскимъ въ сочиненіи, о которомъ мы уже упомянули.

§. 4. Возьмемъ для примѣра дробь

$$\frac{-2x^4-6x^3-5x^2+3x+3}{x^6+3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+3x+2};$$

положимъ, что ищется ея интегралъ по изложенному выше способу. Изобразивъ сей интегралъ чрезъ $\frac{X}{Y}$, получимъ

$$\frac{-2x^4-6x^3-5x^2+3x+3}{x^6+3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+3x+2}=\frac{YX'-XY'}{YY'}.$$

Допустивъ теперь что дробь $\frac{YX'-XY'}{YY'}$ есть несократимая, мы должны положить

$$(a) \qquad YX'-XY'=-2x^4-6x^3-5x^2+3x+3$$

$$(b) \qquad YY'=x^6+3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+3x+2,$$

ибо вторыя части сихъ двухъ уравненій не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

Послѣднее изъ сихъ уравненій показываетъ, что Y будетъ третьей степени; и такъ, полагая

$$Y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3,$$

найдемъ

$$Y'=b_0+b_1+b_2+b_3+(b_1+2b_2+3b_3)\,x+(b_2+3b_3)\,x^2+b_3x^3.$$

Подставляя сіи величины въ уравн. (b), и уравнивая коеффиціенты одинакихъ степеней x, найдемъ *семь* уравненій; четыре изъ нихъ будутъ служить для опредѣленія неизвѣстныхъ b_0, b_1, b_2, b_3; остальныя же три будутъ условныя.

Дѣйствуя показаннымъ образомъ, найдемъ что

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1,$$

и что сверхъ того, условныя уравненія удовлетворяются. И такъ

$$Y = 1 + x^3,$$

и слѣдовательно

$$Y' = 2 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Такъ какъ степень функціи X должна быть ниже степени функціи Y, то есть, ниже *третьей*, то слѣдуетъ взять

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

откуда

$$X' = a_0 + a_1 + a_2 + (a_1 + 2a_2)\,x + a_2 x^2.$$

Подставляя сіи величины X и X', а также и найденныя значенія для Y и Y' въ уравненіе (a), оно обратится въ

$$-2x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 3x + 3 = (1 + x^3)\,(a_0 + a_1 + a_2 + (a_1 + 2a_2)\,x + a_2 x^2)$$
$$- (2 + 3x + 3x^2 + x^3)\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2).$$

Опредѣляя изъ сего уравненія коеффиціенты a_0, a_1, a_2, найдемъ

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = 2,$$

слѣдовательно

$$X = x + 2x^2;$$

сверхъ того, останутся еще два условныя уравненія между коеффиціентами a_0, a_1 и a_2, которыя оба удовлетворяются. И такъ, искомый интегралъ дѣйствительно будетъ равенъ дроби $\frac{x + 2x^2}{1 + x^3}$.

Должно замѣтить, что если при разысканіи какого нибудь интеграла по изложенному сей-часъ способу, всѣ условныя уравненія относительно коеффиціентовъ b_0, b_1, $b_2 \cdots a_0$, a_1, $a_2 \cdots$ будутъ удовлетворяться, то изъ сего можно будетъ заключить, что дробь $\frac{YX' - XY'}{YY'}$ есть *несократимая*, и что слѣдовательно величина искомаго интеграла дѣйствительно опредѣляется формулою

$$\Sigma \frac{L}{M} = \Sigma K + \frac{X}{Y} = \Sigma K + \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_{m-1} x^{m-1}}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots + b_m x^m}.$$

Но обратное сему предложеніе не всегда имѣетъ мѣсто. И въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что хотя упомянутыя условныя уравненія не всѣ удовлетворяются, однако же интегралъ $\Sigma \frac{L}{M}$ будетъ алгебрическій. Сіе произойдетъ очевидно въ томъ случаѣ, когда числитель и знаменатель дроби $\frac{YX'-XY'}{YY'}$ будутъ имѣть общаго дѣлителя, котораго мы еще не принимали въ соображеніе.

Изслѣдуемъ теперь сей общій случай.

§. 5. Предполагая интегралъ $\Sigma \frac{N}{M} = \frac{X}{Y}$ *алгебрическимъ*, имѣемъ уравненіе

$$\frac{X'}{Y'} - \frac{X}{Y} = \frac{N}{M},$$

которое можетъ быть представлено въ слѣдующихъ видахъ:

$$\frac{X'}{Y'} = \frac{MX+NY}{MY}$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{MX'-NY'}{MY'}.$$

Но такъ какъ функціи Y и Y' одинакой степени, то $MX+NY$ и MY будутъ необходимо имѣть общаго дѣлителя одной степени съ функціею M. То же самое должно разумѣть о функціяхъ $MX'-NY'$ и MY'. Изобразимъ чрезъ R общаго дѣлителя количествъ $MX+NY$ и MY, а чрезъ S, общаго дѣлителя выраженій $MX'-NY'$ и MY'; получимъ слѣдующія четыре уравненія:

(12) $RX' = MX + NY$

(13) $RY' = MY$

(14) $SX = MX'-NY'$

(15) $SY = MY'$.

Перемноживъ между собою уравненія (13) и (15), найдемъ

$$RS = M^2.$$

Сія формула показываетъ, что R есть дѣлитель функціи M^2. Основываясь на этомъ свойствѣ функціи R, и, сверхъ того, не упуская изъ

виду, что R и M одинакой степени, мы можемъ доказать слѣдующее, довольно примѣчательное предложеніе:

Если знаменатель M раціональной дроби $\frac{N}{M}$ есть неразложимая функція перемѣнной x, то интегралъ $\Sigma \frac{N}{M}$ невозможенъ въ алгебрическомъ видѣ.

Дѣйствительно, если функція M будетъ *неразложимою*, то уравненію $RS = M^2$ нельзя будетъ иначе удовлетворить, какъ полагая $R = S = M$, ибо степени трехъ функцій R, S, M равны; но уравненіе $RY' = MY$, въ настоящемъ предположеніи, обращается въ $Y' = Y$, что́ невозможно; слѣдовательно и самый интегралъ $\Sigma \frac{N}{M}$ не можетъ быть выраженъ *алгебрически*.

Теперь займемся опредѣленіемъ интеграла $\Sigma \frac{N}{M} = \frac{X}{Y}$ когда онъ будетъ алгебрическій. Уравненіе (13) доставляетъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{R}{M}.$$

Но вы видѣли выше, что R есть дѣлитель функціи M^2; слѣдовательно, по разложеніи M на множителей, найдется вообще нѣсколько величинъ для R; изобразимъ ихъ чрезъ $R, S, T \cdots$, и разсмотримъ сперва одну изъ нихъ, напримѣръ R, которую будемъ теперь принимать за извѣстную.

Положимъ что дробь $\frac{R}{M}$, по сокращеніи, если оно имѣетъ мѣсто, обращается въ $\frac{R_1}{M_1}$; слѣдовательно

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{R_1}{M_1}. \tag{16}$$

Если изобразимъ чрезъ Y_1 общаго дѣлителя между Y и Y', то получимъ:

$$Y = R_1 Y_1$$
$$Y' = M_1 Y_1.$$

Перемѣнивъ x въ $x+1$ въ первомъ изъ сихъ уравненій, и употребивъ, какъ въ §. 1, черты для обозначенія сего дѣйствія, будетъ

$$Y' = R_1' Y_1';$$

но, въ слѣдствіе уравненія $Y' = M_1 Y_1$, найдемъ

$$\frac{Y_1}{Y'_1} = \frac{R'_1}{M_1}.$$

Если дробь $\frac{R'_1}{M_1}$ сокращается, то пусть $\frac{R'_1}{M_1} = \frac{R_2}{M_2}$; и если функціи Y_1 и Y'_1 имѣютъ общаго дѣлителя Y_2, то получимъ

$$Y_1 = R_2 Y_2$$
$$Y'_1 = M_2 Y_2.$$

Составляя опять уравненіе $Y'_1 = R'_2 Y'_2$, найдемъ

$$\frac{Y_2}{Y'_2} = \frac{R'_2}{M_2},$$

и если дробь $\frac{R'_2}{M_2}$ сокращается, то, по уничтоженіи общаго дѣлителя, найдется $\frac{R'_2}{M_2} = \frac{R_3}{M_3}$; слѣдовательно

$$\frac{Y_2}{Y'_2} = \frac{R_3}{M_3}.$$

Положимъ теперь, что продолживъ сіе дѣйствіе, достигли наконецъ дроби $\frac{Y_n}{Y'_n} = \frac{R'_n}{M_n}$, въ которой $R'_n = M_n$. Въ такомъ случаѣ величина Y будетъ опредѣлена; ибо, изъ равенства $R'_n = M_n$, выводимъ уравненіе $Y_n = Y'_n$, которому иначе удовлетворить невозможно, какъ полагая Y_n постояннымъ, напримѣръ, $Y_n = 1$. Но изъ уравненій

$$\begin{aligned} Y &= R_1 Y_1 \\ Y_1 &= R_2 Y_2 \\ Y_2 &= R_3 Y_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n-1} &= R_n Y_n \\ Y_n &= 1 \end{aligned}$$

выводимъ

$$Y = R_1 R_2 R_3 \cdots\cdots R_n.$$

Пусть будетъ μ степень функціи $Y = R_1 R_2 R_3 \cdots R_n$; такъ какъ степень функціи X единицею ниже степени знаменателя Y, то можно положить

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_{\mu-1} x^{\mu-1},$$

разумѣя подъ a_0, a_1, $a_2 \cdots\cdots a_{\mu-1}$ неопредѣленные коеффиціенты; нѣкоторые изъ нихъ могутъ равняться нулю. Изъ сего уравненія получаемъ

$$\begin{aligned} X' = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{\mu-1} \\ + (a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots + (\mu-1)\, a_{\mu-1})\, x \\ + \left(a_2 + \cdots\cdots + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2}\right) x^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{\mu-1}\, x^{\mu-1}. \end{aligned}$$

Подставляя въ уравненіе (2) сіи величины X и X', также найденную величину для Y и извѣстныя количества R, M, N, получимъ уравненіе, коего тожественность доставитъ нетолько надлежащее число уравненій для опредѣленія неизвѣстныхъ a_0, a_1, $a_2 \cdots\cdots a_{\mu-1}$, но сверхъ того, нѣсколько условныхъ уравненій между сими самыми неизвѣстными. Если всѣ сіи условныя уравненія удовлетворяются выведенными величинами для a_0, a_1, $a_2 \cdots\cdots a_{\mu-1}$, то заключаемъ, что найденныя значенія для Y и X справедливы, и что слѣдовательно, интегралъ $\Sigma \frac{N}{M}$ выражается дѣйствительно дробью

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_{\mu-1} x^{\mu-1}}{R_1 R_2 R_3 \cdots\cdots R_n}.$$

Но если тожественное уравненіе, о которомъ мы говоримъ, будетъ невозможно, то очевидно должно будетъ заключить, или что интегралъ $\Sigma \frac{N}{M}$ не есть алгебрическій, или, по крайней мѣрѣ, что принятый въ ряду $R, S, T \cdots\cdots$ дѣлитель R не тотъ, котораго слѣдовало бы взять. И такъ, надобно будетъ подвергнуть каждаго изъ остальныхъ дѣлителей $S, T \cdots\cdots$ тѣмъ же самымъ дѣйствіямъ, которыя сей-часъ были

показаны для R, и остановиться на томъ изъ нихъ, при которомъ уравненіе (12) удовлетворяется; такой дѣлитель необходимо существуетъ, когда интегралъ $\Sigma\,\frac{N}{M}$ есть алгебрическій. Если же, по испытаніи всѣхъ дѣлителей $R, S, T\cdots\cdots$ окажется, что ни при которомъ изъ нихъ, нельзя удовлетворить въ одно время уравненіямъ (13) и (12), то это будетъ несомнѣннымъ признакомъ невозможности интеграла $\Sigma\,\frac{N}{M}$ въ алгебрическомъ видѣ.

Изложенный способъ для опредѣленія функцій Y и X можетъ, съ перваго взгляда, показаться несовсѣмъ удобнымъ по продолжительности выкладокъ въ томъ случаѣ, когда число дѣлителей $R, S, T\cdots\cdots$ будетъ нѣсколько велико; но на самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что число попытокъ значительно уменьшится, когда примемъ въ соображеніе тѣ сокращенія, которыя, по существу предмета, представляются въ самомъ ходѣ производимаго вычисленія. Слѣдующій примѣръ послужитъ тому доказательствомъ.

§. 6. Положимъ что ищется интегралъ

$$\Sigma\,\frac{15x+9}{x^2(x+1)^2(x+3)},$$

гдѣ

$$N = 15x+9, \quad M = x^2(x+1)^2(x+3).$$

Рядъ дѣлителей $R, S, T\cdots$, состоящій здѣсь изъ тринадцати членовъ, будетъ слѣдующій:

$(x+1)^3(x+3)^2$	$x^2(x+1)^3$
$(x+1)^4(x+3)$	$x^3(x+3)^2$
$x(x+1)^2(x+3)^2$	$x^3(x+1)(x+3)$
$x(x+1)^3(x+3)$	$x^3(x+1)^2$
$x(x+1)^4$	$x^4(x+3)$
$x^2(x+1)(x+3)^2$	$x^4(x+1)$.
$x^2(x+1)^2(x+3)$	

Разсмотримъ, по порядку, каждаго изъ сихъ дѣлителей.

*

Принимая $R = (x+1)^3 (x+3)^2$, увидимъ что уравненіе (16) приводится къ виду

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2};$$

но сіе уравненіе невозможно по той причинѣ, что при увеличеніи x въ числителѣ одною или нѣсколькими единицами, дробь $\frac{(x+1)(x+3)}{x^2}$ не можетъ обратиться въ единицу.

Предположеніе $R = (x+1)^4 (x+3)$ приводитъ къ уравненію

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{(x+1)^2}{x^2},$$

невозможному по той же самой причинѣ.

Полагая $R = x(x+1)^2 (x+3)^2$, получимъ невозможное уравненіе

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x+3}{x}.$$

Предположеніе $R = x(x+1)^3 (x+3)$ доставляетъ уравненіе

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x+1}{x},$$

равнымъ образомъ невозможное.

Предположеніе $R = x(x+1)^4$ даетъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{(x+1)^2}{x(x+3)};$$

полагая $Y = (x+1)^2 Y_1$ и $Y' = x(x+3) Y_1$, имѣемъ

$$\frac{Y_2}{Y'_1} = \frac{(x+2)^2}{x(x+3)};$$

взявъ опять $Y_1 = (x+2)^2 Y_2$ и $Y'_1 = x(x+3) Y_2$, получимъ

$$\frac{Y_2}{Y'_2} = \frac{(x+3)^2}{x(x+3)} = \frac{x+3}{x};$$

но сіе послѣднее уравненіе невозможно по сказанной выше причинѣ.

Предполагая $R = x^2 (x+1)(x+3)^2$, получаемъ опять невозможное уравненіе

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x+3}{x+1}.$$

Предполагая $R = x^2 (x+1)^2 (x+3)$, находимъ

$$\frac{Y}{Y'} = 1,$$

откуда $Y = Y'$, что́ не можетъ быть.

Принимая $R = x^2 (x+1)^3$, имѣемъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x+1}{x+3},$$

откуда, по изложенному въ §. 5. способу, находимъ

$$Y = (x+1)(x+2).$$

Подставляя сію величину въ уравненіе (12), получаемъ

$$x^2 (x+1)^3 X' = x^2 (x+1)^2 (x+3) X + (15x+9)(x+1)(x+2).$$

Но сіе уравненіе невозможно, ибо первая его часть и первый членъ второй части дѣлятся на x^2, а послѣдній членъ не дѣлится.

Предположеніе $R = x^3 (x+3)^2$ ведетъ къ невозможному уравненію

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Допуская $R = x^3 (x+1)(x+3)$, имѣемъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x}{x+1},$$

откуда $Y = x$; и такъ, уравненіе (12) обратится въ слѣдующее:

$$x^3 (x+3)^2 X' = x^2 (x+1)^2 (x+3) X + (15x+9) x.$$

Усматриваемъ опять невозможность сего уравненія; дѣйствительно, первые его два члена дѣлятся на x^2, а третій, только на x.

Взявъ $R = x^3 (x+1)^2$, получимъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x}{x+3}.$$

Изъ сего уравненія выведемъ

$$Y = (x+1)(x+2);$$

подставляя же сію величину въ уравненіе (12), имѣемъ

$$x^3 (x+1)^2 X' = x^2 (x+1)^2 (x+3) X + (15x+9) x (x+1)(x+2);$$

первые два члена сей формулы дѣлятся на $x^2 (x+1)^2$, а послѣдній, только на $x(x+1)$; слѣдовательно она невозможна.

Принявъ $R = x^4 (x+3)$, получимъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x^2}{(x+1)^2},$$

откуда $Y = x^2$; уравненіе же (12) будетъ

$$x^4 (x+3) X' = x^2 (x+1)^2 (x+3) X + (15x+9) x^2;$$

а сіе уравненіе не можетъ состояться, ибо, первые его два члена дѣлятся на $x+3$, а послѣдній, не дѣлится.

Наконецъ, принявъ $R = x^4 (x+1)$, уравненіе (16) приметъ видъ

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{x^2}{(x+1)(x+3)};$$

полагая

$$Y = x^2 Y_1$$
$$Y' = (x+1)(x+3) Y_1$$

найдемъ

$$\frac{Y_1}{Y'_1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3};$$

предположивъ опять

$$Y_1 = (x+1) Y_2$$
$$Y'_1 = (x+3) Y_2$$

выводимъ

$$\frac{Y_2}{Y'_2} = \frac{x+2}{x+3};$$

изъ сего уравненія видимъ тотъ-часъ что $Y_2 = x+2$; слѣдовательно

$$Y = x^2 (x+1)(x+2).$$

Въ слѣдствіе сказаннаго въ §. 5. объ опредѣленіи величины X, надобно будетъ положить

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

и подставить сію величину въ уравненіе

$$RX' = MX + NY.$$

По сокращеніи, оно приведется къ виду

$$a_3 x^4 + 2a_2 x^3 + (3a_1 + 2a_2 - a_3 + 15)\ x^2 + (4a_0 + 3a_1 + 39)\ x + 3a_0 + 18 = 0$$

откуда

$$a_3 = 0$$
$$2a_2 = 0$$
$$3a_1 + 2a_2 - a_3 + 15 = 0$$
$$4a_0 + 3a_1 + 39 = 0$$
$$3a_0 + 18 = 0.$$

Употребляя четыре изъ сихъ пяти уравненій, выводимъ

$$a_0 = -6, \quad a_1 = -5, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0,$$

и сверхъ того усматриваемъ, что пятое уравненіе, которое можно принимать за условное, удовлетворяется найденными значеніями коэффиціентовъ a_0, a_1, a_2 и a_3. Слѣдовательно, можемъ заключить несомнѣнно, что $X = -(5x+6)$, почему искомый интегралъ будетъ

$$\Sigma \frac{15x+9}{x^2(x+1)^2(x+3)} = -\frac{5x+6}{x^2(x+1)(x+2)}.$$

Въ разсмотрѣнномъ нами примѣрѣ, мы съ намѣреніемъ расположили рядъ дѣлителей самымъ невыгоднымъ образомъ; дѣйствительно, тотъ изъ нихъ который былъ намъ нуженъ, помѣщенъ на концѣ. Но очевидно, что еслибы въ продолженіи выкладокъ нашелся такой дѣлитель, при которомъ уравненія (12) и (13) удовлетворялись, то вычисленіе было бы окончено, интегралъ опредѣленъ, и слѣдовательно, дальнѣйшій разборъ остальныхъ дѣлителей оказался бы совершенно излишнимъ.

SUR

LES FACULTÉS NUMÉRIQUES DU SECOND ORDRE.

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 8 Mai 1835.)

1. Les propriétés des produits qui naissent de la multiplication de plusieurs termes consécutifs d'une progression arithmétique, et l'usage de ces fonctions dans différentes parties de l'analyse, ont déjà été examinés par *Euler* et *Vandermonde*. (V. Traité des différences et des séries par *Lacroix*). *Kramp*, qui en a fait un objet particulier de ses recherches dans son Analyse des réfractions astronomiques, en nommant ces produits des *facultés numériques*, les a designé par des expressions analogues à celles des puissances, savoir, par $a^{n|d}$. *Lacroix*, en conservant la notation adoptée par *Vandermonde*, savoir: $(a, d)^n$, a proposé de les nommer des *puissances du second ordre*. Passant aux suites dont les secondes différences sont constantes, il a également indiqué le produit des n premiers termes de celles-ci par le symbole $(a, d, d')^n$, d'après lequel, comme il a fait observer, on peut former ceux qui conviennent aux suites dont les différences constantes sont d'un ordre quelconque.

La notation introduite par *Kramp* nous paraissant préférable à celle proposée par *Vandermonde* et *Lacroix*, nous désignerons par l'expression: $a^{n|d,d'}$, que nous nommerons une *faculté du second ordre*, le produit des n premiers termes d'une suite dont les secondes différences d' sont constantes, et qui a pour premier terme a,

et d pour premier terme de la suite des premières différences qui en dérivent. Il est facile maintenant de saisir ce que nous entendons par *faculté du troisième ordre, du quatrième ordre*, et en général, *d'un ordre quelconque.*

2. Le but principal, que nous nous sommes proposés ici, c'est d'établir, pour les facultés du second ordre et à exposant entier positif, un théorème analogue à ceux de la puissance et de la faculté, ordinaire ou du premier ordre, du *binome.*

Pour cela nous allons d'abord exposer quelques théorèmes préliminaires, concernant les facultés du second ordre, et dont la démonstration découle immédiatement de la définition de ces fonctions.

Le terme général d'une suite arithmétique du second ordre étant:

$$a+(n-1)\,d+(n-1)_2\,d', \text{ où } (n-1)_2=\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}, \text{ on a:}$$

I. $a^{n|d,\,d'}=(a+(n-1)\,d+(n-1)_2\,d')^{n|-d-(n-2)\,d',\,d'}$

II. $a^{m+n|d,\,d'}=a^{m|d,\,d'}\times(a+md+m_2d')^{n|d+md',\,d'}$

$\qquad =a^{n|d,\,d'}\times(a+nd+n_2d')^{m|d+nd',\,d'}$

III. $a^{m-n|d,\,d'}=a^{m|d,\,d'}:(a+(m-n)\,d+(m-n)_2\,d')^{n|d+(m-n)\,d',\,d'}$

IV. $(a+nd+n_2d')^{m-n|d+nd',\,d'}=a^{m|d,\,d'}:a^{n|d,\,d'}$

V. $(ab)^{n|ad,\,ad'}=a^n\times b^{n|d,\,d'}$

VI. $a^{n|d}\times b^{n|e}=(a\times b)^{n|ae+bd+de,\,2de}$

3. Puisque pour les facultés du premier ordre:

$$(a+b)^{n|d}=a^{n|d}+n_1a^{n-1|d}\,b^{1|d}+n_2a^{n-2|d}\,b^{2|d}+n_3a^{n-3|d}\,b^{3|d}+\cdots\cdots$$
$$+\,n_{n-1}a^{1|d}b^{n-1|d}+n_nb^{n|d}=S\left[n_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}|d}\,b^{\mathfrak{a}|d}\right]$$

commençons par examiner à quoi peut être réduite la suite analogue:

$$S\left[n_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}|d,\,d'}\,b^{\mathfrak{a}|d,\,d'}\right]=a^{n|d,\,d'}+n_1a^{n-1|d,\,d'}\,b^{1|d,\,d'}+n_2a^{n-2|d,\,d'}\,b^{2|d,\,d'}$$
$$+\,n_3a^{n-3|d,\,d'}\,b^{3|d,\,d'}+\cdots\cdots+n_{n-1}a^{1|d,\,d'}\,b^{n-1|d,\,d'}+n_nb^{n|d,\,d'}$$

Or, les coëfficiens du binome étant généralement doués de la propriété exprimée par cette équation:

$$(n+1)_p = n_p + n_{p-1}$$

on obtient d'abord la transformation suivante :

$$S\left[n_{\mathfrak{a}} a^{n-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] = a^{n|d,d'} + S\left[n_{\mathfrak{a}+1} a^{n-\mathfrak{a}-1|d,d'} b^{\mathfrak{a}+1|d,d'}\right] = a^{n|d,d'} +$$
$$S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}+1} a^{n-\mathfrak{a}-1|d,d'} b^{\mathfrak{a}+1|d,d'}\right] + S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-\mathfrak{a}-1|d,d'} b^{\mathfrak{a}+1|d,d'}\right] =$$
$$S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] + S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-1-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}+1|d,d'}\right]$$

d'où, en séparant dans ces deux sommes, le facteur commun à chaque couple de termes correspondans, l'on tire :

$$S\left[n_{\mathfrak{a}} a^{n-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] =$$
$$S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} \{a + (n-\mathfrak{a}-1)d + (n-\mathfrak{a}-1)_2 d' + b + \mathfrak{a}d + \mathfrak{a}_2 d'\} a^{n-\mathfrak{a}-1|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right]$$
$$= S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} \{a + b + (n-1)d + (n-1)_2 d' - \mathfrak{a}(n-1-\mathfrak{a})d'\} a^{n-\mathfrak{a}-1|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right]$$
$$= (a + b + (n-1)d + (n-1)_2 d')\, S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-1-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] -$$
$$d'\, S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}(n-1-\mathfrak{a})\, a^{n-1-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] =$$
$$(a + b + (n-1)d + (n-1)_2 d')\, S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-1-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] -$$
$$d'\, S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}+1} (\mathfrak{a}+1)(n-2-\mathfrak{a})\, a^{n-2-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}+1|d,d'}\right]$$
$$= (a + b + (n-1)d + (n-1)_2 d')\, S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-1-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] -$$
$$(n-1)(n-2)\, d'\, S\left[(n-3)_{\mathfrak{a}} a^{n-2-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}+1|d,d'}\right] =$$
$$(a + b + (n-1)d + (n-1)_2 d')\, S\left[(n-1)_{\mathfrak{a}} a^{n-1-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] -$$
$$2(n-1)_2\, abd'\, S\left[(n-3)_{\mathfrak{a}} (a+d)^{n-3-\mathfrak{a}|d+d',d'} (b+d)^{\mathfrak{a}|d+d',d'}\right]$$

Maintenant, faisant pour abréger :

$$S\left[n_{\mathfrak{a}} a^{n-\mathfrak{a}|d,d'} b^{\mathfrak{a}|d,d'}\right] = S^{n,d}_{a,b}$$

$$\text{et } a + b + (n-1)d + (n-1)_2 d' = C^{n-1,d}_{a,b}$$

nous avons cette équation fondamentale:

$$(1)\quad S^{n,d}_{a,b} = C^{n-1,d}_{a,b}\, S^{n-1,d}_{a,b} - (n-1)_2\, ab\cdot 2d'\, S^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d}$$

donc aussi:

$$S^{n-1,d}_{a,b} = C^{n-2,d}_{a,b}\, S^{n-2,d}_{a,b} - (n-2)_2\, ab\cdot 2d'\, S^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} \quad \text{et}$$

$$S^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d} = C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}\, S^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} - (n-4)_2\,(a+d)\,(b+d)\cdot 2d'\, S^{n-6,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}$$

et par conséquent :

$$(2)\quad S^{n,d}_{a,b} = C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b}\, S^{n-2,d}_{a,b} - \left((n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b} + (n-1)_2\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}\right) ab\cdot 2d' \times$$
$$S^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-4)_2\,(n-1)_2\, a^{2|d,d'}\, b^{2|d,d'}\, (2d')^2\, S^{n-6,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}$$

De pareilles substitutions conduisent encore aux équations:

$$(3)\quad S^{n,d}_{a,b} = C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b}\, C^{n-3,d}_{a,b}\, S^{n-3,d}_{a,b} - \Big((n-3)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b}$$
$$+ (n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-1)_2\, C^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}\Big)\, a^{1|d,d'}\, b^{1|d,d'}\cdot 2d'\cdot$$
$$S^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d} + \Big((n-5)_2\,(n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b} + (n-5)_2\,(n-1)_2\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-4)_2\,(n-1)_2\, C^{n-7,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}\Big)\, a^{2|d,d'}\, b^{2|d,d'}\, (2d')^2\, S^{n-7,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}$$
$$- (n-7)_2\,(n-4)_2\,(n-1)_2\, a^{3|d,d'}\, b^{3|d,d'}\, (2d')^3\, S^{n-9,\,d+3d'}_{a+3d+3d',\,b+3d+3d'}$$

$$(4)\quad S^{n,d}_{a,b} = C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b}\, C^{n-3,d}_{a,b}\, C^{n-4,d}_{a,b}\, S^{n-4,d}_{a,b} - \Big((n-4)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b}\, C^{n-3,d}_{a,b}$$
$$+ (n-3)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b}\, C^{n-6,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-6,d+d'}_{a+d,b+d}\, C^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-1)_2\, C^{n-6,d+d'}_{a+d,b+d}\, C^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}\Big)\, a^{1|d,d'}\, b^{1|d,d'}\cdot 2d'\cdot S^{n-6,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ \Big((n-6)_2\,(n-3)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-2,d}_{a,b} + (n-6)_2\,(n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-6)_2\,(n-1)_2\, C^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-5)_2\,(n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b}\, C^{n-8,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}$$
$$+ (n-5)_2\,(n-1)_2\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}\, C^{n-8,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'} + (n-4)_2\,(n-1)_2\, C^{n-8,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}$$
$$\times C^{n-7,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}\Big)\, a^{2|d,d'}\, b^{2|d,d}\, (2d')^2\, S^{n-8,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'}$$
$$- \Big((n-8)_2\,(n-5)_2\,(n-2)_2\, C^{n-1,d}_{a,b} + (n-8)_2\,(n-5)_2\,(n-1)_2\, C^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-8)_2\,(n-4)_2\,(n-1)_2\, C^{n-7,\,d+2d'}_{a+2d+d',\,b+2d+d'} + (n-7)_2\,(n-4)_2\,(n-1)_2\, C^{n-10,\,d+3d'}_{a+3d+3d',\,b+3d+3d}\Big)$$
$$a^{3|d,d'}\, b^{5|d,d'}\, (2d')^3\, S^{n-10,\,d+3d'}_{a+3d+3d',\,b+3d+3d'} + (n-10)_2\,(n-7)_2\,(n-4)_2\,(n-1)_2 \times$$

$a^{4|d,d'} b^{4|d,d'} (2d')^4 S^{n-12, \quad d+4d'}_{a+4d+6d', b+4d+6d'}$

et ainsi de suite.

4. Les précédentes équations générales, étant particularisées, fournissent les relations suivantes:

$$(1)\quad S^{1,d}_{a,b} = C^{0,d}_{a,b} S^{0,d}_{a,b} = a+b = (a+b)^{1|d,d'}$$

$$S^{2,d}_{a,b} = C^{1,d}_{a,b} S^{1,d}_{a,b} = (a+b+d)(a+b) = (a+b)^{2|d} = (a+b)^{2|d,d'}$$

$$S^{3,d}_{a,b} = C^{2,d}_{a,b} S^{2,d}_{a,b} - 2_2 ab\cdot 2d' S^{0,d+d'}_{a+d,b+d} = (a+b+2d+2_2 d') \times$$

$$(a+b)^{2|d,d'} - 2_2 ab\cdot 2d' = (a+b)^{3|d,d'} - 2_2 ab\cdot 2d'$$

$$(2)\quad S^{4,d}_{a,b} = C^{3,d}_{a.b} C^{2,d}_{a,b} S^{2,d}_{a,b} - \left(2_2 C^{3,d}_{a,b} + 3_2 C^{0,d+d'}_{a+d,b+d}\right) ab\cdot 2d' S^{0,d+d'}_{a+d.b+d}$$

$$= (a+b)^{4|d,d'} - (2_2(a+b+3d+3_2 d') + 3_2(a+b+2d)\, ab\cdot 2d'$$

$$S^{5,d}_{a,b} = C^{4,d}_{a,b} C^{3,d}_{a,b} S^{3,d}_{a,b} - \left(3_2 C^{4,d}_{a.b} + 4_2 C^{1,d+d'}_{a+d,b+d}\right) ab\cdot 2d' S^{1,d+d'}_{a+d,b+d}$$

$$= (a+b)^{5|d,d'} - \left(2_2 C^{4,d}_{a,b} C^{3,d}_{a,b} + 3_2 C^{4,d}_{a,b} C^{0,d+d'}_{a+d,b+d}\right.$$

$$\left. + 4_2 C^{1,d+d'}_{a+d,b+d} C^{0,d+d'}_{a+d,b+d}\right) ab\cdot 2d' .$$

etc. etc.

formules, qui ne sont nullement propres à mettre en évidence la loi demandée pour la transformation de la suite $S^{n,d}_{a,b}$: nous allons donc chercher un autre moyen de parvenir à ce but.

5. Les résultats, que nous avons obtenus dans les deux NN^{os} précédens, nous autorisent à supposer $S^{n,d}_{a,b}$ susceptible d'être transformée en une expression telle que:

$$(a+b)^{n|d,d'} - \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b} a^{1|d,d'} b^{1|d,d'}\cdot 2d' + \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b} a^{2|d,d'} b^{2|d,d'} (2d')^2 -$$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b} a^{3|d,d'} b^{3|d,d'} (2d')^3 + \text{cet.}$$

où les quantités $\mathfrak{C}$ sont des fonctions de n, d, d', a et b d'une forme encore indéterminée.

Cette supposition donnant :

$$S^{n-1,\,d}_{a,\;b} = (a+b)^{n-1\,|\,d,\,d'} - \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, a^{1\,|\,d,\,d'}\, b^{1\,|\,d,\,d'}\, 2d'$$

$$+ \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, a^{2|d,\,d'}\, b^{2|d,\,d'}\, (2d')^2 - \text{cet.}$$

$$ab\cdot S^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\,b+d} = ab\,(a+b+2d)^{n-3|d+d',\,d'} - \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\;d+d'}_{a+d,\;b+d}\, a^{2\,|\,d,\,d'}\, b^{2\,|d,\,d'}\cdot 2d' +$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\;b+d}\, a^{3\,|\,d,\,d'}\, b^{3\,|\,d,\,d'}\, (2d')^2 - \overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\;b+d}\, a^{4|d,\,d'}\, b^{4|d,\,d'}\, (2d')^3 + \text{cet.}$$

on aura en vertu de l'équation (1) du N° 3 :

$$S^{n,\,d}_{a,\,b} = (a+b)^{n|\,d,\,d'} - \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b}\, a^{1|d,\,d'}\, b^{1|\,d,\,d'}\cdot 2d' + \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b}\, a^{2|\,d,\,d'}\, b^{2|\,d,\,d'}\, (2d')^2$$

$$- \overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b}\, a^{3|d,\,d'}\, b^{3|d,\,d'}\, (2d')^3 + \cdots = C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, S^{n-1,\,d}_{a,\;b} - (n-1)_2\, ab\cdot 2d'\cdot S^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\;b+d}$$

$$= (a+b+(n-1)\,d + (n-1)_2 d')\,(a+b)^{n-1|d,\,d'} - \Big(C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b}$$

$$+ (n-1)_2\, (a+b+2d)^{n-3\,|\,d+d',\,d'}\Big)\, ab\cdot 2d' + \Big(C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b}$$

$$+ (n-1)_2\, \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\,b+d}\Big)\, a^{2\,|\,d,\,d'}\, b^{2\,|\,d,\,d'}\, (2d')^2 - \Big(C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b}$$

$$+ (n-1)_2\, \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\,b+d}\Big)\, a^{3|d,\,d'}\, b^{3|d,\,d'}\, (2d')^3 + \cdots\cdot$$

ce qui fournit les relations suivantes :

$$\overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b} = C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b} + (n-1)_2\, (a+b+2d)^{n-3\,|d+d',\,d'}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b} = C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b} + (n-1)_2\, \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\,b+d}$$

$$\overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b} = C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b} + (n-1)_2\, \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\,d+d'}_{a+d,\,b+d}$$

etc.

qui, en faisant $\overset{0}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,\,b} = (a+b)^{n|d,\,d'}$, sont toutes comprises dans l'équation générale :

$$\text{(A)} \qquad \overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{n,\,d}_{a,b} = C^{n-1,\,d}_{a,\;b}\, \overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{n-1,\,d}_{a,\;b} + (n-1)_2\, \overset{k-1}{\mathfrak{C}}{}^{n-3,\;d+d'}_{a+d,\;b+d}$$

d'où l'on tire par des substitutions succes ives:

$${}^{k}\mathfrak{C}^{n,d}_{a,b} = C^{n-1,d}_{a,b} C^{n-2,d}_{a,b} \, {}^{k}\mathfrak{C}^{n-2,d}_{a,b} + (n-2)_2 C^{n-1,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-1)_2 \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d}$$

$$= C^{n-1,d}_{a,b} C^{n-2,d}_{a,b} C^{n-3,d}_{a,b} \, {}^{k}\mathfrak{C}^{n-3,d}_{a,b} + (n-3)_2 C^{n-1,d}_{a,b} C^{n-2,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}$$

$$+ (n-2)_2 C^{n-1,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-1)_2 \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d} = \cdots = C^{n-1,d}_{a,b} C^{n-2,d}_{a,b} \times$$

$$\cdots \times C^{n-p,d}_{a,b} \, {}^{k}\mathfrak{C}^{n-p,d}_{a,b} + (n-p)_2 C^{n-1,d}_{a,b} C^{n-2,d}_{a,b} \times \cdots \times C^{n-p+1,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-p-2,d+d'}_{a+d,b+d}$$

$$+ (n-p+1)_2 C^{n-1,d}_{a,b} \times \cdots \times C^{n-p+2,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-p-1,d+d'}_{a+d,b+d} + \cdots$$

$$+ (n-2)_2 C^{n-1,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d} + (n-1)_2 \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d}$$

Or, comme (N°. 4) $S^{1,d}_{a,b} = (a+b)^{1|d,d'}$, $S^{2,d}_{a,b} = (a+b)^{2|d,d'}$, on a ${}^{k}\mathfrak{C}^{0,d}_{a,b} = o$, ${}^{k}\mathfrak{C}^{1,d}_{a,b} = o$, ${}^{k}\mathfrak{C}^{2,d}_{a,b} = o$, si $k > 0$, tandisque généralement $\mathfrak{C}^{n,d}_{a,b} = (a+b)^{n|d,d'}$, donc $\mathfrak{C}^{0,d}_{a,b} = 1$. Cela posé, si dans la dernière des expressions trouvées ci-dessus égales à ${}^{k}\mathfrak{C}^{n,d}_{a,b}$, on prend $p = n$, on obtient :

$$\text{(B)} \quad {}^{k}\mathfrak{C}^{n,d}_{a,b} = 2_2 \, C^{n-1,d}_{a,b} \times \cdots \times C^{3,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{0,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ 3_2 \, C^{n-1,d}_{a,b} \times \cdots \times C^{4,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{1,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (n-2)_2 \, C^{n-1,d}_{a,b} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-1)_2 \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d}$$

ou bien, en vertu des définitions :

$$\text{(C)} \quad {}^{k}\mathfrak{C}^{n,d}_{a,b} = 2_2 (a+b+(n-1)d+(n-1)_2 d')^{n-3|-d-(n-2)d',d'} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{0,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ 3_2 (a+b+(n-1)d+(n-1)_2 d')^{n-4|-d-(n-2)d',d'} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{1,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (n-3)_2 (a+b+(n-1)d+(n-1)_2 d')^{2|-d-(n-2)d',d'} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-5,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-2)_2 (a+b+(n-1)d+(n-1)_2 d')^{1|-d-(n-2)d',d'} \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-4,d+d'}_{a+d,b+d}$$
$$+ (n-1)_2 \, {}^{k-1}\mathfrak{C}^{n-3,d+d'}_{a+d,b+d}$$

$$= S\left[(\mathfrak{a}+2)_2\,(a+b+(n-1)\,d+(n-1)_2 d')^{n-3-\mathfrak{a}|-d-(n-2)\,d',\,d'}\;\overset{k-1}{\mathfrak{C}}{}^{\mathfrak{a},\,d+d'}_{a+d,\,b+d}\right]$$

formule, qui offre le moyen de trouver successivement les valeurs des quantités $\overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}$, $\overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}$, $\overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}$, etc. Cependant les expressions, qui résultent de cette manière pour ces quantités, sont très-compliquées et ne paraissent guère se prêter à des réductions. C'est ainsi qu'on obtient par exemple:

$$\overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b} = S\left[(2+\mathfrak{a})_2\,(a+b+(n-1)\,d+(n-1)_2 d')^{n-3-\mathfrak{a}|-d-(n-2)\,d',\,d'}(a+b+2d)^{\mathfrak{a}|d+d',\,d'}\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b} = S\left[(2+\mathfrak{b})_2\,(2+\mathfrak{a})_2\,(a+b+(n-1)\,d+(n-1)_2 d')^{n-3-\mathfrak{b}|-d-(n-2)\,d',\,d'}\times\right.$$
$$\left.(a+b+(\mathfrak{b}+1)\,d+\mathfrak{b}_2 d')^{\mathfrak{b}-3-\mathfrak{a}|-d-(n-1)\,d',\,d'}\times(a+b+4d+2d')^{\mathfrak{a}|d+2d',\,d}\right]$$

etc.

6. Nous avons déjà fait observer, que, pour $k > o$, $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{0,d}_{a,b}$, $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{1,d}_{a,b}$ et $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{2,d}_{a,b}$ sont toujours $= o$. Nous en concluons, moyennant l'équation (A), qu'également $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{3,d}_{a,b}$, $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{4,d}_{a,b}$ et $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{5,d}_{a,b}$ doivent toujours être $= 0$, lorsque $k > 1$; d'où il suit de nouveau que $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{6,d}_{a,b}$, $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{7,d}_{a,b}$ et $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{8,d}_{a,b}$ sont $= 0$, lorsque $k > 2$; et ainsi de suite. Généralement: les quantités $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{3m,\,d}_{a,b}$, $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{3m+1,\,d}_{a,b}$ et $\overset{k}{\mathfrak{C}}{}^{3m+2,\,d}_{a,b}$ sont nulles, chaque fois que $k > m$.

7. Les recherches précédentes nous conduisent finalement à ce résultat:

$$\text{(D)}\quad (a+b)^{n|d,d'} = a^{n|d,d'} + n_1 a^{n-1|d,d'} b^{1|d,d'} + n_2 a^{n-2|d,d'} b^{2|d,d'} + \cdots$$
$$+ n_2 a^{2|d,d'} b^{n-2|d,d'} + n_1 a^{1|d,d'} b^{n-1|d,d'} + b^{n|d,d'}$$
$$+ \overset{1}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}\, a^{1|d,d'} b^{1|d,d'} \cdot 2d' - \overset{2}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}\, a^{2|d,d'} b^{2|d,d'} (2d')^2$$
$$+ \overset{3}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}\, a^{3|d,d'} b^{3|d,d'} (2d')^3 - \cdots + (-1)^m\, \overset{m-1}{\mathfrak{C}}{}^{n,d}_{a,b}\, a^{m-1|d,d'} b^{m-1|d,d'} (2d')^{m-1}$$

où m désigne le plus grand nombre entier, contenu en $\frac{n}{3}$. Il est évident que, pour $d' = 0$, ce théorème coïncide avec celui de la faculté numérique du binome, ainsi que, pour $d = 0$ et $d' = 0$, il se réduit au binome de Newton.

NOTE
SUR LA MÉTHODE
DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 11 Septembre 1835.)

DÉSIGNONS par $\varphi, \psi \cdots\cdots$ plusieurs fonctions des variables $x, y, z, t \cdots\cdots$, et supposons que ces fonctions sont données par autant d'équations différentielles qu'il en faut pour les déterminer complètement en $x, y, z, t \cdots\cdots$. Les équations dont nous parlons, outre les fonctions $\varphi, \psi \cdots\cdots$ et les variables $x, y, z, t \cdots\cdots$, renferment un très petit nombre α. On veut exprimer $\varphi, \psi \cdots\cdots$ au moyen de séries qui procèdent suivant les puissances entières et croissantes de la quantité α.

Pour cela, on remplacera, en premier lieu, le nombre α par une quantité variable ω. Il n'est pas nécessaire de mettre partout ω à la place de α; on peut laisser α là, où la comodité du calcul exigera qu'on le laisse. On peut aussi modifier quelques unes des équations proposées, pourvu que les modifications disparaissent en faisant $\omega = \alpha$. Les fonctions $\varphi, \psi \cdots\cdots$ renferment avec les quantités $x, y, z, t \cdots\cdots$ la nouvelle variable ω. Nous aurons

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi_0}{d\omega}\,\omega + \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdots$$
$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi_0}{d\omega}\,\omega + \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où φ_0, $\frac{d\varphi_0}{d\omega}$, $\frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}$, ..., ψ_0, $\frac{d\psi_0}{d\omega}$, $\frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}$ ..... sont relatives à $\omega = 0$. En supposant que $\frac{d\varphi_0}{d\omega}$, $\frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}$, ..., $\frac{d\psi_0}{d\omega}$, $\frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}$, ... ne deviennent jamais très grands, les séries précédentes seront d'autant plus convergentes, que ω sera plus petit; et comme on ne cherche φ, ψ..... que pour une très petite valeur α de la quantité ω, on aura en série très convergente

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \dots..$$
$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \dots..$$
. . . .

On différenciera en second lieu par rapport à ω et autant de fois qu'il est nécessaire, les équations en φ, ψ..... x, y, z, t..... ω; chaque différentielle aura lieu en même temps que ces équations; en faisant $\omega = 0$ on obtiendra les équations nécessaires pour la déterminatoin de φ_0, ψ_0.... et de leurs différences par rapport à ω; il ne restera qu'à les mettre dans les séries

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \dots..$$
$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \dots..$$
. . . .

La méthode d'approximation que nous venons d'exposer est connue depuis bien long-temps; elle est la plus usitée. Mais il m'a semblé qu'en l'exposant, on devait dire que le nombre très petit, suivant la puissance duquel on cherche à développer les valeurs des inconnues, doit-être remplacé par une quantité variable. On devait le dire d'abord pour l'exactitude, car, l'on agit dans l'emploi de cette méthode, comme si la petite quantité était variable, et ensuite, il résulte de cette manière d'opérer deux avantages: le premier consiste dans l'explication qu'il est facile de donner, pourquoi le nombre des quantités arbitraires, que la méthode des approximations successives introduit, est plus grand que celui qui résulte de la théorie des équations différentielles; le second est plus important: il consiste en ce que, par l'altération convenable des équations, on peut se ménager des ressources, qui peuvent être utile-

ment employées pour se débarasser des termes qui peuvent rendre l'approximation fautive.

Considérons par exemple l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{quand } t = o.$$

dans laquelle α est très petit, et dont on se propose de trouver l'intégrale aux quantités de l'ordre α^2 près. — En remplaçant α par ω, on trouve

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \omega y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{quand } t = 0.$$

d'où, en différentiant et en faisant $\omega = 0$,

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ \frac{dy_0}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{quand } t = 0.$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 = y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ \frac{dy_1}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{pour } t = 0.$$

On a fait, pour abréger, $\frac{dy_0}{d\omega} = y_1$; on a d'abord

$$y_0 = \cos.\, t$$

puis

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 = \frac{\cos.\, 3t + 3\cos.\, t}{4},$$

ce qui donne

$$y_1 = \frac{12t \sin.\, t + \cos.\, t - \cos.\, 3t}{32}$$

et par suite

$$y = \cos.\, t + \alpha \frac{12t \sin.\, t + \cos.\, t - \cos.\, 3t}{32}.$$

Or, cette expression finira par devenir inexacte à cause de la variable t qui se trouve en dehors des signes sin. et cos.

Pour obvier à cet inconvénient, mettons les équations proposées sous la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) y = \frac{\omega}{4}(4y^3 - 3y)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{quand } t = 0.$$

En faisant $\omega = \alpha$, on retrouvera les équations primitives. Désignons, pour abréger, $1 - \frac{3\alpha}{4}$ par n^2; nous aurons

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + n^2y_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 1 \\ \frac{dy_0}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{quand } t = 0$$

et

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + n^2y_1 = \frac{1}{4}(4y^3 - 3y)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ \frac{dy_1}{dt} = 0 \end{array}\right\} \text{quand } t = o$$

d'où

$$y_0 = \cos. nt$$

et

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + n^2y_1 = \frac{\cos. 3nt}{4}.$$

Donc

$$y_1 = \frac{\cos. nt - \cos. 3nt}{32n^2}$$

et ensuite

$$y = \cos. nt + \alpha \cdot \frac{\cos. nt - \cos. 3nt}{32n^2},$$

ou bien

$$y = \cos. t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)} + \alpha \cdot \frac{\cos. t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)} - \cos. 3t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)}}{32\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)}.$$

On peut supprimer $\frac{3\alpha}{4}$ dans le dénominateur.

On peut comparer, si on le juge à propos, cette expression de y avec la valeur exacte de cette variable; pour trouver celle-ci, il n'y a qu'à multiplier $\frac{d^2y}{dt^2}+y=\alpha y^3$ par $2dy$, et intégrer depuis $t=0$; on trouve d'abord

$$\frac{dy^2}{dt^2}=1-\frac{\alpha}{2}-y^2+\frac{\alpha}{2}y^4=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(1-y^2)\left(1-\frac{\alpha}{2-\alpha}y^2\right);$$

puis, en posant $\frac{\alpha}{2-\alpha}=k^2$,

$$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\left((1-y^2)\ (1-k^2y^2)\right)},$$

d'où

$$dt\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}=-\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)\ (1-k^2y^2)]}}.$$

En intégrant depuis $t=0$, on obtient

$$t\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}=\int_y^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)\ (1-k^2y^2)]}}$$

d'où, en faisant usage des notations de l'illustre géomètre de Königsberg,

$$y=\text{sin. coam}\ t\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\text{cos. am}\ t\sqrt{(1-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{[1-k^2\,\text{sin.}^2\text{am}\ t\sqrt{(1-\frac{\alpha}{2})}]}};$$

il est facile de faire voir qu'en développant convenablement l'intégrale précédente en série, suivant les puissances de α, les deux premiers termes du développement donneront l'intégrale approchée précédemment trouvée, c'est-à-dire

$$y=\text{cos.}\ t\sqrt{\left(1-\frac{3\alpha}{4}\right)}+\alpha\,\frac{\text{cos.}\ t\sqrt{(1-\frac{3\alpha}{4})}-\text{cos.}\ 3t\sqrt{(1-\frac{3\alpha}{4})}}{32};$$

en effet, supposons pour abréger $t\sqrt{(1-\frac{3\alpha}{4})}=u$ et $\varphi=\text{am}\ u$; nous aurons

$$y=\frac{\text{cos.}\ \varphi}{\sqrt{(1-k^2\,\text{sin.}^2\varphi)}};$$

ou bien, aux quantités de l'ordre α^2 près,

$$y=\text{cos.}\ \varphi\ (1+\tfrac{1}{2}k^2\,\text{sin.}^2\varphi)=\text{cos.}\,\varphi+\frac{k^2}{8}(\text{cos.}\,\varphi-\text{cos.}\ 3\varphi).$$

Or, comme

$$u=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\,\text{sin.}^2\varphi)}},$$

on aura aussi aux quantités de l'ordre α^2 près

$$u = \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)\varphi - \frac{k^2}{8}\sin. 2\varphi,$$

d'où, en faisant pour abréger $\frac{4}{4+k^2}\, u = \vartheta$,

$$\varphi = \vartheta + \frac{k^2}{8}\sin. 2\vartheta$$

$$\cos. \varphi = \cos. \vartheta - \frac{k^2}{16}(\cos. \vartheta - \cos. 3\vartheta);$$

donc

$$y = \cos. \vartheta + \frac{k^2}{16}(\cos. \vartheta - \cos. 3\vartheta),$$

ou bien, en remplaçant k^2 par $\frac{\alpha}{2}$,

$$y = \cos. \vartheta + \frac{\alpha(\cos. \vartheta - \cos. 3\vartheta)}{32};$$

quant à la quantité ϑ, on a

$$\vartheta = \frac{4t}{4 + \frac{\alpha}{2-\alpha}}\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1 - \frac{3}{8}\alpha}\, t = t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)},$$

donc, enfin

$$y = \cos. t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)} + \alpha\,\frac{\cos. t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)} - \cos. 3t\sqrt{\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)}}{32}.$$

Il est presqu'inutile de faire la remarque que la méthode des approximations successives, présentée comme nous venons de le faire, n'introduira jamais des quantités arbitraires en nombre surabondant. Nous nous proposons d'appliquer les considérations précédentes au mouvement des planètes autour du soleil.

LE TÉLÉGRAPHE
BASÉ EN TOUS POINTS SUR LES PRINCIPES DE LA PHYSIQUE;

PAR

M. PARROT.

AVEC 2 PLANCHES.

(Lu le 19 Septembre 1834.)

PRÉLIMINAIRES.

L'INTÉRÊT majeur que doivent inspirer les machines qui transportent la parole écrite à de très grandes distances dans un temps extrêmement court, a fait naître de nombreuses idées sur lesquelles on a voulu baser les machines télégraphiques. Depuis les premières expériences officielles de Claude Chappe, en 1793, jusqu'à aujourd'hui, l'on n'a presque pas perdu cet objet de vue, non seulement en France, mais aussi en Angleterre, en Allemagne, en Suède et même en Russie; chacun de ces pays ayant fourni, non une idée télégraphique seule, mais même plusieurs. Les Allemands surtout ont beaucoup inventé et écrit dans cette partie, et les travaux de l'infatigable Bergstraesser, quoique peu accueillis par les gouvernemens de l'Allemagne, ne seront pas oubliés dans l'histoire de la télégraphie.

Cependant, lorsque l'on jette un coup-d'oeil sur tous ces travaux, l'on s'aperçoit aisément qu'aucun de ces inventeurs n'a saisi le problème dans son ensemble. Les uns travaillaient principalement à simplifier le mécanisme du télégraphe de Chappe, ou à en inventer un plus simple; d'autres voulaient augmenter la visibilité des objets par des combinaisons de couleurs et de contrastes; d'autres voulaient multiplier le nombre des signes possibles; d'autres encore voulaient diminuer le nombre des signes nécessaires en inventant des alphabets ou chiffres compliqués, etc. Mais aucun n'a, à ce qu'il nous semble, dûment partagé le problème général en problèmes spéciaux et traité chacun avec le soin qu'il exige pour que le télégraphe offre un maximum d'effet dans tous les cas de sa position et de l'état de l'atmosphère. C'est ce que nous avons tâché de faire dans ce mémoire dont le but est de réunir tous les avantages auxquels on peut atteindre dans l'état actuel de nos connaissances.

Nous sommes loins de nier qu'il en est résulté une machine qui, quoique simple, exige des soins et de l'exactitude dans sa construction et par conséquent, quelques frais de plus que si l'on procédait légèrement à sa confection. Mais par contre, notre construction assure l'effet dans des cas nombreux, surtout à nos 60 degrés de latitude, où un télégraphe, construit sans les précautions que nous exigeons, refuserait totalement son service, et cela souvent dans des cas urgens où il peut importer infiniment au gouvernement de le mettre en activité. Vouloir épargner quelques frais de construction et diminuer par la l'étendue des effets, est une parcimonie d'autant plus condamnable, que les frais du bâtiment excèdent de beaucoup les frais du télégraphe lui-même. Ainsi nous avons cherché à donner à chaque partie de notre télégraphe le plus haut degré de perfection qu'il comporte, sans nous soucier si la machine entière coutera quelques cents roubles de plus.

Le télégraphe qui va être décrit a été inventé par l'auteur de ce mémoire déjà en 1795, d'abord après être arrivé en Russie. Déjà alors il fit ses expériences sur la visibilité des objets à différentes distances et sur les couleurs qui

contribuent le plus à cette visibilité. Mais l'auteur, n'ayant aucune occasion d'en faire usage, et ne voulant pas augmenter le nombre des inventeurs de télégraphes qui n'ont jamais été exécutés, tint cette petite invention en porte-feuilles, jusqu'à ce que, prévoyant la guerre de 1812, il en présenta, à la fin de 1810, un modèle à l'Empereur ALEXANDRE, et à la fin de 1811, deux exemplaires en grand. Le but de l'auteur était de faire servir ce télégraphe à la suite des armées, et lui donner pour cet effet la forme la plus commode pour le rendre portatif et facile à monter et à démonter. Voici l'idée fondamentale de ce télégraphe *).

Le signe télégraphique *MLN* (Pl. 1, fig. 1) est une simple planche, un *volant* dont un des bouts est élargi de chaque côté d'une quantité égale à la largeur de la planche. La longueur entière est de 10 pieds de Paris, et la largeur de 18 pouces. Au milieu *I* de la longueur est le centre du mouvement rotatoire qui doit être imprimé au volant. Ce mouvement est partagé en 12 parties égales, de sorte que chacune des 12 positions du volant fournit un *signal* à part. Ces signaux correspondent aux 12 premiers nombres, de sorte que leur ensemble offre l'image idéale d'un cadran d'horloge, dont le volant du télégraphe est l'aiguille.

---

*) Nous ne dissimulerons pas que MM. Bréguet et Bétancourt ont inventé, en 1797, un télégraphe sur la même idée fondamentale qui a eté publiée depuis dans les mémoires de l'Institut de France. En voici les caractères principaux: La largeur à la longueur $=$ 1 : 23; longueur du petit bras à la largeur $=$ 5 : 1. Si la longueur est de 10 pieds, la largeur ne sera que de $5\frac{1}{4}$ pouce. A l'imitation des premiers télégraphes, le volant est fait en forme de jalousie, construction qui, comme nous le verrons ci-après, est inutile. Le mouvement se donne par deux poulies et une chaîne. Les auteurs exigent de leur volant 36 signes qu'ils veulent distinguer avec sûreté au moyen d'un diaphragme partagé en autant de parties égales et placé au foyer de l'oculaire. Cette exigence est évidemment outrée, par des raisons faciles à trouver. Ce télégraphe n'a jamais été exécuté que pour les premiers essais.

L'auteur de ce mémoire n'a eu connaissance de ce télégraphe qu'après avoir construit les deux exemplaires du sien pour l'Empereur ALEXANDRE, et cela par M. Paucker qui en cherchant autre chose dans les mémoires de l'Institut de France, y trouva par hasard la description de celui de MM. Bétancourt et Bréguet et nous la communiqua. Il est vraisemblable que, si nous l'avions connue plus tôt et appris son peu de succès, malgré les éloges que lui donna l'Institut, nous eussions abandonné cette idée, soupçonnant qu'elle pèche par quelque défaut essentiel inconnu. Heureusement nous nous étions déjà convaincus de son utilité par les expériences.

Pour prouver avec quelle facilité et sûreté ces 12 signes télégraphiques se donnent et s'observent, il suffira de rapporter les expériences suivantes:

A Dorpat, où je fis les premières expériences en grand, un étudiant, M. Paucker, à présent professeur à Mitau, qui m'assistait dans ce travail, signalisait et observait avec une égale facilité, sans jamais se tromper, et cela au premier signal. De même le charpentier qui avait construit le télégraphe, de même mon domestique. Il suffisait pour les deux derniers de leur apprendre à placer leur oeil à l'oculaire du télescope, et de leur dire de s'imaginer voir le cadran d'une horloge, image que tout badaud de ville et tout paysan de village a en tête; et si l'on voulait absolument prendre pour télégraphistes des hommes qui ne l'ont pas, il serait facile de la leur donner par une heure ou deux d'exercice en petit avec un véritable cadran devant lequel on signaliserait avec une verge de gros fil de fer qui représenterait le volan, et observerait avec une petite lunette sur un support.

A Tschesmé, où se firent les expériences par S. M. l'Empereur ALEXANDRE en février 1812, un vieux domestique, curieux de savoir ce qui devait se faire, observa quelques signaux tout aussi sûrement et facilement que mon domestique à Dorpat.

Qu'il me soit permis à présent de raconter en détail les observations faites à Tchesmé par l'Empereur lui-même.

Etaient présens: S. M. l'Empereur ALEXANDRE, le prince Barklay alors Ministre de la guerre et se préparant pour la campagne, le prince Wolkonsky alors chef de l'état-major, aujourd'hui ministre de la maison Impériale, le colonel Ekesparre à la suite de l'Empereur, qui avait été chargé de trouver un emplacement pour le télégraphe à 10 w. de Tchesmé. L'Empereur arriva entre II et III heures après midi. Le tems n'était pas très clair et paraissait se préparer à un dégel.

J'avais établi deux télescopes, chacun sur une table à part, au reste sans fixer leur position à demeure, l'un pour l'Empereur et sa suite, l'autre pour moi seul, voulant observer moi-même tous les signaux pour m'assurer de la justesse des observations faites à l'autre télescope, et mon idée était de dicter les signaux de

la première dépêche, dont j'en avais donné cinq à M. Paucker, qui avait eu la complaisance de se charger de faire les signaux.

L'Empereur était à son télescope et aussi-tôt après l'observation de 3 signaux il me dit: *Taisez vous, mon cher; je veux dicter.* En effet il dicta la première dépêche de 115 signaux sans faute. Les princes Wolkonsky et Barklay, qui suivirent, dictèrent avec la même facilité et sûreté, chacun la dépêche qui lui échut. L'Empereur ALEXANDRE s'était chargé de la dernière et à-peu-près au milieu de cette dépêche il me dit: *Je ne vois plus rien.* Je répondis: *et moi pas grand-chose* et dictai à sa place. L'Empereur, voulait forcer son oeil à voir encore, dérangea le télescope et se retira dépité. Le prince Barklay écrivait; mais le prince Wolkonsky courut au télescope, le remit avec une dextérité surprenante et commença à dicter. Alors l'Empereur reprit sa place et continua la dictée menant avec peine la dépêche à sa fin.

D'abord après nous courûmes tous à la fenêtre et vîmes à notre grand étonnement qu'il neigeait à foison. Ainsi cet accident prouve que l'on peut encore voir les signaux pendant une bourrasque de neige.

Le prince Wolkonsky a témoigné à S. M. l'Empereur NICOLAS la grande satisfaction, que son auguste frère a eue de ces expériences. Quant aux preuves que l'Empereur ALEXANDRE en a données à l'auteur, elles ne peuvent être un objet de publicité. Il ordonna au prince Barklay de faire faire 25 télégraphes pour la campagne, à laquelle il s'apprêtait. Mais la campagne s'ouvrit trop tôt, et le manque de télescopes appropriés à cet usage rendit la chose impossible.

Cependant le prince Barklay, sentant enfin cette impossibilité, voulut pourtant tirer parti de cette invention et demanda à l'auteur un dessin d'un télegraphe en petit, devant servir pour les avant-postes et signaliser à 5 ou 6 werstes. Pendant son séjour à Wilna, il en fit exécuter à la hâte deux exemplaires qui réussirent complètement dans les essais. Mais Napoléon avait atteint l'armée russe de moitié moins forte que la sienne; la fameuse retraite commença et la chose en resta là. L'auteur a appris ces détails par le général Rennenkampff, alors capi-

taine, qui fut employé par Barklay à cette entreprise. Lors de son retour de la campagne il fit visite à l'auteur à Dorpat, exprès pour la lui raconter comme un fait intéressant pour un physicien, ne se doutant pas qu'il parlait à l'inventeur.

L'emploi des 12 signaux de notre télégraphe est susceptible de nombre d'hypothèses. L'auteur, qui ne s'est jamais occupé de sténographie ni de cryptographie, avait choisi la plus simple de toutes pour les expériences faites par l'Empereur ALEXANDRE, celle de donner à chaque signal la valeur d'une lettre de l'alphabet. Mais comme l'alphabet des langues européennes a au moins 24 lettres, l'auteur avait copulé les lettres dont les sons ont le plus d'analogie entre eux. Voici, par exemple, l'alphabet pris sans choix pour les dépêches en français et la première dépêche que l'Empereur observa *).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	*e*	*i*	*o*	*u*	*b*	*c* dur	*d*	*f*	*l*	*m*	*s*
	é	*y*			*p*	*g*	*t*	*v*	*r*	*n*	*c* mol.
						k					*z*
						q					*x*
											ch

Le *h*, ne faisant qu'aspirer quelques voyelles, n'a point de chiffre

Dépêche.

10	2	11	11	2	11	3		1		8	2	6	1	10	7	5	2		1
	1	6	4		8	4	5	12	2		11	3	10	10	2		4	11	11
2	12		8	3	11	9	1	11	8	2	10	3	2		2	8		8	10
4	3	12		11	3	10	10	2		4	11	11	2	12		8	2		7
1	9	1	10	10	2	10	3	2		2	11	9	4	3	2	12		11	4
3		12	3	11	7		6	1	8	1	3	10	10	4	11	12		2	8
	8	10	4	3	12		2	12	7	1	8	10	4	11	12				

*) On peut diminuer le tems moyen nécessaire pour faire les signaux en dispersant les voyelles parmi les consonnes, par exemple en plaçant l' *e* à proximité de *n*, *m*, *r*, *s*, *t*, etc. Il suffira pour cela de consulter un dictionnaire de la langue qu'on emploie.

La version de ces chiffres, si l'on prend les premières lettres de la table alphabétique, sera :

Lemmemi a debalcue a abo douse mille ommes dimfamdelie ed dlois mille ommes de cafallelie enfoies moi sinc badailloms ed dlois escadloms.

Cette nouvelle orthographe amusa beaucoup les illustres télégraphistes qui la corrigèrent facilement sans le secours de la table.

L'on voit par cet échantillon que l'auteur faisait signaliser les dépêches en toutes lettres. Pour indiquer la séparation des mots (ce dont on peut au reste se passer dans un chiffre aussi simple), il faisait balancer le volet deux fois, et chaque fois de 60 degrés ou 2 heures, c'est-à-dire une heure à droite et une heure à gauche du dernier signal, et s'arrêter au premier chiffre du mot suivant. Pour la même lettre répétée deux fois de suite, on balançait le volant une fois sur un arc de 30 degrés ou jusqu'au signe suivant et l'on retournait sur le champ au premier signe.

L'auteur eut d'abord l'idée d'ajouter pour les nombres un signe auxiliaire afin de les signaliser plus brièvement; mais il l'a abandonnée depuis, préférant une manipulation simple au gain de quelques signaux, d'autant plus que ce n'est que dans les dépêches militaires que les nombres sont fréquens, et que le signe auxiliaire servirait précisément à indiquer à un ennemi que l'on signalise une dépêche militaire et lui aiderait à découvrir le secret du chiffre par les mots qui suivent les nombres, comme infanterie, cavallerie, canons, etc.

Si l'on veut préférer à la méthode de signaliser en toutes lettres une méthode crypto-sténographique, l'on pourra par exemple prendre ces 12 signaux un à un, deux à deux, trois à trois et même quatre à quatre; ce qui fournira 12, 144, 1728, 20736 signaux, sur les quels on pourra former un dictionnaire de mots et de phrases.

L'auteur, n'étant ni sténographe ou tachygraphe, ni cryptographe, est bien éloigné de décider entre ces deux méthodes. Cependant il ne peut s'empêcher de

témoigner sa prédilection pour le chiffre en toutes lettres, et cela par les raisons suivantes :

1) Le système cryptographique a l'avantage de se déchiffrer plus difficilement par l'ennemi ou par un espion. Mais d'un autre côté le gouvernement a beaucoup de dépêches pressantes à expédier dont le contenu ne peut lui être nuisible s'il vient à être connu. Pour les autres il faut considérer que les stations télégraphiques ne seront pas dans des villes. On pourra même placer hors de ville les télégraphes des bouts de la ligne, et il n'est pas à craindre que quelqu'un voulût faire le pied de grue pour attendre que des dépêches soient signalisées; et une police un peu vigilante pourrait lui rendre facilement ce métier très dangereux.

2) La célérité de l'expédition ne gagnerait pas grand' chose à exprimer des mots entiers; car à l'exception de 12 mots dans un dictionnaire qui devrait en contenir dix mille, 144 exigeraient deux signaux, 1728 en exigeraient trois et 8116 en exigeraient quatre *). Si par contre l'on abrévie dans le système en toutes lettres ou alphabétique les long mots, tels que *infanterie*, *cavallerie*, *attroupement*, *forteresse*, etc. (ce qui peut se faire sans risquer des mésentendus) l'on diminuera de beaucoup les signaux nécessaires. Le plus grand avantage de la méthode sténo-cryptographique serait dans les cas où l'on n'emploierait qu'un signal pour une phrase entière. Mais alors combien de phrases le dictionnaire ne devrait il pas contenir! Et que faire quand une phrase nécessaire n'y serait pas?

3) Le chiffrement dans la méthode sténo-cryptographique est bien plus long (à nombres égaux de signaux) que dans la méthode en toutes lettres, et le déchiffrement encore davantage; car il faut avoir un grand soin à observer le nombre des chiffres d'un seul signal. Si l'on veut en outre représenter des phrases entières par un, deux, trois ou quatre signaux, il faudra ranger ces phrases dans un ordre

---

*) Dans ce système, où le volant de télégraphe ne prend que 8 positions, on aurait 1300 mots de plus exprimés pour 4 signaux, désavantage qu'on ne doit pas négliger.

systématique; ce qui a ses difficultés, soit pour la composition du système, soit pour son application. Bref, le tems nécessaire pour chiffrer à la station de départ et pour déchiffrer à la station d'arrivée est bien plus long que dans l'autre système, et cette perte compense amplement le peu de tems de plus qu'exigent les signaux en toutes lettres.

4) Une seule erreur dans un système cryptographique peut rendre une dépêche indéchiffrable ou même lui donner un tout autre sens. Dans le second cas on peut se trouver dans une erreur dangereuse: dans le premier il faut redemander un second signalement: Tout cela n'a pas lieu dans le système à toutes lettres.

5) Le livre qui contient le dictionnaire sténo-cryptographique peut être volé; (l'on encourage si fort aujourd'hui l'industrie) et ce cas n'est pas sans exemple dans la diplomatie. L'autre système par contre, s'il est volé, est remplacé en trois minutes par un autre, tandis qu'il faut des mois pour refaire un système cryptographique. Il n'est pas même nécessaire que le livre soit complètement volé pour trahir le chiffre. Il suffit qu'un habile cryptographe le possède pendant quelques heures pour copier quelques centaines des mots principaux, qui seront suffisans pour déchiffrer toute dépêche et chaque déchiffrement augmentera le nombre des mots ou des phrases trahies.

Sans vouloir rien affirmer sur la préférence à accorder à l'un ou l'autre système, il nous paraît probable qu'à la suite on abandonnera les chiffres si compliqués pour en revenir au système simple, auquel on sera parvenu à donner un degré suffisant de crypticisme. C'est la marche ordinaire de l'esprit humain qui commence par les méthodes simples, puis s'amuse à inventer des complications et en revient enfin aux méthodes simples qu'il a eu le temps de perfectionner. C'est par exemple l'histoire du baromètre. C'est également l'histoire du télégraphe. Autrefois quelques signaux suffisaient pour porter des dépêches à de grandes distances. Le télégraphe de Chappe, machine très compliquée, leur succède. Aujourd'hui l'on introduit le nouveau télégraphe, machine de la plus grande simplicité.

Pour ceux qui ne savent que crier à l'expérience sans peser les circonstances et s'appuient sur l'autorité du télégraphe de Chappe, nous ajoutons les considérations suivantes: Chappe n'a marqué sur son télégraphe composé de trois pièces que des angles de 45 degrés, par deux raisons: D'abord son volant lui fournissait déjà 84 signes, nombre plus que suffisant pour avoir des signaux à part pour l'alphabet entier, pour les 10 chiffres, pour les points, les virgules, etc. D'un autre côté, l'observateur de ce télégraphe a pour chaque signal les positions de trois objets à observer à la fois; ce qui exige une attention très intense, de sorte que si les positions ne variaient que de 30 degrés, l'attention ne pourrait pas être soutenue à ce point. Par contre le télégraphe simple n'a qu'un seul objet dont il faille observer les positions, et comporte en toute sûreté des angles de 30° sans exiger une forte attention, comme les expériences de Dorpat et Tchesmé l'ont prouvé.

L'année dernière (1833) arriva de Paris, M. Chateau dans la vue d'ériger une ligne télégraphique de Pétersbourg à Warsowie, à l'exécution de laquelle on travaille actuellement. Son télégraphe est du genre du nôtre, mais d'ailleurs très différent à plusieurs égards.

Désirant être utile dans cette entreprise, et ayant depuis long-tems adopté les principes à suivre pour l'établissement des télégraphes stationnaires, qui sont susceptibles de bien plus hauts degrés de perfection que les télégraphes ambulants, l'auteur présenta à S. M. l'Empereur une description succincte du télégraphe tel qu'il doit être construit en tout point sur les règles de la physique. S. M. l'a fait communiquer à M. Chateau, qui au reste ne jugea pas à propos de se mettre en relation avec l'auteur, ni lui offrir de voir le premier télégraphe qu'il exécuta. Cependant, comme l'auteur a eu depuis connaissance du télégraphe de M. Chateau, il pourra à la fin de ce mémoire établir une comparaison entre l'un et l'autre.

Après ces préliminaires nous allons entrer en matière.

Description.

Le problème télégraphique, dans sa plus grande généralité, se partage en plusieurs problèmes spéciaux; rélativement à la visibilité du signe, soit de jour soit de nuit; à la construction et à l'emplacement du télescope; à l'emplacement de l'observateur; aux mouvemens du télégraphe; à l'abritement des télégraphistes; à la tactique des observations et au choix des stations. Nous allons traiter ces objets à part.

I. Visibilité du signe télégraphique de jour.

Il n'est pas douteux que, sans l'opacité de l'air et des brouillards qui rendent quelquefois cette opacité complète pour des objets à des distances peu considérables, l'on pourrait, au moyen de grands télescopes, étendre les distances des stations télégraphiques à 100 werstes et plus, si l'on trouvait des points assez élevés au-dessus des objets intermédiaires et plus encore de la courbure de la terre; car cette courbure sur 105 werstes, à peu près 1° du méridien, se monte à environ 801 pieds anglais. Elle est beaucoup plus petite et peu nuisible pour une distance de $10\frac{1}{2}$ w., puisqu'elle ne se monte qu'à 8,4 pieds anglais. Pour une distance de 15 w. elle se monte à 15,8 pieds anglais. Ces petits calculs prouvent que non seulement l'opacité de l'air, mais aussi la courbure de la terre s'opposent à ce que l'on n'admette pas de trop grandes distances pour les stations télégraphiques, quoique l'économie semble l'exiger. L'on ne peut pas donner des règles fixes sur ces distances, l'emplacement des postes ayant une grande influence sur la transparence de l'air. Seulement on peut dire en général que près d'une grande ville et sur les terrains marécageux, les stations doivent être plus petites. Fondés sur les expériences que nous avons faites à Dorpat et à Tchesmé, nous croyons pouvoir admettre 10 werstes pour la distance moyenne d'un télégraphe à l'autre tel que nous le décrivons ici; les localités décideront du plus ou du moins.

Les brouillards et les brumes sont les ennemis les plus puissans de la télégraphie, soit en interceptant les rayons de lumière réfléchis par les objets en vertu de leur opacité, soit par la lumière diffuse qu'ils envoient de la surface de leurs vésicules à l'objectif du télescope, lumière qui affaiblit l'image télégraphique.

Dans le nord, où les longs jours d'été dessèchent fortement la terre, il s'élève des brouillards secs, apparemment de la surface des plantes, que l'on n'aperçoit pas toujours à l'oeil nud, mais toujours au télescope, qui en outre découvre ordinairement une oscillation verticale dans les couches de l'atmosphère, oscillation qui fait danser les images et rend les observations difficiles.

Le nord offre encore un phénomène à part, très nuisible. Ce sont les embrasemens des marais desséchés et des forêts, d'où il se répand des brouillards secs et puans qui infectent plus ou moins fortement de grands districts, souvent pendant plusieurs semaines. De petits districts sont encore infectés dans le nord par une opération du paysan, nommée Kittis, et qui consiste à brûler lentement des racines d'arbre et de la broussaille, couvertes de terre, sur l'étendue de son champ pour le fertiliser. Cette opération produit une fumée qui s'étend quelquefois sur une distance de quelques werstes, et diminue sensiblement la transparence de l'air.

Ainsi le combat du physicien contre l'opacité de l'air provoquée par tant de causes est la partie la plus importante de la télégraphie. Mais comme il n'est pas en son pouvoir de diminuer cette opacité, son devoir est de construire les télégraphes de sorte qu'ils puissent profiter, autant que possible, de petits degrés de pellucidité de l'atmosphère.

Aucun brouillard n'intercepte absolument le passage de la lumière réfléchie des objets. Il en passe toujours quelque peu; mais ce peu devient enfin, à une certaine distance variable, insensible à notre vue. Cet effet a lieu à des degrés très différents, et l'on doit sentir que tel brouillard, humide ou sec, laisserait passer assez de lumière pour rendre l'observation possible, lorsque toutes les inconstances qui sont au pouvoir du physicien, c'est-à-dire le volant du télégraphe, son contraste avec le fond dont il doit se détacher, le télescope et son emplacement, de même que l'emplacement de l'observateur, sont choisis avec le plus d'avantages possibles, et que l'observation peut souvent devenir impossible lorsque ces avantages manquent en tout ou en partie.

Nous avons donné à notre volant 10 pieds de longueur et 18 pouces de largeur, c'est-à-dire la proportion 1 : 6⅔ de la largeur à la longueur. Cette proportion n'est pas prise au hasard, car les expériences que nous avons faites en grand, déjà en 1795, ont prouvé à la vérité (ce que, au reste, on sait d'ailleurs, nommément par les expériences en petit du Dr. Jurins) que la visibilité d'un objet d'une largeur donnée augmente avec sa longueur, mais que cette augmentation est à son maximum sous la proportion de 6 ou 7 à 1. Si donc les télégraphes que l'on a construits jusqu'à présent ont une proportion bien moindre, ils ont trop de longueur pour leur largeur, ou trop peu de largeur pour leur longueur, d'autant plus qu'étant de règle noirs, leur largeur apparente diminue dans une bien plus grande proportion que leur longueur par l'effet de la lumière du ciel sur lequel ils se profilent, lumière qui empiète de tous côtés sur les bords du volant. Si donc nous avons pris 10 pieds de Paris pour longueur et 18 pouces pour largeur, nous sommes sûrs qu'une augmentation en longueur n'augmentera pas les degrés de visibilité et que, dans la supposition de cette longueur, c'est un devoir de ne pas donner moins de 18 pouces de largeur; car il est certain qu'un objet est d'autant plus visible qu'il est plus large, non seulement à raison de l'angle visuel, mais aussi à raison de la plus grande quantité de lumière qu'il réfléchit. Ainsi, si un brouillard ne permet, par exemple, que de soupçonner l'existence d'un signe télégraphique de 5 à 6 pouces de largeur, un signe de 18 pouces pourra être parfaitement distingué avec sa position, et donnera la possibilité du signalement, parce que l'intensité de nos sensations dépend du nombre des points de l'objet (sur tout en largeur, s'il est beaucoup plus long que large) qui nous envoient chacun une faible sensation qui, seule, cesserait d'en être une, ou du moins perceptible. Cela est vrai des sensations qu'opèrent les sons comme de celles qu'opère la lumière.

D'un autre côté, il est inutile de donner au gros bout du volant (celui qui doit se distinguer de l'autre bout) une trop grande étendue. Il suffit d'y placer à droite et à gauche un carré dont les côtés sont égaux à la largeur du volant.

Celui du milieu se joint à eux dans la sensation et offre un rectangle dans la proportion de 1 à 3. Toutes nos expériences prouvent que cela suffit.

La visibilité d'un objet dépend de trois circonstances, de la quantité de lumière qu'il réfléchit, de l'intensité de l'impression qne cette lumière fait sur l'organe de la vue, et surtout du contraste qu'elle fait avec le fond sur lequel l'objet se profile. Bientôt après l'invention du télégraphe, l'on a beaucoup raisonné et déraisonné sur l'influence des couleurs relativement à cette visibilité; l'on a même proposé de barioler de plusieurs couleurs les surfaces des télégraphes. Mais la déraison ne doit pas exclure le raisonnement, et nous verrons que la considération des couleurs n'est pas tout-à-fait inutile.

Les télégraphes français sont construits en forme de jalousies. Nous ne pouvons en imaginer que deux motifs: ou de diminuer un peu l'effort du vent sur le volant, ou d'offrir des faces inclinées à la lumière, afin que le noir ne renvoie pas la lumière qu'il réfléchit à l'oeil de l'observateur. Le premier motif est insignifiant; car la théorie n'indique presque aucun avantage à cet égard, et celui qui d'ailleurs pourrait résulter de cette forme ne consiste qu'à offrir une issue à l'air foulé sur la surface inclinée. D'un autre côté, cette forme est bien plus fragile que celle d'un simple plan. Quant au second motif, nous ne pouvons lui accorder plus de poids qu'au précédent; car si, dans les positions verticales, les surfaces des jalousies renvoient moins de lumière à l'oeil de l'observateur, il peut arriver que dans les positions horizontales elles en renvoient beaucoup plus. Or on doit adopter pour règle dans toute la télégraphie qu'il ne doit pas se trouver des circonstances (hors les effets de l'opacité de l'air) où la visibilité soit augmentée et dans d'autres diminuée, parce que cette diminution pourrait dans plusieurs cas précisément suffire pour rendre l'observation impossible.

Pour obtenir une couleur noire bien foncée il faut mêler un peu de bleu au noir de fumée, et pour ôter le luisant à la couleur à l'huile, on l'enduira d'une couche de même couleur broyée seulement avec de l'huile de thérébentine, qui, étant évaporée, laissera la substance colorante sans luisant. Enfin, si l'on croit devoir

renforcer la teinte noire par des ombres et des faces inclinées, l'on parviendra le plus sûrement à ce but en employant un marteau dont la tête est hérissée de petites pyramides comme celui des tailleurs de pierre *). L'on enfoncera ce marteau au moyen d'un autre dans la planche bien sèche qui forme le volant, d'où il résultera des pyramides creuses qui feront l'effet désiré quand on les aura enduites après coup de la couleur noire.

Un corps profilé sur un autre de même couleur, de même teinte et éclairé par la même lumière, n'est pas visible et ne le devient qu'autant que la couleur et la lumière de l'objet et du fond sur lequel il se profile, contrastent ensemble. Quant aux couleurs, celles qui contrastent le plus sont le rouge et le vert, le jaune et le violet, l'orangé et le bleu, c'est-à-dire les couleurs complémentaires. Enfin le blanc et le noir, comme réunion et absence de toutes les couleurs, sont les phases de lumière les plus opposées.

Tout corps qui se profile sur l'atmosphère seule en ressort comme corps obscur, quelque couleur et quelque intensité de teinte qu'il ait, parce que tout corps réfléchit moins de lumière qu'il n'en reçoit. Ainsi la couleur et la teinte d'un télégraphe seraient à cet égard presque indifférentes, si l'atmosphère avait toujours cette teinte blanchâtre qu'elle offre lorsque l'on a ce qu'on nomme un ciel légèrement couvert. Mais souvent elle offre des nuages d'une couleur foncée et quelquefois ce que l'on nomme un ciel azuré. Pour faire face à toutes ces couleurs et teintes l'on donne au volant du télégraphe le noir le plus foncé. Il est des cas, quoique rares, où le ciel se couvre de nuages si foncés que le noir du télégraphe se distingue à peine. Alors on peut se servir des signaux de nuit de notre télégraphe, quoique de jour.

Le télégraphe ne peut pas toujours être placé de manière à se profiler sur l'atmosphère; la configuration du terrain exigeant souvent qu'il se profile sur des objets terrestres plus ou moins proches du télégraphe. Si ces objets sont couverts de vé-

---

*) Seulement elles devront être plus pointues et tranchantes, afin qu'elles ne froissent pas seulement le bois, mais qu'elles le tranchent en même tems. On peut donner 70° à l'angle du sommet.

gétation, la couleur de ce fond sera un verd foncé rendu un peu bleuâtre par la couleur propre de l'atmosphère qui se trouve entre l'observateur et ces objets. Pour ce cas là, il faut donner au télégraphe une couleur blanche avec une teinte extrêmement légère d'orangé (moins forte que celle qui se trouve au dessin de la fig. 1).

Si le volant se profile sur un fond rougeâtre, tel qu'une montagne de sable rouge, alors on donnera au volant une très légère teinte de jaune si le rouge de la montagne tire sur le violet, de vert si le rouge n'a pas cette teinte. Enfin, si le fond est un sable jaunâtre comme le sable de mer, la teinte du volant sera une teinte bleuâtre très légère.

Au reste nous devons répéter que ces teintes du volant doivent être extrêmement légères, parce que, dans les cas critiques où l'air est affecté d'un léger brouillard, la teinte du fond est moins prononcée.

Lorsque l'emplacement d'un télégraphe est tel que le volant, vu d'un poste, se profile sur le ciel et de l'autre sur des objets terrestres, on se servira de ses deux faces d'une manière analogue, en peignant l'une en noir, l'autre en blanc. Pour l'hiver, aussi long-tems que tout l'horizon est couvert de neige, le volant sera noir des deux côtés. Pour cet effet, si les deux faces ne sont pas déjà noires, on couvrira la blanche d'une étoffe noire que l'on y attachera pour tout le tems auquel le fond sur lequel ce côté se profile sera couvert de neige.

Il est encore un objet important pour tous les cas où le volant, se profilant sur des objets terrestres, doit être blanc, la pureté du contour de la figure du volant. Les objets terrestres n'ont jamais une teinte absolument égale, et leur couleur ne tranche pas dûment avec celle du volant. En outre la lumière blanche du volant, en dépassant par son épanouissement les limites du contour, a l'apparence de se répandre sur les objets limitrophes et en diminue l'obscurité. Pour faire diminuer autant que possible ces légers passages qui privent les contours de leur pureté et affaiblissent le contraste, les bords du volant sont du noir le plus foncé sur une largeur de 2 pouces. Cette largeur disparaît dans l'image du télescope; mais elle dessine un contour net. L'expérience a prononcé sur cet avantage.

II. Signaux de nuit.

Le télégraphe de Tchesmé, avec lequel se firent les expériences à Dorpat et à Tchesmé, avait trois lanternes placées comme l'indiquent les figures I et II et dont les axes tournent dans des tuyaux *hh*. Ce qui suppose un nombre égal de lanternes de l'autre côté, afin que l'on puisse voir du poste qui envoie, si le poste qui reçoit a bien compris le signal. Après tant d'années écoulées depuis la construction de ce télégraphe, nous nous croyons en état de perfectionner de beaucoup la construction de ces lanternes.

L'auteur avait déjà observé dans sa jeunesse que la flamme d'une chandelle ordinaire est encore visible à l'oeil simple à une distance d'une lieue ou de 4 werstes; d'où il conclut que cette flamme, sous une amplification de 30 au télescope serait encore visible à 120 werstes, sans la perte de lumière causée par l'opacité de l'air et le télescope lui-même, et que par conséquent cette flamme a un diamètre bien plus que suffisant pour la distance d'une station télégraphique. Il s'assura ensuite qu'*à une distance de* 10 *werstes les signaux à la lanterne sont déjà très distincts le soir, lorsque les signaux de jour sont encore visibles, de sorte qu'il voyait les deux signaux à la fois.* Cette observation fournit naturellement l'idée d'augmenter considérablement l'intensité de la lumière des lanternes dans une double vue, l'une de pouvoir signaliser de jour avec les signaux de nuit lorsqu'un brouillard médiocre rendrait les signaux de jour invisibles ou au moins incertains, l'autre de pouvoir signaliser de nuit dans les cas où le brouillard serait assez fort pour empêcher le signalement de jour avec les signaux de nuit: avantages inappréciables dans des circonstances urgentes où l'on ne peut pas attendre pendant plusieurs jours la disparition d'un brouillard humide d'automne ou de printems ou d'un brouillard sec d'été, cas fréquens dans notre climat *).

---

*) Nous ne concevons pas comment (au rapport de M. Chappe l'ainé dans son *histoire de la télégraphie* p. 119) les lanternes du télégraphe du Louvre n'emettaient pas assez de lumière pour la distance moyenne des telégraphes français qui n'est que de 2 lieues ou 8 w., tandis que dans nos expériences la flamme de nos bougies a sufi pour une distance de 10 w. Les bougies du télégraphe du Louvre avaient 2 pouces de diamètre, les nôtres, qui ne devaient servir qu'a des essais, avaient 8 lignes

L'intensité de la lumière peut être augmentée de deux manières, en augmentant le nombre de bougies et en nourrissant les flammes de beaucoup d'oxigène atmosphérique. Ce double but pourrait être atteint en substituant aux bougies des lampes d'Argand, comme cela a eu lieu au télégraphe ordonné par Napoléon, devant signaliser du cap Grinez jusqu'à Douvres, distance d'environ 18000 toises ou 31 werstes. Mais nous regardons ces lampes comme peu applicables aux télégraphes, pour plusieurs raisons. Aussi cet essai paraît n'avoir été répété qu'une fois, à Montmartre, apparemment pour donner ce spectacle aux Parisiens; ce qui paraît indiquer qu'il est peu praticable.

Les lanternes de notre télégraphe seraient construites de la manière indiquée aux figures VII et VIII, dont la première en offre le plan et l'autre l'aspect extérieur. *ABBA* (fig. VII) et *ABED* (fig. VIII) représentent le corps de la lanterne, la caisse dans laquelle se trouvent les trois bougies. *CC* sont deux fenêtres dont le verre est enchâssé dans un cylindre de fer-blanc qui entre dans un cylindre fixé à la caisse. Ainsi les trois flammes luiront en avant et en arrière, signalisant à la fois des deux côtés, ce qui leur donne l'avantage du signal de jour qui instruit à la fois le télégraphe en avant de la dépêche à envoyer, et le télégraphe en arrière que la dépêche est bien signalisée.

Les trois flammes sont disposées en ligne droite dans la direction d'un télégraphe à l'autre et non à angles droits avec cette direction, parce que, comme nous venons de le voir, il s'agit moins d'obtenir une flamme d'une grande largeur que d'une grande intensité de lumière: car les expériences du comte Rumfort ont prouvé à son photomètre que les flammes sont parfaitement transparentes lorsqu'elles brûlent sans fumée. Trois flammes placées en triangle équilatéral offriraient une surface lumineuse trois fois aussi large; mais leur lumière d'une intensité simple n'aurait pas la force de percer un brouillard qu'une intensité triple percera. Il est même probable que, sur tout, vu l'arrangement qui sera donné aux télescopes, l'on pourra signaliser de jour avec les lanternes dans des cas de brouillard où les signaux de jour seraient déjà invisibles. *a a*, *a a*, *a a* sont les

coupes horizontales des chandeliers *FG* (fig. VIII), *b b*, *b b*, *b b* sont les orifices par où sortent les mèches des bougies pressées par un ressort.

Au reste, notre idée n'est pas que les trois bougies soient allumées chaque fois que l'on signalera de nuit. De règle on n'en allumera qu'une, celle du milieu, et l'on allumera la seconde et la troisième seulement dans les cas où le brouillard l'exigera, afin de ne pas tomber dans des frais inutiles.

L'on objectera peut-être que ces lanternes ont le désavantage de n'avoir point de réverbères. Mais ce désavantage n'est qu'apparent, ce qui se prouve par les considérations suivantes: Les distances entre deux de nos télégraphes seront, relativement aux localités, de 8 à 12 werstes. Prenons une station de 12 w. ou de 6000 sagènes (la sagène = 7 pieds anglais). En supposant que le miroir concave fût assez parfaitement parobolique pour réfléchir les rayons incidens en direction parfaitement parallèles à celle des deux postes, un défaut de position du miroir, soit dans le sens horizontal, soit dans le sens vertical, seulement d'une minute ferait tomber le faisceau cylindrique de lumière réfléchie à $11\frac{1}{2}$ pieds à côté de l'objectif du prochain télégraphe; ce qui rendrait son effet nul pour le télescope. Or, où trouver le constructeur qui s'engagerait à ne pas commettre une pareille faute dans la position des miroirs? Et s'il s'en trouvait un assez fou pour l'entreprendre, répondra-t-il de la position du volant jusqu'à ce degré d'exactitude, répondra-t-il de la stabilité de cette position du miroir chaque fois que le télégraphiste le nettoiera, et du volant en dépit des vicissitudes de l'humidité, et de la température de l'air et de l'action du soleil? Bien plus, les lampes télégraphiques marchent sur la circonférence d'un cercle de 10 pieds de diamètre; si donc les positions du miroir d'une lanterne et du volant qui signale sont aptées pour une certaine position du télescope prochain, cette position sera défectueuse pour tous les autres points de la circonférence où cette lanterne se trouve successivement. Nous avons supposé jusqu'à présent que le faisceau de lumière réfléchi par le miroir sera parfaitement cylindrique. Mais si cela n'est pas (et jamais il n'a été construit un miroir aussi parfait), si ces rayons forment un cône dont l'angle

ne soit que d'un degré, il est facile de prouver qu'alors la quantité de lumière réfléchie que recevrait l'objectif du télescope prochain ne serait que $\frac{1}{1909}$ de celle qu'il reçoit directement de la flamme; ce qui peut être considéré comme rien. Ainsi les réverbères de lanternes qui peuvent avoir quelque utilité dans les rues pour des distances de 30 ou 40 pas, n'en ont aucune pour la télégraphie *) et, nous osons l'assurer positivement malgré le préjugé contraire, pour toute espèce de fanaux.

Le reste de la construction de nos lanternes vise à procurer aux flammes un courant d'air atmosphérique abondant, à empêcher par là la formation de la fumée, à tenir la lanterne propre, à empêcher le vent de s'introduire dans l'intérieur et à donner plus de brillant à la flamme *c*, *c*, *c*, etc. (fig. VII et VIII) sont 28 petits tuyaux de fer-blanc, ouverts pas les deux bouts placés au fond de la caisse autour des bougies, fournissant un accès libre à l'air extérieur sans lui permettre une entrée turbulente, quelque vent qu'il fasse. Ce courant d'air entoure les flammes régulièrement. Pour produire ce courant et empêcher en même tems le vent de s'introduire par en haut dans la lanterne, la caisse sera surmontée d'un cône creux *edde* et d'un cylindre *dddd* qui porte le petit ventilateur *HH* décrit par l'auteur avec sa théorie et ses nombreuses applications en 1793 dans un ouvrage particulier. Il est composé de deux cônes tronqués, dont l'inférieur *caac*, soudé au tuyau *dd*, a sa base supérieure ouverte, et le cône supérieur *bddc* a sa base supérieure fermée par une plaque plane. Celui-ci est porté par 8 plaques rhomboïdales comme *eogf*, de sorte que la base supérieure du cône inférieur et la base inférieure du cône supérieur se trouvent dans le même plan horizontal.

---

*) A Pétersbourg, le boulevart de l'Amirauté est éclairé, depuis quelques années, par des lanternes à réverbères d'une bien meilleure construction que les lanternes ordinaires. La mèche éclaire des deux côtes et fait par là l'effet d'une mèche double. Mais deux réverbères en forme de demi-cônes tronqués, placés un peu au-dessus de la flamme, un à chaque côté, enlèvent au ciel le lumière dont il n'a pas besoin et l'emploient au profit de la terre. Ce boulevart est la partie la mieux éclairée de tout Pétersbourg. L'auteur a exécuté une lanterne précisement de ce genre vers la fin du siècle dernier à Riga, à la maison du docteur Dyrsen où il logeait alors, tout près de la Stifts-Pforte.

Ces 8 plaques, qui ne s'étendent du dehors au dedans que sur $\frac{2}{3}$ de la longueur des cônes, partagent l'espace entre les cônes en 8 cases qui reçoivent le vent à l'extérieur, le concentrent vers l'intérieur et le laissent ressortir du côté opposé après avoir fait l'effet d'une pompe aspirante sur l'air contenu dans le cylindre *dd*, dans le cône *edde* et dans la caisse *AE*. L'air enlevé par ce ventilateur est remplacé par celui qui entre par les 28 tuyaux *c, c, c*. De fréquentes expériences ont prouvé que l'air ainsi renouvelé (dans des lanternes de voiture) produit une flamme brillante et sans fumée.

Le tuyau pour la bougie aura 18 lignes de diamètre et 17 pouces de longueur. La bougie aura 14 lignes de diamètre moyen et 7 pouces de longueur. La mèche sera composée de 24 fils qui, médiocrement tordus et pénétrés de cire, formeront un cylindre de 1,2 ligne de diamètre. Cette bougie brûlera environ 12 heures.

L'ouverture supérieure des tuyaux, celle par où passe la mèche, et qui offre à la chaleur de la flamme une surface de cire à fondre, devrait varier de diamètre selon les températures de l'air de la caisse de la lanterne. Mais comme cela n'est pas praticable, il faut faire varier la composition des bougies. Pendant les mois de mai, juin, juillet, août et septembre l'on brûlera des bougies de cire pure *); pendant les mois d'octobre et de novembre des bougies composées de 3 parties de cire et d'une partie de suif; pendant les mois de décembre, janvier et février de 2 parties de cire et d'une de suif; pendant les mois de mars et avril de 3 parties de cire et d'une de suif.

Enfin, il s'agit encore de suspendre les lanternes sans contrepoids et de manière à ce que leur support n'en couvre jamais les fenêtres dans aucune des 12 positions où les lanternes se trouvent relativement au volant. Il a déjà été dit plus haut qu'elles doivent faire bascule (bascule russe) au moyen d'un axe qui tourne dans un tuyau, et le problème est de placer ce tuyau de manière à remplir le but proposé.

---

*) Nous nommons cire pure celle des bonnes bougies de Pétersbourg.

*

A (fig. VI) est un angle de fer qui porte à son sommet le tuyau en question. Il est fixé comme on le voit en *A*, *B*, *C*. La figure X offre cet angle dessiné sur l'échelle de la lanterne. Cet angle est de 30° ou $\frac{1}{12}$ du cercle. Les barres de fer qui le composent ont en *g* deux lignes, et en *i* une ligne d'épaisseur et sur toute leur longueur 12 lignes de largeur. Elles se terminent en un cercle de fer *dddd* de même largeur et épaisseur, dans lequel est soudé à soudure forte le tuyau de laiton *eee* de $1\frac{1}{2}$ ligne à 2 lignes d'épaisseur, de 8 pouces de longueur et de $4\frac{1}{2}$ lignes de diamètre intérieur. *I* est le point où l'axe est fixé (à clous rivés et à soudure) à la lanterne, et l'on s'assure que dans aucune des 12 positions de la lanterne les barres *gi*, *gi* n'offusquent jamais les flammes, si l'on décrit du centre *I* (fig. VIII) l'angle *b'Id'* de 30° et un second *a'Ib'* égal au premier, par où l'on voit que la flamme ne remplit pas entièrement ces angles.

III. *Télescopes et leur emplacement.*

Il ne faut pas s'imaginer que tout télescope soit en tout point propre à la télégraphie, pourvu qu'il livre une amplification suffisante pour fournir à l'oeil une image du signe télégraphique. Il faut qu'il livre cette image dans les tems favorables avec le plus de clarté, de netteté et de lumière possible, en sorte que de légers brouillards ne mettent pas dans l'impossibilité de signaliser; ce qui est d'une importance majeure dans notre climat. Pour atteindre ce but, il faut avoir égard à deux choses, à la structure du télescope et à son emplacement.

Une description détaillée de cette structure est inutile; il suffit d'en indiquer les principales parties.

On donnera à l'objectif achromatique 36 pouces de distance focale, et 3 pouces de diamètre. L'oculaire sera une simple lentille biconcave, dont la distance focale est 1,2 pouce; ce qui constituera le télescope de Galilée dans sa plus grande simplicité, dont l'amplification sera 30. Il recevra sous ces dimensions une grande quantité de lumière et la transfèrera à l'oeil avec le moins de perte possible, n'ayant qu'un oculaire simple et extrêmement mince. Cette propriété est d'une importance majeure.

L'on a rejeté depuis longtems le télescope de Galilée pour tous les cas où l'on a besoin d'amplifications un peu considérables, au point qu'ils ne servent plus que pour les lorgnettes d'opéra, parce que leur champ (l'espace qu'ils offrent à l'oeil) est très petit pour de grandes amplifications. Mais ce défaut, très grave pour un télescope ordinaire (terrestre ou astronomique) devient une vertu pour le télescope télégraphique, en ce qu'il n'offre à l'observateur presque point d'objets qui puissent le distraire, ce qui est un très grand avantage; l'oeil s'accoutumant par là à ne voir que l'objet qu'il doit voir et le voyant par conséquent bien plus clairement, avantage qui se fera sentir surtout de nuit lorsque des étoiles se trouvent à proximité du télégraphe. Dans les expériences citées plus haut, le signe télégraphique occupait à peu près la moitié du champ du télescope, et l'on ne distinguait d'ailleurs aucun objet marquant. Il est même possible que deux télégraphes se trouvent presque en ligne droite avec un troisième; alors le télescope à grand champ recevra l'image des deux télégraphes à la fois. De jour, ce sera un petit inconvénient, le volant du second télégraphe étant à peine sensible à l'oeil; mais de nuit, et l'atmosphère étant claire, les flammes des lanternes du second télegraphe seront très visibles; et bien que la distance apparente de l'une à l'autre soit environ de moitié moindre que celle des lanternes du premier télégraphe, cependant le double jeu devra nécessairement jeter de l'incertitude dans les observations. Avec notre télescope, il suffira que les trois télescopes dévient de 20 pieds pour éviter totalement cet inconvénient, mais avec un télescope à grand champ la déviation nécessaire pourra monter à 100 pieds et plus; ce qui pourra forcer d'abandonner un poste d'ailleurs très favorable, par exemple une élévation dont le sommet n'aurait pas cette largeur. Or l'on sait quelles difficultés les ingénieurs éprouvent en cherchant des postes favorables pour une longue ligne télégraphique.

Des expériences ultérieures prouveront peut-être que l'on peut se servir de moindres amplifications que celle de 30, et si cela est, l'on doit se faire un devoir de les employer pour ammener une plus grande quantité de lumière à l'oeil.

Enfin, pour donner au télescope le dernier degré de perfection et de commodité; l'on munira l'oculaire d'un diaphragme non fixe, mais mobile, afin d'indiquer à l'oeil l'emplacement où il voit l'objet le plus clairement et dans le plus petit champ. Aucune précaution n'est minutieuse dans la solution d'un problème aussi compliqué que celui de la télégraphie, où un petit degré de visibilité de plus ou de moins rend cette solution possible ou impossible.

Notre télescope n'offre qu'un désavantage, une plus grande difficulté à l'orienter. Mais comme le télescope télégraphique, une fois braqué, a une position imperturbable, cette difficulté cesse. Au reste l'on pourra avoir un petit télescope chercheur qui s'adapte à tous les télescopes de la ligne pour fixer primitivement leur position.

Il serait superflu de vouloir décrire le mécanisme qui sert à donner au télescope ses mouvemens et à le fixer ensuite irrévocablement dans sa position, ces choses-là étant connues ou très faciles à imaginer.

Les circonstances qui ont rapport à *l'emplacement du télescope* sont également d'importance majeure, surtout dans notre climat. En hiver l'on ne peut ni ne doit exiger d'un homme, même d'un soldat russe, qu'il observe sans mouvement pendant 4 heures consécutives dans une chambre froide *). Que l'on n'objecte pas que l'astronome fait ses observations également dans un local non chauffé; car d'abord il est rare qu'il soit forcé à des observations de si longue haleine pendant les grands froids. Quand il ne peut plus y tenir il les interrompt pour les continuer le lendemain, ou pendant la même nuit, après qu'il s'est échauffé dans son cabinet chaud. L'observateur télégraphique par contre n'ose pas quitter une minute son télescope. L'astronome est animé, réchauffé intérieurement par son zèle pour la science et la gloire, le télegraphiste par rien que par la crainte du châtiment; et la crainte n'échauffe pas. En outre pendant les grands froids

*) Si l'on raccourcit ce terme, alors les rechanges se font d'autant plus souvent, et le télégraphiste n'a qu'un tems très court pour son sommeil, ce qui nuit à sa santé.

l'évaporation de l'oeil se précipite sur l'oculaire et le rend opaque. L'astronome a de règle le tems de le nettoyer, le télégraphiste pas; car ou une dépêche est en route ou bien il en attend une. Si le premier perd par là une observation, il la fait, soit la même nuit, soit la nuit suivante; personne ne lui en demande compte; le second au contraire perd son observation ou ralentit la marche de la dépêche et est soumis à responsabilité *).

Il est encore une circonstance qui influe fortement et désavantageusement sur la visibilité des objets de jour et au clair de lune; c'est la lumière diffuse qui entre dans le télescope en même tems que la lumière de l'objet. Elle diminue l'effet de la lumière du volant télégraphique, ou bien le contraste du noir du volant avec la lumière du ciel. En appliquant cet effet aux brouillards, nous trouvons que ce météore rend les observations difficiles non seulement en raison de son opacité, mais aussi en raison de la lumière diffuse très considérable qu'il envoie de tous côtés au télescope et qui, en se mêlant à l'impression de l'objet déjà affaiblie par l'opacité propre, finit par la rendre tout-à-fait insensible.

Ainsi notre problème actuel est d'un côté d'accorder aux télégraphistes le bienfait d'observer dans une chambre chaude en éliminant tous les inconvéniens qui pourraient en résulter, bienfait qui en sera un également pour la transmission des dépêches, et d'un autre côté écarter toute lumière diffuse, hors celle qui arrive parallèlement avec la lumière de l'objet ou parallèlement à l'axe du télescope.

La première partie de ce problème se résoud en plaçant l'observateur dans une chambre chaude et l'objectif dans un espace froid, de sorte qu'il n'y ait aucune communication entre les atmosphères de ces deux lieux. Cet arrangement n'est praticable qu'en télégraphie parce que le télescope a une position invariable. Il est impossible en astronomie parce que le télescope a une position variable.

Quant à la seconde, l'élimination de la lumière diffuse, il y a deux moyens d'y parvenir. Le premier est d'adapter au télescope, du côté de l'objectif, un tube

*) Nous passons sous silence le cas où l'on voudrait observer dans une chambre chaude au travers d'une fenêtre ouverte ou fermée. Une ignorance complète pourrait seule le proposer.

qui dépasse l'objectif d'un pied ou plus et bien noirci à l'intérieur. C'est celui que M. le professeur Struve a adapté au grand réfracteur de Frauenhofer de l'observatoire de Dorpat, le seul applicable à un télescope astronomique qui doit balayer toute la coupole visible du ciel. Mais ce moyen est encore imparfait; car il est connu que les surfaces noires, qu'elles soient lisses ou non, réfléchissent cependant une portion notable de lumière, surtout si les angles d'inclinaison sont petits. Nous pourrions en appeler là-dessus au témoignage des peintres, si nous n'avions pas les expériences directes de Bouguer faites sur du marbre noir imparfaitement poli, d'après lesquelles ce marbre, sous une inclinaison de 15°, réfléchissait presque $\frac{1}{6}$ de la lumière incidente et sous un angle de 3°. 35′ précisément $\frac{3}{5}$.

La seconde méthode d'éloigner la lumière diffuse de l'objectif du télescope, celle que nous proposons, est spécialement applicable aux télescopes télégraphiques, qui ne changent jamais de position. Elle consiste à placer l'objectif dans une paroi d'une chambre peinte en noir le plus foncé et d'adapter à la paroi opposée un diaphragme qui ouvre à la lumière un accès libre dans la direction du télescope, diaphragme qui n'aura pour ouverture qu'un cercle d'un diamètre de deux lignes plus grand que l'aperture de l'objectif.

La figure IX (planche II) offre le remède aux deux inconvéniens que nous voulons écarter. La *maison du télégraphe* n'est autre chose qu'une chambre de 24 à 26 pieds en carré, chauffée comme une chambre ordinaire, à laquelle les deux petites chambres froides et noires *G* et *G* sont attenantes, chacune ayant 6 pieds de longueur et $4\frac{1}{2}$ de largeur. *A* ou *B* est le télescope, dans la grande chambre chaude. Son objectif passe par un trou pratiqué dans la paroi et fermé hermétiquement lorsque le télescope est fixé invariablement dans sa position. *dd* est le diaphragme en laiton vissé sur une ouverture *ff* pratiquée dans la paroi opposée. Il est inutile d'appliquer des calculs minutieux à prouver qu'au moyen de cet arrangement la quantité de lumière diffuse qui pourra arriver par réflexion à l'objectif du télescope peut être considérée absolument comme nulle, et que l'on n'est obrué que de celle qui lui parvient directement par le diaphragme, lumière qu'il est impossible déliminer sans éliminer en même tems celle de l'objet à observer.

L'objectif du télescope empêchera en hiver les vapeurs, qui pourraient s'introduire dans la chambre noire, de se précipiter sur lui à raison de la température un peu plus élevée que le métal du corps du télescope (plongé dans l'atmosphère de la chambre chaude) lui amènera. Pendant les autres saisons, on éloignera ces vapeurs de l'objectif (qui par leur précipitation y feraient l'effet d'un brouillard), en plaçant à droite et à gauche, au-dessus et au-dessous de l'objectif quatre petites assiettes chargées chacune d'environ une livre de chaux vive et l'on recouvrira le tout d'une boîte en fer blanc qui aura un trou un peu plus grand que l'objectif. On renouvellera la chaux tous les mois pendant les saisons humides et tous les deux mois pendant les saisons sèches. La porte *P*, qui ne laisse passer aucune lumière et le moins d'air possible, servira à ces changemens et à tout ce que l'on pourrait d'ailleurs avoir à faire dans cette chambre *).

IV. Emplacement des observateurs.

La place de l'observateur est naturellement devant l'oculaire du télescope, où se trouve une chaise ronde *q* montée sur un axe vissé dans le disque d'un trépied, pour lui donner la hauteur, qui convient le mieux à l'observateur relativement à sa taille. Un dossier fixe, adapté à la circonférence de ce même disque, permettra à l'observateur de s'appuyer dans les instans où son oeil n'est pas fixé au télescope.

Mais cela ne suffit pas: il faut que l'observateur soit de jour et de nuit dans l'obscurité, afin que son oeil ait la plus grande sensibilité pour apercevoir les signaux qui, pendant de légers brouillards, seraient invisibles, si l'oeil n'était pas soustrait à toute autre lumière. Quiconque a fait des expériences sur la phos-

*) Pour fermer l'accès des vapeurs de la chambre chaude dans l'intérieur du télescope, on lutera l'oculaire à son diaphragme, comme cela a déjà lieu ordinairement. Mais comme ces vapeurs pourraient s'introduire entre le tuyau de l'oculaire et celui de l'objectif, on couvrira leur jonction d'un tuyau très mince de résine élastique fortement ficelé à ses deux bouts, et assez long pour céder aux mouvemens nécessaires pour avancer ou reculer le tube oculaire.

phorescence des corps par insolation ou par de faibles degrés de chaleur, où il s'agit de s'apercevoir des plus faibles degrés de lumière qui émanent des corps ainsi traités, saura apprécier les avantages incroyables de cette isolation de l'oeil de l'observateur. Le professeur Placide Heinrich à Ratisbonne a rempli deux volumes in-quarto de ces intéressantes observations sur presque tous les corps connus, et assure n'avoir dû les grands succès de ces observations qu'aux soins presque minutieux qu'il employait pour éliminer absolument de sa vue toute lumière, hors celle qu'il voulait observer.

L'on obtiendra cette isolation si utile de l'oeil de l'observateur en l'entourant de deux côtés par les armoires *op*, *op* où les télégraphistes serrent leurs effets et qui se joignent au plafond, et en peignant en noir les surfaces X, X^{I}, X^{II}, X^{III}, X^{IV}, X^{V}, X^{VI}. Les trois fenêtres de la chambre, de même que le chandelier *z* du télégraphe, sont disposées de sorte qu'elles ne peuvent envoyer aucune lumière directe à l'observateur, qui ne recevra que la lumière faiblement réfléchie des parois fortement noircies. Au cas où l'on préférerait un autre arrangement des meubles des télégraphistes, de simples parois en planches remplaceraient les armoires.

V. Mécanisme pour les mouvemens du télégraphe.

ABBA (fig. 1 pl. I) est la maison du télégraphe, de 24 à 26 pieds en carré intérieurement, *BDDB* son toit en forme de pyramide. *DD* est un disque massif en bois, percé à son milieu pour recevoir l'arbre vertical *GF*, sur lequel est planté le télégraphe et qui est calfeutré de même qu'à la hauteur du plancher *BB*, pour ôter toute communication de l'air intérieur avec l'extérieur. *HK* est une barre de fer forgé, qui porte le signe télégraphique que nous avons nommé *volant*. Elle a 3 pouces en carré à sa base et 2 pouces à sa partie supérieure. Là est fixée à vis une tringle de fer *ee* (fig. II) surmontée de deux montans *ec*, *ec* et soutenue par deux supports *df*, *df* fixés à un renflement *dd* de la barre. C'est sur ces deux montans que repose l'axe *II* qui fait mouvoir le volant *LL* fixé à une de ces extrémités. Cet axe a 4 pieds $1\frac{1}{2}$ pouce de longueur sur $1\frac{1}{2}$

pouce d'écarrissage. A son autre extrémité est la poulie *ab* de 18 pouces de diamètre intérieur, qui porte la chaîne *aa* qui perce dans l'intérieur du bâtiment où elle est reçue par une seconde poulie exactement de même diamètre.

L'arbre vertical porte par un boulon *C* sur une pierre *EE* posée sur un fondement, afin qu'on puisse lui donner la direction qu'il doit avoir. Pour cet effet, il est percé d'un trou *KO* dans lequel on place une barre, qui sert de levier pour tourner l'arbre. Cela étant fait, on perce un trou *h* à la hauteur du plafond dans deux solives de traverse pratiquées tout près de l'arbre. Un boulon à vis passé dans ce trou qui traverse aussi l'arbre, fixe celui-ci dans la position qu'il doit avoir. Le disque *DD* a deux trous *h'* opposés qui ne pénètrent qu'à 4 pouces de profondeur pour recevoir deux boulons à vis qui augmenteront la solidité de la position de l'arbre.

Le volant, après avoir été équilibré par une plaque de fer fondu vissée à son petit bout, est vissé sur l'extrémité de l'axe et assujetti par une virole carrée de fer *nn*, munie de 4 bras *nm*, *nm* que l'on voit tous quatre à la figure VI. Ces quatre bras ont le double avantage de donner au signe une assiette invariable, et de le renforcer à moitié de la longueur de chaque moitié contre le vent. Au reste ce dernier avantage peut être considéré comme superflu. Car si l'on donne au volant 2 pouces d'épaisseur il résistera, d'après les expériences de Barlow, sans appui, à 7 fois l'effort d'un ouragan de 150 pieds de vitesse par seconde, vitesse qui surpasse tout ce que l'on a observé jusqu'à ce jour.

Comme l'on pourrait douter, que la grande barre de fer *HK* pût résister au vent dont l'effort peut se porter perpendiculairement sur le volant, calculons la force résistante de cette barre. La surface du volant est de $19\frac{1}{2}$ pieds carrés, et l'effet d'un ouragan de 150 pieds de vitesse sur un pied carré de surface est de 33 ℔. Donc l'effort entier sera $643\frac{1}{2}$ ℔. D'après les expériences de Brown il faudrait une force de 1872 ℔, appliquée horizontalement à son bout supérieur pour la rompre, dans la supposition qu'elle fût de fonte. Donc cette barre, comme elle est de fer forgé, et parconséquent plus fléxible, offrira une résistance plus que triple que la force de l'ouragan le plus impétueux.

*

La figure V (pl. 1) montre comment s'opère le mouvement du volant. La partie inférieure *rspt* de l'arbre est carrée et entourée d'une caisse de planches qui peut monter et descendre le long de l'arbre et y être arrêtée par la vis *ug* fixée par sa tête au crampon *xzy* et par ses pas dans le crampon *vtq* à une hauteur arbitraire. A cette caisse est fixé le disque de bois *oo* par 4 verges de fer *lnm*. Ce disque et la caisse portent ensemble l'axe de la poulie embrassée par la chaîne. Le même axe porte un index qui tourne avec lui, parcourant un limbe de laiton *aa* assujetti sur 6 petits cylindres de bois *oa*, *oa*, etc. *) limbe qui porte une double division en 12 parties égales dont les chiffres de l'une vont en sens contraire de l'autre, comme on le voit aux figures I et IV, à la dernière desquelles une partie du limbe est dessinée sur $\frac{1}{9}$ de grandeur naturelle, de sorte que chacune des 12 divisions aura $6\frac{1}{4}$ pouces de longueur. Un levier à deux manches *gg*, fixé à l'axe, imprime le mouvement à la poulie inférieure et à l'index, et au moyen de la chaîne, à la poulie supérieure et au volant.

La chaîne de Vaucanson, qui a conservé sa célébrité jusqu'à nos jours, n'offre pas le degré requis de sûreté et d'exactitude. Celle de notre télégraphe, faite de laiton fondu, sera comme moulée dans les creux pratiqués dans les poulies. Nous lui donnons la forme exprimée à la figure V qui offre deux chaînons à moitié de grandeur naturelle. Les moules pratiqués dans les gorges des poulies doivent avoir assez de profondeur pour que les cylindres *aa*, *aa* s'y enfoncent de tout leur diamètre et les boules *b*, *b* de tout leur rayon plus celui des cylindres. D'après ces dimensions 14 chaînons engrèneront dans la moitié de la circonférence d'une poulie. Il serait aussi long, que fastidieux de décrire les procédés à suivre pour donner à l'engrenage de la chaîne dans ses moules toute l'exactitude requise.

---

*) La construction sera un peu plus simple si l'on place la poulie derrière le disque de bois, et le limbe immédiatement sur le disque. Seulement il faudra augmenter de *oa* la distance du disque à la caisse, afin que la chaîne descende perpendiculairement. Ce changement procurera l'avantage de pouvoir donner des supports à cette poulie comme à la supérieure.

Les deux poulies sont en fer fondu de l'espèce molle, qui se travaille aisément avec des outils tranchants, afin d'enlever facilement et nettement les aspérités que la fonte laisserait dans les moules de la chaîne, aspérités qui useraient la chaine trop vîte. Elles sont composées chacune de trois plaques dont celle du milieu a 1 pouce 2 lignes d'épaisseur, sur la circonférence de laquelle se trouvent les moules de la chaîne tels qu'ils ont été décrits plus haut; les deux autres plaques sont des zones de 4 pouces de largeur et ont 4 lignes d'épaisseur avec un rayon d'un demi pouce de plus que celui de la plaque du milieu, à laquelle elles sont fixées par 12 vis à écrou. Cette construction facilitera la confection des moules et leur réparation. Nous croyons pouvoir assurer positivement que cette construction des poulies, des limbes et des chaînes offre une sûreté parfaite pour livrer les signaux, et qu'un télégraphiste un peu exercé ne commettra pas d'erreurs d'un degré, erreur qui peut être considérée comme nulle sur un arc de 30 degrés. Car d'un côté il est impossible que la chaîne glisse dans la gorge des poulies, et d'un autre côté, un degré correspondant sur les limbes ayant une longueur de $2\frac{1}{2}$ lignes, le télégraphiste ne peut pas s'égarer d'autant dans la position de l'index.

Malgré le poids de toutes les pièces mobiles de ce télégraphe, les mouvemens se feront avec la plus grande facilité, comme le petit calcul suivant le prouve.

D'après les dimensions ci-dessus la planche du volant pèsera . .	152 ℔
Les quatre bras de fer qui la soutiennent	54
L'axe de fer qui porte le volant et la poulie	40
La chaine de laiton	43
Chaque poulie 184 ℔, les deux avec l'axe de l'inférieure	380
Total des masses à mouvoir	669

Or le frottement des axes peut s'évaluer au plus à $\frac{1}{5}$ du poids total, ce qui fait 134 ℔, et la proportion moyenne des diamètres des axes à celui du levier aux points où les mains le saisissent est 1 : 30. Donc la force à employer au levier est égale à 4, 5 , auxquelles il faut ajouter encore environ $\frac{1}{2}$ pour les frottemens sur les axes des chaînons; ce qui fera en tout une force d'environ 5 livres.

La vis *ug*, décrite déjà plus haut, sert à tendre et à détendre la chaîne à raison des températures. L'auteur ayant observé à Riga en $\frac{1799}{1800}$ une température de 33° R. au-dessous de zéro (le mercure gelait) et l'été suivant 30° R. au-dessus de zéro, l'on doit compter sur la possibilité d'une variation de température de 64°. Or le coefficient d'extension pour 80° R. étant, selon Smeaton 0,001875, et la chaîne du télégraphe ayant environ $22\frac{1}{4}$ pieds de demi-longueur, l'extension pour les 64° est égale à 4,7664 ou $4\frac{3}{4}$ lignes, longueur qui suffira pour fixer l'étendue de la marche de la vis *ug* de tension, d'autant plus qu'environ $\frac{1}{8}$ de la longueur de la chaîne se trouve toujours dans une température modérée.

Nous avons encore à faire voir comment on peut empêcher l'eau de pluie et la neige de pénétrer par la chaine dans la maison télégraphique.

Dabord nous couvrons la poulie *ab* (fig. II) d'un couvercle de tole *cxyze* qui éloigne la pluie de cette poulie. Puis on fixera à son bord intérieur de chaque côté un tuyau *rpqs* de fort fer-blanc de 2 pouces de diamètre, qui entoureront les deux branches de la chaîne jusques au toit, où ils seront fixés à demeure, au dessus de deux trous *c*, *c* (fig. XI) percés dans la couverture du toit. Ces tuyaux seront soutenus par les deux bras de fer *mn*, *mn*, vissés à la tige *HK* qui porte tout le télégraphe, et en troisième lieu, au bord du petit toit de tôle *ln n'l'* qui couvre le sommet du toit. Pour donner le dernier degré de solidité à ces tuyaux on les joindra l'un à l'autre par deux traverses aux points *n* et *n*, qui consisteront en de simples tuyaux de fer-blanc d'un pouce de diamètre. L'on donnera à la partie inférieure des tuyaux *rpqs*, là où ils couvrent le bas du volant la couleur du côté homologue du volant; de même aux traverses. Le reste sera noir. Il en sera de même du couvercle *sxyze*.

VI. Déviation des stations.

Il a déjà été question de l'angle, que peuvent faire les directions de deux télégraphes avec le troisième. La figure IX (pl. II) offre un pareil angle *aCb*, dont le supplément est *bCa'*. Si le télégraphe se trouvait dans la position où il est

dessiné (comme la plus favorable pour être observé dans la direction aC) et dût être observé dans la même position, mais dans la direction bC, il perdrait en visibilité en proportion du cosinus de l'angle bCa *).

Soit cet angle $= 15°$, son cosinus sera 0,9659 et la perte $\frac{1}{29}$ de la visibilité totale. Si l'on place le télégraphe dans une position fixe moyenne entre bC et $a'C$, alors l'angle nuisible ne sera plus que de $7\frac{1}{2}°$, dont le cosinus est 0,9914 et parconséquent la perte $\frac{1}{117}$, perte que l'on peut considérer comme nulle. Si l'angle est de 30°, et le télégraphe fixé dans la direction moyenne, la perte est, comme nous venons de le voir, $\frac{1}{29}$, perte qui commence à n'être plus à négliger, et nous ne pouvons pas conseiller d'aller à plus de 40°, la perte étant déjà entre $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{17}$. Soient par exemple a et k (fig. XII, pl. II) les extrêmes d'une ligne télégraphique dont les postes sont $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k,$ où nous avons placé le volant du télégraphe dans une direction moyenne, qui coupe les angles en deux parties égales; l'on voit au coup d'oeil que les positions moyennes en b, c, d, e, f, g n'excèdent pas le maximum, qui vient d'être fixé, mais que ce maximum l'est aux postes h et i. Si donc ces postes supposés d'ailleurs avantageux, de même que les autres, ne pouvaient cependant pas être admis relativement aux directions, il faudrait ou établir deux télégraphes proches l'un de l'autre à chacun de ces postes, ou changer les autres postes, ce qui nécessiterait ordinairement l'établissement d'un ou peut-être de deux postes de plus. Or ces cas doivent être prévus et prévenus.

*) Nous disons en proportion du cosinus simple et non du carré du cosinus, comme on l'admet d'ailleurs, parce que l'on suppose que la lumière arrive à l'objet dans une direction parallèle à celle de l'objet à l'oeil de l'observateur. En fait de télégraphie l'on doit supposer, que l'objet est éclairé en tout sens également, par ce qu'il faut admettre que la lumière lui vient de tous les points du ciel et non dans une seule direction. Lorsque le ciel est sans nuages et le volant du télégraphe éclairé par les rayons immédiats du soleil, c'est un surcroît bien venu de lumière sur lequel on ne doit pas compter. Cette considération est pour le cas où le volant doit être vû par la lumière qu'il réfléchit. Dans le cas, où il est noir et parconséquent visible uniquement par le contraste avec la lumière du ciel ou de la neige, il est évident que sa visibilité est en raison de sa largeur apparente.

Nous avons fixé la largeur de notre télégraphe à 18 pouces. C'est pour les cas où les directions de deux stations voisines ne diffèrent que de très peu l'une de l'autre, et il a été déjà dit que la face du télégraphe doit être placée de manière à ce qu'elle partage l'angle en deux parties égales, comme on le voit à la fig. XII. Par là, le défaut provenant de l'obliquité du volant se trouve partagé entre les deux stations également et est réduite à la moitié. Mais pour faire évanouir le défaut de visibilité, il suffira d'augmenter la largeur du volant en proportion du cosinus de l'angle d'obliquité au rayon. Ainsi, si cet angle mesure 15 degrés, l'on augmentera la largeur du volant de $\frac{1}{29}$, c'est-à-dire de 0,65 de pouce; si l'angle mesure 20 degrés, l'augmentation sera $\frac{1}{16}$ ou $\frac{1}{8}$ pouce. Si l'angle d'obliquité allait jusqu'à 33 degrés, l'augmentation se monterait à 2, 9 pouces. Ce dernier cas, où l'angle d'obliquité est de 33 degrés, et par conséquent l'angle de déviation de 66 degrés, aura lieu très rarement. Même si ce dernier angle allait à 90° (cas qui n'aura jamais lieu) l'augmentation de largeur n'irait pas tout-à-fait à $3\frac{1}{2}$ pouces. Au reste, ces augmentations ne sont entendues que du corps du volant; la partie inférieure, qui a en longueur le triple de la largeur recevra une augmentation triple en longueur, mais aucune en hauteur, et cette triple augmentation sera répartie également sur les deux extrémités.

Ainsi notre volant apparaîtra au télégraphiste-observateur de chaque côté toujours sous les mêmes dimensions, à l'augmentation apparente près qu'il reçoit par son épaisseur. Ainsi, dans tous les cas où il sera éclairé comme objet blanc par la lumière diffuse du ciel, il conservera le même degré de visibilité, comme nous l'avons vu à la note précédente, et c'est sur ces cas, où la lumière a le moins d'intensité, que tout doit être calculé.

Si la largeur du volant doit varier selon ses degrés d'obliquité, la largeur des lanternes et de leurs fenêtres le devra de même, afin que l'on puisse voir les trois flammes lorsqu'elles seront nécessaires. Alors elles ne se projetteront plus entièrement l'une sur l'autre, mais se déploieront en largeur, plus ou moins, offrant cependant jusqu'à un angle de déviation de 38 degrés un noyau plus ou moins

large, composé d'une lumière d'abord triple et enfin double, bordé d'une lumière simple. Au-delà de cette limite l'image des flammes se séparera et ne produira jamais au télescope qu'une seule image plus ou moins large.

Nous avions imaginé dans le principe un mécanisme simple pour tourner le télégraphe de quelques degrés vers la direction du poste qui envoie les dépêches, non sans quelque désavantage pour le poste qui reçoit, ce désavantage nous paraissant peu important parce que le télégraphiste qui envoie la dépêche la reconnaît facilement lorsque le télégraphe suivant la répète. Mais après avoir calculé le peu de perte que l'obliquité du volant cause et nous être aperçu que cette perte se compense en augmentant la largeur du volant et des lanternes, dans chaque cas donné, d'une très petite quantité, nous avons totalement abandonné cette idée.

Nous n'entrons pas dans les détails du choix des postes télégraphiques, nous contentant de faire observer que l'on doit choisir, autant que possible, des points élevés, non seulement pour voir à de grandes distances, mais aussi pour atteindre une région au-dessus des exhalaisons inférieures des terrains marécageux. Il n'est guère possible de donner des règles générales là-dessus, tout dépendant de la conformation du terrain, dont il faut abandonner l'heureux emploi à la sagacité des ingénieurs chargés de trouver les points où les postes seront placés.

Au reste, si nous nous chargions de trouver les points les plus favorables pour ces postes sur une longue ligne télégraphique, nous opérerions de la manière suivante:

Nous prendrions une bonne carte géographique de la ligne et la ferions copier sur une échelle double ou triple ou quadruple pour pouvoir y dessiner nombre de points intermédiaires. Puis, en partant du premier poste, nous observerions les points les plus élevés, qui se présentent à l'horizon à une distance de 5 à 6 werstes à droite et à gauche de la ligne droite, qui joint les deux points extrêmes de la ligne entière, dont la position est donnée par la carte, et nous noterions leur direction relativement à cette ligne au moyen d'une bonne boussole.

Comme il ne s'agit pas ici d'une grande exactitude, les distances se mesureraient au moyen d'un odomètre adapté à une très légère calèche capable d'aller sur les plus mauvais chemins. Dans les cas où la route dévierait considérablement, l'on noterait la distance et la grandeur de l'angle au point de déviation pour estimer la vraie distance. Ainsi les distances des points observés seraient données.

Nous mesurerions les différences de hauteur de ces points au moyen du baromètre, parmi lesquels nous choisirions celui qui offre des points élevés les plus proches de la ligne télégraphique. Ce point étant déterminé, nous le considérerions comme un second point de départ et opérerions comme pour le premier, et ainsi de suite jusqu'au bout de la ligne.

Au retour on répéterait toute l'opération pour prendre les moyennes pour les distances et hauteurs vraies, et cela en toute sûreté; car nous avons, quant à l'exactitude, une latitude de 8 à 12 werstes. La carte étant ainsi formée et les hauteurs relatives des points notés y étant marqués, l'on verra d'un coup-d'oeil si, en construisant des bâtimens d'une certaine hauteur, l'on pourrait faire l'épargne d'un ou deux postes en s'élevant au-dessus d'un obstacle dont la hauteur relative aurait été mesurée.

VII. Tactique des opérations télégraphiques.

1) Seront continuellement à leur poste un *opérateur,* qui exécute les signaux, un *observateur* à chaque télescope, et un *écrivain* qui tient registre de tous les signaux et note l'heure et la minute à laquelle chaque dépêche est arrivée, de même que les retards qui peuvent avoir eu lieu pendant le signalement. Chacune de ces fonctions aura deux fonctionnaires qui se relèveront de veille en veille de 4 heures, ce qui fait 6 veilles par jour, dont 3 seront actives, 2 destinées au sommeil et au repas et une à quelque travail manuel au choix de chacun, y compris la cuisine pour toute la petite colonie, qui se fera à rechange.

2) Chacun des 8 télégraphistes sera exercé aux trois espèces de fonctions pour que, au cas de maladie, ils puissent prendre alternativement la place du malade jusqu'à

sa guérison ou l'arrivée de son successeur s'il vient à mourir. En outre, on changera les rôles de semaine en semaine, non seulement pour entretenir chacun dans l'exercice des trois genres de fonctions, mais aussi pour partager la fatigue, qui est bien moindre pour l'écrivain et l'opérateur que pour l'observateur, dont les yeux s'affaibliraient dans peu s'ils étaient forcés à une activité de 12 heures chaque jour de l'année. Le rechange par contre fera que les observateurs auront pour chaque semaine d'activité une semaine de répit *).

---

*) Nous ignorons quel est le nombre de télégraphistes employés en France à chaque télégraphe; nous ne connaissons aucun ouvrage qui en ait instruit le public. Mais nous avons appris que M. Chateau ne statue, pour la ligne de Pétersbourg à Varsovie, qu'un seul télégraphiste, qui doit mouvoir le télégraphe et observer en avant et en arrière; peut-être doit-il aussi écrire le journal. Cette méthode a plusieurs inconvéniens.

Le premier est le défaut de sûreté; car il est certain qu'un homme, devant partager son attention à trois objets dans un si court espace de tems, est forcé d'en accorder moins à chacun; ce qui est d'autant plus sujet à erreur que les observations des signaux en arrière et en avant sont inverses l'une de l'autre dans le sens de droite à gauche. Les erreurs d'observation et même de signalement doivent donc s'accumuler. Ajoutons à cela que les cas très fréquens dans notre climat, où l'observation sera difficile à cause de l'opacité de l'air, exigent une grande énergie d'attention pour observer avec sûreté et que, dans tous ces cas, l'on doit s'attendre à de nombreuses erreurs, importantes surtout dans le système cryptographique que M. Chateau veut donner à la Russie.

Le second désavantage est la lenteur des opérations; car il est clair, que si le même télégraphiste doit observer le signe qu'il reçoit, l'exécuter et observer si son suivant l'a bien répété, toute l'expédition doit durer plus long-tems que si ces trois opérations se faisaient par trois personnes. Aussi les télégraphes de M. Chateau ne livrent que 2 signaux par minute, tandis que nous prouverons tout à l'heure que notre télégraphe en livre 4 en toute sûreté pendant les tems défavorables et 6 pendant les tems favorables. L'on objectera peut-être qu'il est assez indifférent qu'une dépêche portée à 1000 werstes arrive en 40 minutes ou en 120, une heure de plus ou de moins sur des distances aussi étendues n'étant pas d'importance. Nous sommes de cet avis pour la plupart des dépêches en tems de paix; par contre en tems de guerre, une heure de retard peut être très importante. Mais il y a plus: supposons que l'atmosphère soit assez favorable au départ d'une dépêche et que, au bout d'une demi heure, il se soit formé un brouillard, qui couvre l'atmosphère de plusieurs stations. Voilà la dépêche arrêtée pour un tems indéfini, s'il a fallu plus d'une demi heure pour la transmettre.

Enfin la considération de la conservation de la vue des télégraphistes doit entrer pour beaucoup dans le choix du système. Dans celui de M. Chateau l'on statue trois télégraphistes qui se relèvent. Ainsi chacun travaille 8 heures par jour, mais doublement quant aux yeux; de sorte que leurs yeux travaillent autant que s'ils n'avaient qu'une observation simple pendant 16 heures. On peut même assurer que les deux observations, qui se succèdent dans un si court espace de tems, fatiguent l'oeil davantage que s'il ne faisait que la même observation pendant le même tems, parce qu'en quittant une

*

3) La *position d'arrêt* du volant est celle qui est dessinée à la figure 1 (pl. I).

4) Le télégraphe d'où la dépêche doit partir donne le *signal d'activité* en balançant le signe de chaque côté sur deux divisions, de X à II, jusqu'à ce que l'observateur ait vu que le télégraphe suivant commence à répéter ce signal d'activité. Alors l'opérateur du premier télégraphe arrête le volant au point qu'indique le chiffre du premier signal à transmettre. A chaque télégraphe suivant on en fait de même.

5) Lorsqu'un signal doit être répété deux fois de suite (*signal de répétition*), comme par exemple pour deux *n* ou deux *s*, l'opérateur ne reculera de chaque côté, que d'un signe ou 30 degrés pour revenir sur le champ au premier.

6) Dans des cas urgens (et ces cas seront indiqués plus bas) le signal d'activité, nommé alors *signal d'urgence* consistera en un mouvement rotatoire, rapide et continu du volant, jusqu'à ce que le télescope suivant commence à répéter ce signal.

7) A la fin d'une dépêche l'opérateur mettra le volant en *position d'arrêt.*

8) Le mouvement du volant se fera avec une vitesse d'environ 3 pieds par seconde à son extrémité. Cette lenteur de mouvement a pour but de ne produire qu'une petite force tangentielle, afin que l'opérateur puisse arrêter le volant avec

---

observation, l'oeil se détend en quelque sorte pendant le mouvement du télégraphe et se tend de nouveau pour la seconde. Et puis l'oeil de ce télégraphiste n'a pas comme le nôtre sur deux semaines une semaine de repos.

Enfin nous nous demandons: Par quelle raison accumule-t-on trois opérations sur un seul sujet? Evidemment pour diminuer le nombre des télégraphistes à entretenir. Voyons donc à quoi se monte cette épargne.

D'après ce que nous avons pu apprendre du système de M. Chateau, le nombre moyen des télégraphistes pour chaque poste est de six. Supposons donc une ligne de 100 postes, ce sera 600 télégraphistes qu'il faudra. Dans notre système il en faut 800. Mais notre système compte en nombre moyen au moins 10 werstes par station, et celui de M. Chateau au plus 8 werstes, par conséquent 20 télégraphes de plus. Ainsi le nombre de ses 600 télégraphistes doit être multiplié par $\frac{10}{8}$; ce qui fait 750. Ainsi le gain de son côté est de 50 hommes sur 800, c'est-à-dire $\frac{1}{16}$. Or l'entretien annuel de 20 télégraphes avec les batimens de plus et la consommation des bougies, qui dans le système de M. Chateau est double de celle du nôtre sur toute la ligne télégraphique, compenseront sûrement les frais d'entretien de 50 hommes. Quelle raison reste-t-il donc de s'exposer à tous les inconvéniens qui viennent d'être cités?

facilité au point prescrit. Or, comme l'opérateur le fera marcher tantôt à droite, tantôt à gauche selon la proximité du signal à donner, il n'aura jamais à faire une marche de plus d'un demi-cercle, qui a à l'extrémité du volant 15, 7 pieds. Donc la durée moyenne de l'exécution d'un signal sera de 2,6 secondes, soit 3 secondes. Le tems nécessaire à l'observateur pour voir le signal avec sûreté soit de 3 secondes (l'auteur n'en avait besoin que de 2). Ainsi un signal sera exécuté et vu en terme moyen en 6 secondes. Mais comme le même signal, que le second télégraphe répète, doit être vu du poste avant qu'il doive faire le signal suivant, il faut ajouter encore 3 secondes pour cette observation, ce qui fait en tout 9 secondes pour le tems que dure le signalement entier d'un chiffre. Ajoutons gratuitement encore une seconde, et nous sommes sûrs que notre télégraphe pourra signaliser 6 chiffres dans une minute *).

Ainsi notre télégraphe, exécuté sur 100 postes, livrera le premier chiffre en $16\frac{2}{3}$ minutes au dernier poste et les autres chiffres suivront avec la même vitesse. Supposons donc que nous ayons à signaler la dépêche citée au commencement de ce mémoire, qui a 115 chiffres, chacun d'eux arrivera en 10 secondes de station en station pendant la marche des précédens; ce qui fait 1150 secondes ou 19 min. 10 sec., qui, ajoutées aux 16 min. 40 sec. précédentes, font 35 min. 50 sec., soit 36 minutes pour tout le tems qu'il faut à une dépêche de 115 chiffres pour faire un chemin de 100 stations télégraphiques, c'est-à-dire pour arriver à environ 1000 werstes.

Au reste, ce calcul suppose un état moyen de perlucidité de l'atmosphère à peu-près tel que nous l'avions dans nos expériences à Dorpat en septembre, et à Tchesmé en février. Quand l'état de l'atmosphère sera défavorable, il faudra un peu plus de tems pour observer avec toute sûreté, et il peut arriver que l'on ne puisse signaler que 4 chiffres dans une minute, mais sûrement jamais moins.

*) Il faut observer, que dans ce calcul du tems nous avons supposé que l'observateur n'observe qu'après que le signal a été exécuté; mais comme son oeil ne quitte pas le télescope, mais suit les mouvemens du volant, le tems de l'exécution sert déjà à l'observation après laquelle il suffit d'une seconde pour observer le repos; mais nous en donnons 3 pour augmenter la sûreté de l'observation.

9) Chaque observateur sera toujours assis devant son télescope pour épier l'arrivée des dépêches. Afin de ne pas trop fatiguer un de ses yeux, il observera des deux alternativement pour laisser reposer l'un tandis que l'autre est en activité. L'auteur, qui, à cause de la grande différence de distance visuelle de ses deux yeux, ne peut plus travailler (lire et dessiner) qu'avec un oeil à la fois, sent plus que personne le grand avantage du rechange.

10) Dès que l'observateur verra le signal d'activité exécuté par le télégraphe prochain, il en avertira l'opérateur, qui commencera à l'instant même son travail. Si c'est le signal ordinaire, l'observateur criera: *activité.* Si c'est l'extraordinaire il criera: *urgence.*

11) Si pendant qu'on signale dans une direction il survient une dépêche du côté opposé (ce qui ne peut avoir lieu que pendant que le premier chiffre de la première dépêche marche vers le bout opposé de la ligne) l'observateur de l'autre direction en avertira l'écrivain en criant: *Dépèche opposée*, qui en prendra note à part et écrira les chiffres qui arrivent de ce côté. Pendant cet intervalle la première dépêche continuera à être transmise. Celle-ci étant terminée, le télégraphe où les deux dépèches se sont croisées signalisera tous les chiffres reçus de la seconde dépêche et continuera son travail pour tous les chiffres qui suivront. Cela suppose, que lorsque l'extrêmité de la ligne télégraphique *ad quam* a reçu le premier chiffre de l'extrémité *a qua,* elle cesse tout signalement, et ne continue sa dépêche, que là, où elle l'a laissée à l'arrivée du premier chiffre de l'extrémité *a qua.* Ou bien, pour éviter toute confusion possible, elle recommencera à signaler toute sa dépêche.

12) L'écrivain tient registre de tous les signaux, de leur direction et du moment où le premier et dernier signal sont arrivés. Pour cet effet la pendule se trouve près de lui à portée de sa vue. Il serrera chaque dépêche dans la caisse des papiers, dont lui seul aura la clé et remettra ces journaux à l'officier d'inspection. Chaque journal de dépêches qui viennent d'un côté sera à part, celles qui viennent

de l'autre également. Les feuilles couvertes de carrés où les chiffres sont inscrits, auront pour les deux côtés un signe à part.

13) Il y aura à portée de l'écrivain le cordon d'une cloche placée hors du bâtiment, et dont le son soit facilement entendu à 3 werstes du télégraphe, pour appeler tous les télégraphistes qui seraient sortis, un peu avant le moment où ils doivent fonctionner.

14) Pour 8 postes télégraphiques il y aura un *officier d'inspection* du grade de lieutenant, qui sera tenu de visiter ses postes deux fois par semaine pour s'assurer que tout est et se fait en ordre. Il règlera chaque semaine les rôles des télégraphistes, et emportera les journaux de chaque télégraphe signés de l'écrivain, pour les confronter et en expédier copie par ses collègues aux chefs de la ligne résidants à ses extrêmités, avec un rapport sur l'état où il aura trouvé ses postes. Une de ces visites hebdomadaires se fera à l'improviste; l'autre à des jours réglés *).

15) Un des télégraphistes de chaque poste aura l'inspection sur ce poste. Cet inspecteur sera au choix et à la responsabilité du lieutenant d'inspection.

16) A chaque bout de la ligne télégraphique sera un *inspecteur général* de la ligne du rang de major, dont les devoirs seront:

a) De tenir registre des dépêches qu'il expédie avec la date, l'heure et la minute de leur expédition.

b) De faire faire copie des dépêches qu'il reçoit.

c) D'envoyer les uns et les autres à Pétersbourg (centre de toutes les opérations télégraphiques) au *au chef de l'état-major*, ou, en tems de guerre, au *chef de l'armée.*

d) De visiter tous ses postes au moins deux fois l'année dans les tems où ses autres occupations le lui permettront.

e) De soigner l'approvisionnement de tout genre pour la moitié de la ligne.

---

*) Au reste il n'est pas probable, que les officiers surprennent leurs télégraphistes, qui sûrement seront assez fins pour concerter entre eux un signe d'avertissement pour s'annoncer l'arrivée de l'officier. Mais enfin l'on ordonne le mieux; se fasse ce qui pourra.

Pour toutes les écritures cet inspecteur général aura un ou deux copistes à proportion de la longueur de la ligne.

17) Près du chef de l'état-major ou du chef de l'armée sera un employé particulier pour chiffrer et déchiffrer les dépêches. Il aura un copiste qui l'assistera.

VIII. *Local et économie d'un poste télégraphique.*

Le physicien ne doit pas dédaigner de s'occuper de ces sortes d'objets, la réussite de ses meilleures conceptions en dépendant très souvent. La table II est spécialement vouée à la partie économique et au local.

La maison du télégraphe doit-être en même tems le logement de tous les télégraphistes, afin qu'ils soient toujours à portée d'entrer à l'instant en fonction et d'être éveillés au besoin lorsque le tems de leurs veilles actives approche. Cette maison, qui n'est autre chose qu'une chambre de 24 à 26 pieds en carré, contient néanmoins tout ce qu'il faut à cet égard.

Le *télégraphe* est au centre, *les telescopes* à deux côtés opposés avec leurs chambres noires, de sorte que les observateurs soient à même d'être entendus par l'opérateur et l'écrivain. Celui-ci travaille à sa *table* devant la fenêtre, qui tient le milieu de ce côté de la chambre. A ses côtés sont, *la pendule* avec la face tournée vers lui, *le coffre* qui contient ses papiers et la *caisse commune* dont l'usage sera indiqué plus bas. Dans la moitié opposée de la chambre sont 8 lits pour les télégraphistes, placés aux deux côtés de la porte. Trois *fenêtres* de 3 pieds de largeur et de 7 pieds de hauteur éclaireront suffisamment la chambre et le limbe du télégraphe. Quatre *armoires* entourent de deux côtés le siége de chaque observateur, de sorte que ni les fenêtres, ni la bougie de l'écrivain, ni celle du chandelier à charnières *nxyz* de l'opérateur ne puissent éclairer cet espace. Chacune de ces armoires contient l'habillement et le linge d'un télégraphiste, et ses armes s'il est soldat. *Deux poëles* placés à deux coins les plus éloignés du télégraphe chaufferont la chambre entière (il n'en faut pas moins, cette chambre étant exposée à tous les vents), et surtout la contrée où les télégraphistes seront

occupés à leur vocation. On leur donnera la propriété de ne produire aucune fumée, afin que le volant du télégraphe n'en soit pas souillé *).

La maison économique, de même grandeur que celle du télégraphe, contient

1) La chambre *K* du télégraphiste desservant, où il se tiendra tandis que le service du télégraphe n'exigera pas sa présence dans l'autre maison, une table à manger pour 4 télégraphistes à la fois, une armoire pour le linge, et ce qui sert au service de la table, un lit de malade avec sa table de nuit et un lit pour le domestique de l'officier.

2) La chambre *L* de l'officier avec les meubles indiqués, afin qu'il puisse au besoin y passer une nuit et y travailler.

3) La cuisine *M* avec son foyer, et au-dessous un four pour cuire le pain (si le gouvernement ne fournit pas le pain en nature) une table, deux tablettes et un tonneau d'eau.

4) Le garde-manger *N* et la cave au-dessous avec les meubles indiqués et l'escalier de la cave.

L'on parviendra sous les toits des deux bâtimens au moyen d'une échelle et d'une trappe pratiquée dans le plafond.

Il faut un puits à chaque station, que l'on creusera le plus à proximité que possible.

Enfin il faut pourvoir à un cas possible d'incendie. Des pompes ne pourraient être fournies de l'eau nécessaire par un seul puits et par 8 hommes, la station se trouvant de règle sur le point le plus élevé de la contrée, de sorte que l'on se trouvera pour le moment borné au tonneau d'eau de la cuisine. Les torches pour

---

*) Si contre les principes que nous avons posés, on voulait absolument s'exposer aux nombreux inconvéniens qui résultent de la concentration des deux observations, du maniement du télégraphe et de la tenue du journal dans la personne d'un seul télégraphiste, alors on placera les chambres noires *G*, *G* dans l'intérieur de la chambre, leur donnant la position *VVZZ*, *VVZZ* et un peu plus de longueur. La place du seul observateur sera en *U* et le télégraphe sera rapproché de lui. Pour regagner la place perdue l'on donnera à la chambre du côté de *ZVVZ* une augmentation de 6 pieds en longueur et de l'autre côté une diminution de 5 pieds. Le reste des appartenances se règlera là-dessus.

les incendies que l'auteur a inventées il y a 35 ans sont les seuls instrumens, qui puissent se contenter d'une si petite quantité d'eau. On en trouve la déscription dans le journal de physique de Voigt de ce tems-là. Il suffit de dire que, au moyen de ces torches, l'on peut éteindre 500 pieds carrés de surface de bois brûlant avec 30 livres d'eau ou 1 wedro. (Le wedro pèse presque 31½ ℔ d'eau).

La cour est fermée par deux haies en planches ou par un fossé avec un parapet. Sur le derrière est une écurie pour les deux chevaux de l'officier d'inspection.

Au milieu de la cour on placera un paratonnerre sur un arbre de 60 pieds de hauteur au-dessus de terre, meuble d'autant plus nécessaire, que le poste est plus élevé et isolé. La barre a 5 pieds de hauteur, et est surmontée d'une pointe de platine. Le dessin indique la manière de garantir la partie sous terre de l'arbre, de 8 pieds de profondeur, dans un puits couvert d'un petit toit qui laisse entrer librement l'air dans l'intérieur. Le conducteur vissé à la barre est prolongé jusque sous terre.

Mais comme à de pareilles expositions l'on trouve rarement un terrain assez humide pour disperser l'électricité de la foudre, l'on rassemblera les eaux des toits des deux bâtimens dans deux canaux souterrains *IO, IO* murés avec du ciment hydraulique, qui amèneront le long d'une pente de 6 pieds sur 24 ces eaux aux trois branches de l'extrémité du conducteur, d'où elles se partageront dans le terrain adjacent. La partie souterraine du conducteur se trouvera enfouie tout simplement dans la terre, et ses trois pointes aboutiront au confluent des deux canaux. L'auteur a exécuté cette espèce d'arrosement souterrain en 1805 pour le paratonnerre du théâtre anatomique de Dorpat, dont le terrain n'est que de gravier. Dix-huit ans après il fit découvrir au fort de l'été les 3 branches de la barre conductrice, et en trouva le gravier adjacent parfaitement humide et le métal cependant très bien conservé.

Tel est l'arrangement, que nous proposons pour les cas où la maison du télégraphe n'aura besoin que d'un étage; alors il sera à conseiller de placer la partie économique à part, comme nous l'avons fait, pour diminuer le danger du feu pour

le télégraphe. Pour les cas où il faudra s'élever à de plus grandes hauteurs à cause d'une forêt ou d'une colline, le bâtiment aura plusieurs étages, dans lesquels on distribuera les appartenances le plus commodément possible. Mais alors on placera sur la barre, qui porte le télégraphe une barre de paratonnerre de 10 pieds de hauteur, qui dépassera le volant télégraphique au moins de 5 pieds. Au pied de la première de ces barres sera fixé le conducteur, dont la partie inférieure sera enfoncée en terre et arrosée de la manière que nous venons de décrire.

Nous n'entrons pas dans les détails de l'arrangement des appartenances économiques pour les cas où l'on aura besoin de deux, trois ou quatre étages pour atteindre la hauteur nécessaire, mais nous nous contentons d'ajouter quelques observations touchant le service du télégraphe et les employés.

Il a été question plus haut d'un *signe d'urgence*, et c'est ici le moment d'en parler, parce qu'il tient à un arrangement économique. Les cas où l'on fera usage de ce signe auront lieu en tems de guerre ou dans d'autres circonstances semblables, qui exigeront que les dépêches parviennent le plus vite possible et à tout prix à leur destination. Or il peut arriver dans ces tems d'urgence qu'une contrée sur la ligne télégraphique se couvre par des circonstances locales d'un brouillard impénétrable à la lumière télégraphique sur une étendue de plusieurs stations, ce qui arrêterait complètement la marche de la dépêche ou la retarderait peut-être de plusieurs jours. Pour ces cas-là et *seulement dans les tems d'urgence* il y aura à chaque station un relais de deux chevaux et un domestique pour les servir. Celui-ci trouvera son logement et son lit (lit du desservant) dans la chambre *K*, et ceux-là dans une seconde écurie. Ce relai sera employé de la manière suivante: Dès qu'un poste recevra le premier chiffre d'une dépêche dans un tems où il sera impossible de la transmettre plus loin, l'écrivain l'écrira en deux exemplaires et le chef du poste ordonnera sur le champ au domestique d'atteler promptement les chevaux au chariot ou au traîneau. Alors dès que la dépêche sera complète, l'écrivain la remettra dans une poche de cuir au domestique pour la transporter avec la plus grande célérité au poste prochain, qui la transmettra avec la même

célérité au poste suivant, celui-ci de même, etc. jusqu'au premier poste où la transmission télégraphique sera possible. Pour cet effet, dès que l'on s'apercevra à un poste que les opérations sont impossibles de côté ou d'autre, le valet harnachera ses chevaux, et mettra son équipage hors du hangard pour atteler dans le plus court tems possible, dès qu'il arrivera une dépêche, et annoncera de plus loin que possible son arrivée au poste suivant par le son d'un cor de chasse, qui se trouvera toujours dans l'équipage, pour ne pas être oublié. De cette manière les dépêches arriveront à leur destination avec une vitesse presque double de celle des couriers ordinaires.

La fonction de télégraphiste est une fonction très peinible, quoiqu'elle n'en ait pas l'air. L'isolation loin des demeures des hommes, l'ennui qui nait d'une si grande uniformité d'activité, la fatigue des yeux, l'attention forcée et continue à être toujours prêt au service, la responsabilité, tout concourt à rendre la vocation télégraphique très pénible. Il est donc juste de tâcher de l'adoucir autant que possible. Voici quelques propositions auxquelles tout gouvernement, qui veut être bien servi dans un emploi où tout dépend du zèle des coopérateurs, peut souscrire:

a) On construira à chaque poste une troisième écurie dans laquelle la petite colonie entretiendra deux vaches à ses frais pour se procurer du lait.

b) On adjugera un petit canton de pâturage pour ces deux vaches.

c) On donnera un espace de terrain proportionné pour un jardin potager que les télégraphistes cultiveront eux-mêmes afin de se procurer surtout des choux pour l'été et l'hiver. Quelques pommiers et cerisiers augmenteront l'agrément de ce jardin.

d) Chaque télégraphiste recevra, outre son traitement de soldat un paiment journalier de 25 ou 50 copecs, dont la moitié lui sera délivrée pour servir en commun (en russe: *artel*) à se procurer plus d'aisance dans la nourriture, et l'autre moitié sera déposée dans la *caisse commune* sous le nom de chaque télégraphiste. Si au bout de l'année l'artel a fait des épargnes elle seront partagées en parties égales et déposées à la caisse commune.

e) Le service du télégraphe sera censé service militaire: mais les télégraphistes ne seront tenus qu'à un service de 10 ans. Si après ces 10 ans ils veulent s'engager à un nouveau terme de 10 ans, ils le pourront. Dès qu'ils quitteront le service, au premier ou au second terme, on délivrera à chacun son petit capital accumulé dans la caisse commune, pour en jouir en homme libre (comme le soldat après sa capitulation échue) où il voudra. S'il meurt avant ses 10 ans révolus, la somme qui lui revient sera délivrée à sa famille. Pour cet effet il sera déposé dans la caisse commune une feuille pour chaque télégraphiste qui contiendra le nom et la demeure de sa famille, sur laquelle il peut ajouter ses intentions touchant l'emploi de cette somme et nommer un héritier particulier, à l'exception de toute fondation pieuse.

f) Les télégraphistes ne seront pas soumis aux punitions corporelles, mais on punira les fautes par des retranchemens d'une semaine de cette moitié de la paye qui est destinée à la cuisine journalière, et l'artel ne les laissera pas prendre part à ses repas, en ne lui accordant que son traitement militaire. Il est à la vérité à prévoir que l'artel n'exercera guères cette sévérité; mais comme alors les fautes d'un seul retomberont sur les 8, ce sera l'artel entier qui sera puni, et ce sera un motif d'engager les négligens à se corriger; ce qui constitue la meilleure police imaginable.

g) Si un télégraphiste manque à son devoir trois fois dans une semaine, il sera renvoyé à son régiment en lui payant le capital qui lui revient de la caisse commune. Si un télégraphiste s'adonne à la boisson, il sera renvoyé au régiment avec perte de son capital, qui sera partagé à tous les postes de la ligne, et non uniquement entre les 7 autres télégraphistes du poste, afin qu'ils ne soient pas tentés par intérêt d'inculper à faux un camarade.

h) Les sentences, qui condamnent un télégraphiste à être renvoyé ne peuvent pas être portées, comme les autres, par l'officier de révision seul; mais il faut l'assentiment d'au moins trois des camarades non coupables. Dans le cas où un accusé aurait 4 voix en sa faveur, l'officier d'inspection en fera rapport à son major

qui nommera deux autres officiers pour examiner la chose, et faire rapport à celui-ci, qui donnera la décision.

i) Près du 16e, 32e, 48e, etc. poste seront des maisons contenant chacune le logement de deux officiers d'inspection avec toutes les commodités nécessaires pour eux et leurs familles, avec deux jardins potagers et fruitiers et un bosquet pour leur récréation. On réunira ainsi deux logemens pour que leurs habitans jouïssent de l'agrément de quelque société.

k) Le poste du milieu entre deux maisons sera celui où les officiers des deux côtés se rencontreront à des jours, et des heures fixes pour échanger leurs dépêches.

l) Le gouvernement accordera à l'officier d'inspection le triple de ses apointemens de lieutenant.

m) Cet officier avancera en grade, comme s'il était à l'armée et conservera le triple des appointemens de son rang jusqu'au grade de capitaine inclusivement.

n) Outre les denchtchiks (desservants soldats) dûs à son rang il en aura un en sus pour ses courses.

o) Si, devenu major, il veut rester officier télégraphique, ses appointemens n'augmenteront plus.

p) Le gouvernement lui fournira deux chevaux avec leur fourage, un équipage d'été et un d'hiver et une somme fixe pour les réparations. Les chevaux et les équipages seront renouvelés tous les 10 ans. Les chevaux et les équipages réformés appartiendront à l'officier.

q) Les deux inspecteurs généraux percevront le triple de leurs appointemens de major, avanceront en grade, comme s'ils servaient à l'armée et jouiront des appointemens triples des grades supérieurs jusqu'à celui de colonel inclusivement. S'ils veulent servir plus long-tems près des télégraphes, leurs appointemens n'augmenteront plus. Le gouvernement leur accordera pour leurs voyages 4 chevaux avec leur fourage et les équipages, et une somme fixe pour les réparations. La remonte des uns et des autres aura lieu tous les 10 ans. Les chevaux et équipages réformés leur appartiendront.

IX. *Du télégraphe de M. Chateau.*

Ce télégraphe est apparemment le même dont il a paru une annonce dans une feuille publique de France en 1832. En voici la construction autant que nous avons pu nous en instruire:

1) Le volant a en tout 8 pieds de longueur et 5 à 6 pouces de largeur, ainsi à peu près la même proportion que le télégraphe de Chappe. Son gros bout est un carré d'environ 22 pouces, construit en forme de jalousies.

Observations. Ce volant a donc, d'après les principes que nous avons posés, beaucoup moins de largeur qu'il ne faut pour sa longueur. Si par contre cette largeur est suffisante pour offrir au télescope une image bien distincte, le gros bout a une surface beaucoup plus grande qu'il ne faut. Une surface de 16 pouces de longueur et 5 à 6 pouces de largeur lui suffirait. En outre nous avons prouvé que la construction en jalousies n'a aucune utilité, et M. Chateau paraît l'avoir senti, puisque le reste de son volant, la partie étroite, celle qui a le plus besoin d'apparence est une surface unie. Cette contradiction est d'autant plus frappante que M. Chateau paroit avoir voulu égaliser la surface du gros bout avec celle de la partie étroite.

Il paraît que M. Chateau n'a pas saisi la raison pourquoi Chappe a donné si peu de largeur à son télégraphe. C'était évidemment pour avoir de plus petites masses à mouvoir; car des masses d'un poids triple auraient apporté de grandes difficultés dans l'exécution du mouvement.

Nous ne connaissons pas la construction du *télescope* que M. Chateau a employée. Le télescope qui nous a servi aux expériences nous ont convaincu que, lors d'une transparence moyenne de l'atmosphère, l'image de notre télégraphe était bien nette à une distance de 10 w. et était encore sensible par une forte bouffée de neige à la même distance. Nous pouvons donc considérer la proportion de la largeur de notre

volant à ce pouvoir du télescope, comme une proportion dont on ne devrait pas s'écarter considérablement.

Or en supposant la largeur de notre volant = 18 pouces, la distance entre les deux postes télégraphiques = 10 w. (distance moyenne que nous avons statuée pour notre télégraphe) la proportion de la largeur de l'objectif à la distance des points d'observation sera = 1 : 22000. Pour le télégraphe de M. Chateau, dont la largeur soit $5\frac{1}{2}$ pouces et la distance moyenne des postes = 8 w. cette proportion est = 1:57600. Donc la visibilité (purement optique) si elle doit être égale de part et d'autre, suppose dans le télescope de M. Chateau une amplification bien plus que double de celle de notre télescope, la proportion de $2\frac{6}{10}$ à 1. Donc l'amplification de celui de M. Chateau doit être de 78 au lieu de 30, si l'objet doit être vu sans le même angle visuel de $8\frac{1}{4}$ secondes. Or comme la quantité de lumière diminue dans deux télescopes de même structure en raison des carrés des amplifications, il faut en conclure que le télescope de M. Chateau n'enverrait à l'oeil de l'observateur que $(\frac{30}{78})^2$ ou environ $\frac{1}{8}$ de la lumière que l'objet réfléchit à l'oeil armé de notre télescope.

Par contre les stations moyennes du télégraphe de M. Chateau ne sont que de 8 werstes et les nôtres de 10 w.; ce qui donne à celui-là un avantage sur celui-ci. Mais les télescopes terrestres ordinaires (télescopes de Rheita) ont par contre 4 lentilles convexes dans le tube de l'oculaire, dont chacune soustrait à l'oeil une quantité notable de lumière, tandis que le nôtre (télescope de Galilée) n'a qu'une lentille ocuaire concave qui absorbe moins de lumière qu'une lentille convexe. Supposant donc que cet avantage ne compense pas entièrement l'effet de l'opacité d'une couche d'air de 2 werstes, l'on peut toujours admettre qu'à 10 werstes de distance notre télescope, combiné avec notre télégraphe, fournira à l'oeil une masse de lumière 5 à 6 fois plus grande

que le télescope de M. Chateau combiné avec son télégraphe n'en fournira à 8 w. de distance; et nous avons encore en sus l'avantage de l'écartement de la lumière diffuse bien plus parfait que dans le télégraphe de M. Chateau et isolément de l'observateur, impossible dans la manoeuvre proposée par cet ingénieur-télégraphiste. Ainsi lorsqu'un brouillard, une pluie, une chute de neige, arrêteront $\frac{5}{6}$ de la lumière, qui arrive au télescope par un tems clair, l'on observera dans notre télégraphe à 10 werstes de distance au moins avec la même sûreté que dans le télégraphe de M. Chateau par un tems clair à 8 w. de distance.

2) M. Chateau donne une couleur noire aux volans de tous ses télégraphes, comme la couleur qui se profile avec le plus d'avantage sur le ciel, et cherche autant que possible des positions où ce profilement peut avoir lieu. Dans tous les autres cas où cela ne peut se faire sans gêner le choix des postes qui doit être le plus libre que possible (le terrain offrant d'ailleurs assez de difficultés dans ce choix) alors le télégraphe de M. Chateau n'est plus un télégraphe simple et libre comme le nôtre; mais il est double; il en faut deux à chaque poste, dont chacun se profile sur une des faces peintes en blanc du bâtiment.

Observations. Cette complication de deux télégraphes est certainement un défaut. Le nôtre est toujours simple et libre parce que sa couleur se règle sur le fond, sur lequel il se profile. La couleur foncée du fond relève d'autant plus le blanc du volant que celui-ci est bordé d'une bande de noir qui dessine parfaitement la figure à l'oeil de l'observateur, et l'on sent qu'il est plus facile et moins couteux d'entretenir la couleur d'un volant du blanc le plus brillant que la surface de deux côtés du bâtiment. L'expérience prouve décidément en notre faveur. M. Chateau est forcé de réduire à 6 werstes sa station télégraphique pour tous ces cas, tandis qu'à Dorpat nous observions avec toute sûreté notre télégraphe à une distance de 10 w., dont le volant se profilait sur des objets terrestres. Bien plus, nous avons observé après le coucher

du soleil (entre chien et loup), lorsque M. Pauker avait cru devoir allumer déjà les lanternes pour commencer le signalement de nuit, non seulement les trois flammes simples des lanternes très distinctement mais aussi le volant lui-même encore très bien dessiné. C'est sur cette expérience importante que nous fondons l'opinion que, moyennant trois bougies dans chaque lanterne il sera possible d'observer aux lanternes même de jour lorsqu'un brouillard empêchera de voir distinctement le volant.

3) Lorsque deux stations ne sont pas en ligne droite, M. Chateau diminue l'éloignement ordinaire qui est de 8 w., apparemment à cause de l'obliquité du volant aux deux directions. Il évite tous les angles de direction au-delà de 15 degrés, autant que possible. Pour les cas où de plus grandes obliquités sont inévitables (cas qui a lieu deux fois sur la petite ligne de Pétersbourg à Cronstadt) M. Chateau établit très près de chaque poste deux petits *télégraphes répétiteurs*.

Observations. Voilà donc une seconde cause qui force M. Chateau de diminuer la longueur des stations. Dans notre système télégraphique ces deux causes n'existent pas. Nous n'avons pas besoin de raccourcir nos stations et moins encore de télégraphes répétiteurs.

4) La distance moyenne entre deux postes (la station) est de 8 werstes dans le système télégraphique de M. Chateau, et il existera, comme nous venons de le voir des cas très fréquens (lorsque le télégraphe se profile sur des objets terrestres et lorsque les directions de 2 stations feront un angle de plus de 15 degrés) où cette distance devra être réduite à 6 w.

Observations. Dans notre système, la station moyenne est de 10 w. Cette différence n'offre pes seulement l'avantage de gagner deux stations sur dix; mais elle nous en offre un nouveau relativement au relief du terrain. L'on aura peut-être souvent le cas où une élévation du terrain, ou bien une grande forêt s'étendent comme une lisière entre deux points qui pourraient servir de postes et empêchent la vision d'un de ces points

à l'autre. Il faudra donc faire un détour, qui offrira un angle de direction de plus de 15°. Si la distance de la station a qua, au point ou le monticule ou bien la forêt cessent d'avoir une hauteur nuisible, dépasse 6 werstes, il faudra deux postes, au lieu que si cette distance est de 10 werstes, un seul poste suffira. Il en est de même au reveré du monticule.

5) M. Chateau donne à ses lanternes des réverbères perpendiculaires.

Observations. Nous avons prouvé que les réverbères n'ont ici aucune utilits et par contre l'inconvénient de forcer à donner 6 lanternes pour chaque télégraphe, tandis que trois de nos lanternes sans réverbères suffisent, parce qu'elles éclairent également de chaque côté. L'on épargne parconséquent la moitié des frais d'entretien, qui se monteront à environ 1 Rbl. par jour pour chaque tétégraphe à 3 lanternes, et parconséquent annuellement à 36500 R. pour 100 de nos télégraphes de M. Chateau*), dont les bougies (tout d'ailleurs étant égal) ne fourniront pas une lumière aussi vive que celle des nôtres, parce que les lanternes de M. Chateau n'ont pas de ventilateurs et sont en outre beaucoup plus volumineuses. De plus, malgré ce grand volume, elles ne sont pas optées à recevoir trois bougies pour les cas urgens où de légers brouillards empêcheraient l'expédition si l'on n'avait que deux bougies.

6) Le mécanisme de M. Chateau pour mouvoir le volant de ses télégraphes libres, c'est-à-dire de ceux qui se profilent sur le ciel (celui des autres ne nous est pas connu) consiste en une manivelle fixée à l'axe du volant et en une bielle

*) L'on objectera peut-être que le gouvernement n'occupera pas les télégraphes pendant chaque nuit. Fort bien; mais il faut cependant que les bougies soient allumées toutes les nuits; car si on vouloit ne les faire allumer que chaque fois qu'une dépêche arrive, l'on perdrait au moins 3 minutes par télégraphe ou 5 heures sur 100 postes; et (ce qui est bien plus important encore) au bout de quelques heures il peut s'établir un brouillard qui rendrait toute observation et par conséquent toute expédition de dépêches peut-être pendant plusieurs jours impossible. Il faut saisir tous les momens de tems favorable, surtout dans un pays où les tems défavorables sont si fréquens.

(perche ou latte) adaptée au bout de cette manivelle. Le télégraphiste en saisit le bout inférieur et le place sur les 8 points cardinaux d'un disque circulaire, homologues aux 8 positions du volant.

Observations. Ce mécanisme est simple et peu couteux, mais il a deux défauts. Le premier est d'offrir de la difficulté dans le mouvement lorsqu'il faut partir des deux points (l'inférieur et le supérieur) qui sont dans la verticale du centre de mouvement, pour placer le volant dans une autre position. Cette difficulté exige un plus grand emploi de force et produit des saccades dans le mouvement. En outre le poids de la bielle se trouve tantôt favorable et tantôt contraire au mouvement, selon qu'elle doit monter ou descendre, et contribue à le rendre inégal, et augmente la difficulté d'arrêter le volant à la position prescrite *). Le second inconvénient de ce mécanisme est qu'il exige dans le toit et le plafond du bâtiment une ouverture considérable pour le jeu de la bielle, ouverture qui permet à la pluie, à la neige et au vent de s'introduire dans le bâtiment, rend le chauffage presque inutile et expose les télégraphistes aux intempéries de l'air. Notre mécanisme à deux poulies avec une chaîne est à la vérité beaucoup plus couteux, mais il se meut par une force constante, produit un mouvement uniforme, et met les télégraphistes à l'abri des intempéries de l'air. Si M. Chateau voulait renfermer sa manivelle et sa bielle dans une caisse pour soustraire l'intérieur du bâtiment aux influences atmosphériques, la largeur de cette caisse serait de beaucoup plus grande, que la largeur de son volant et en couvrirait plus de la moitié de la longueur dans les positions verticales.

7) Le télégraphe de M. Chateau ne livre que 2 signaux par minute.

Observations. Le nôtre en livre 6 lorsque le tems est tant soit peu favorable et 4 lorsque le tems est très défavorable. Prenons 5 pour nombre moyen

*) Au reste, le poids de la bielle peut se compenser par un contrepoids égal. Nous ignorons si cela a eu lieu.

(ce qui est réellement trop peu) et la fréquence des signaux sera $2\frac{1}{2}$ fois aussi grande, que dans le système de M. Chateau. Si nous ajoutons à cela que le nombre de nos télégraphes pour la même ligne n'est que $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de ceux de M. Chateau, la proportion de la vitesse avec laquelle une dépêche arrive à son but dans mon système et dans celui de M. Chateau sera presque de $3\frac{1}{3}$ à 1. Nous ne voulons pas appuyer sur ce qu'il n'est pas indifférent pour la marche des affaires qu'une dépêche, qui n'exigerait qu'une heure pour arriver, par exemple de Pétersbourg à Varsovie par nos télégraphes, exigera 3 heures et 18 minutes par ceux de M. Chateau, nous retournons à la considération des brouillards, dont il peut s'en établir un dans le surplus de 2 heures et 18 minutes qui arrêterait l'expédition pour un tems illimité.

Les causes, qui motivent cette grande lenteur d'expédition dans le système de M. Chateau sont probablement son mécanisme, dont nous avons fait voir les défauts, la réunion de deux observations, de l'exécution du signal et de l'écriture du journal sur un seul télégraphiste, la difficulté de distinguer avec sûreté les signaux d'un volant si étroit et la manoeuvre des télégraphes répétiteurs.

8) Le système de M. Chateau n'admet que 8 positions de son télégraphe. D'où il suit, que dans le chiffre alphabétique ces 8 signaux ne suffiront pas pour représenter toutes les lettres de l'alphabet nécessaires, et que plusieurs devront être représentées par deux signes. Quant à la méthode cryptographique, nous avons déjà vu, que dans le système de 8 signes l'on aurait 1300 mots à exprimer par 4 signes de plus que dans le système de 12 signes. Ainsi le tems nécessaire pour transférer une dépêche, de même pour la chiffrer et la déchiffrer, sera plus long dans le système de 8 que dans celui de 12 signes.

9) Enfin la partie administrative du système de M. Chateau nous paraît avoir le défaut d'exiger trop d'employés. Voici le tableau comparatif des employés nécessaires pour la ligne de Pétersbourg à Varsovie.

Selon M. Chateau:		*Selon nous:*	
Administrateur	1	Inspecteurs généraux	2
Inspecteur général	1		
Directeurs	6		
Sous-directeurs	6		
Inspecteurs divisionnaires	14	Officiers d'inspection	14
	28		16

Nous avouons ne pas concevoir à quoi peuvent servir les 6 directeurs et les 6 sous-directeurs, nos deux inspecteurs généraux, chacun à un bout de la ligne, peuvent facilement suffire à tout. Plus on multiplie les rouages de l'administration, plus elle s'embrouille et l'état paye de grands frais ou solde très mal ses employés, et tant de monde étant responsable personne ne l'est en effet. Peu de travailleurs, mais bien payés: telle doit être la maxime de l'administration.

Pour balancer les avantages nombreux de notre système télégraphique celui de M. Chateau n'en offre qu'un seul: le moins de frais qu'exige la construction des machines télégraphiques. Examinons la chose de près. La nôtre, le tout évalué aux plus hauts prix de Pétersbourg, coutera 527 roubles, soit 600 roubles. Celle de M. Chateau peut être évaluée au quart, soit 150 r. Le gain sera donc de 450 r. par machine et parconséquent de 45000 r. pour 100 machines. Mais dans notre système nous avons sur 100 postes 20 postes de moins que dans le système de M. Chateau. Soient donc les frais d'un bâtiment télégraphique moyen qui aurait de un à cinq étages (M. Chateau prévoit que l'on sera obligé de donner à plusieurs bâtimens une hauteur, qui ira jusqu'à 70 pieds) seulement de 3000 r. et les frais de sa machine télégraphique 150 r., en tout 3150 r., les 20 postes de moins produiraient en frais de construction une épargne de 63000 r. pour les 45000 que nos machines télégraphiques couteraint de plus.

Nous avons indiqué plus haut, que les frais d'entretien annuel de 50 hommes de plus sur 100 postes dans notre système sont compensés par l'avantage économique de nos lanternes sur celles de M. Chateau. Le calcul en est facile: Nous avons déjà vu, que les frais des bougies pour les 6 lanternes de 100 télégraphes de M. Chateau s'élèveront annuellement à 73000 r. Dans notre système il ne faut, pour la même distance, que 80 postes à 3 lanternes, ce qui coutera 29200 r. Ainsi l'épargne serait de 43800 r. Or l'entretien d'un télégraphiste, c'est-à-dire sa nourriture et paye de soldat, son habillement et ½ r. de gratification par jour ne se monteront sûrement pas à 500 r. (pour ce prix on trouverait des milliers d'hommes libres très intelligens) et pour les 50 télégraphistes à 25000 r. Donc nous aurions dans notre système une épargne annuelle de 18800 r., dont une petite partie couvrira les frais des deux bougies de plus dans nos lanternes, que l'on n'allumerait que dans quelques cas extraordinaires et urgens.

Ainsi, notre système télégraphique loin d'être plus couteux, soit pour l'établissement primitif, soit pour l'entretien, il offre des épargnes pour l'un et pour l'autre sur celui de M. Chateau.

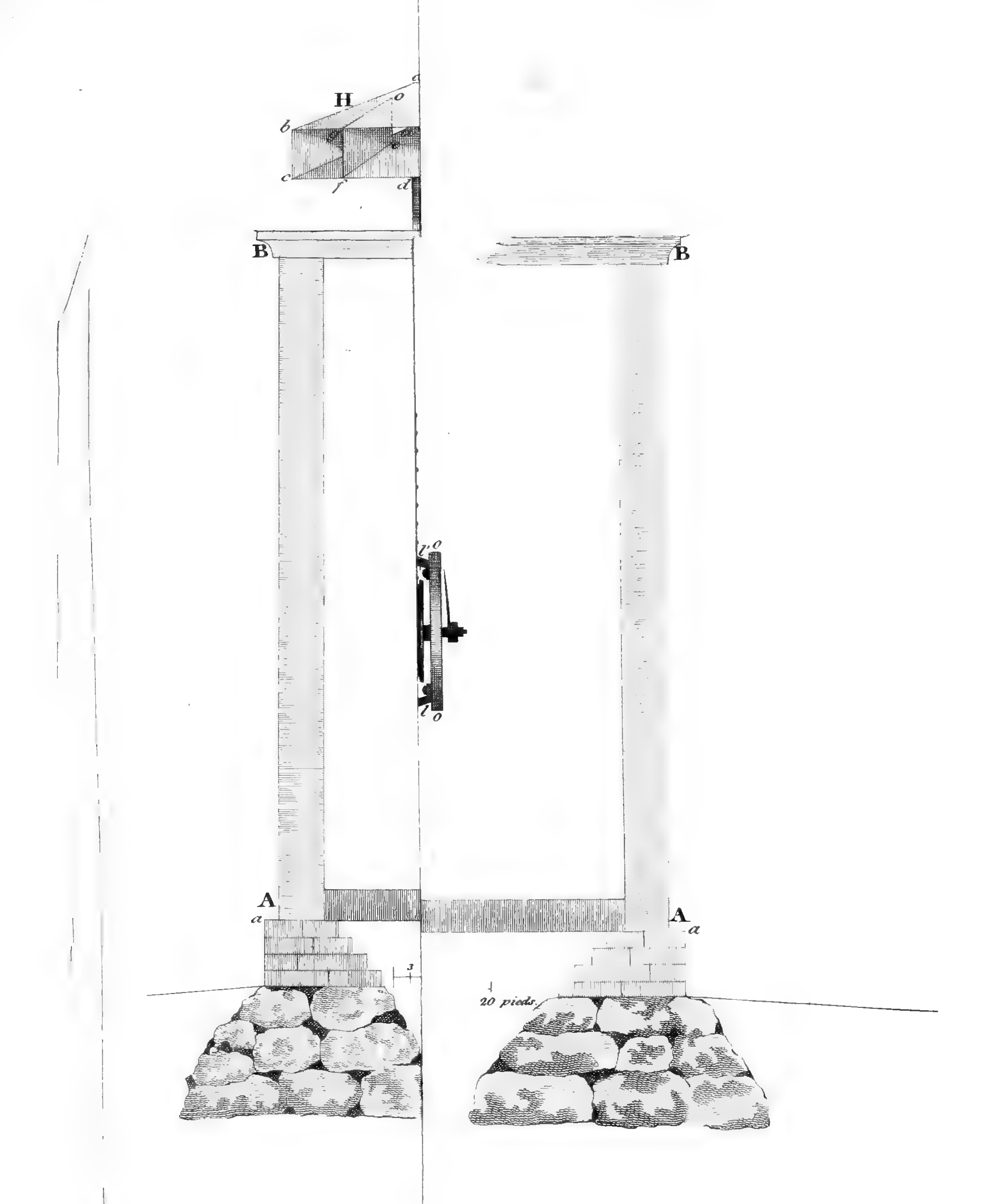

H
a
o
b
c
f
d
B
B
l
o
l
o
A
a
A
a
3
20 pieds.

Fig VIII

Fig IX

Fig VII

Fig X

Fig XI

Fig II

Fig V

Fig I

Fig IV

Fig III



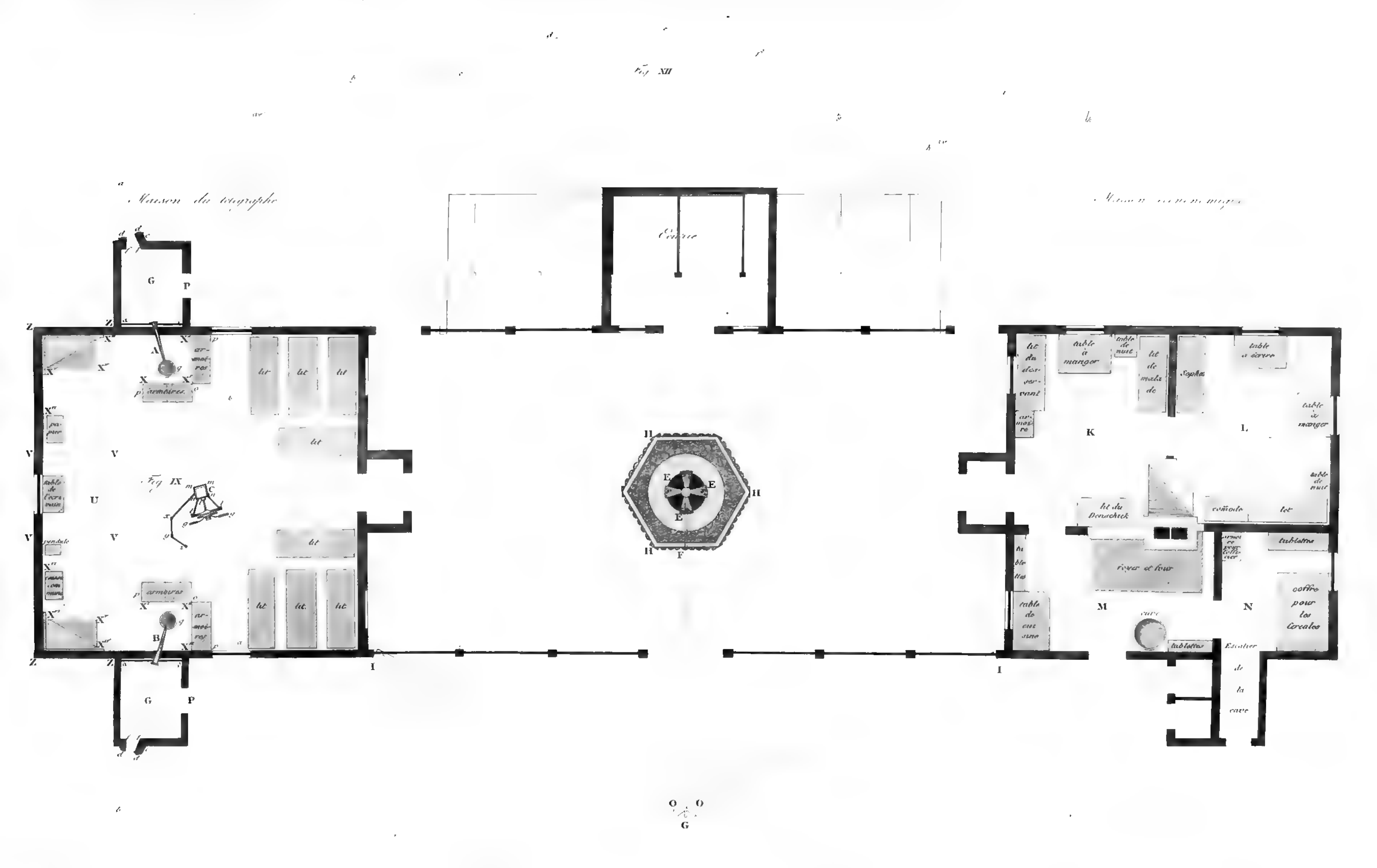
i

k

53°

Maison éeonomique.




Fig. XII
Maison du télégraphe
Écurie
Fig. IX
lit
armoires
table de l'écrivain
pendule
K
L
M
N
table à manger
table de nuit
lit de malade
Sophas
table à écrire
lit du Denschtick
commode
foyer et four
table de cuisine
cuve
tablettes
coffre pour les céréales
Escalier de la cave
40 pieds



MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PRODUITS PYROGÉNÉS,

PAR

M. HESS.

(Lu le 16 octobre 1835.)

Du Naphte.

Les chimistes ne savent que trop bien, que les propriétés du naphte ou du pétrole ne sont pas encore suffisamment explorées.

Une odeur particulière et la propriété de résister à quelques uns des agents chimiques les plus forts, caractérisent particulièrement cette substance. C'est à M. Th. de Saussure, que nous en devons la meilleure description *). Aussi ses résultats ont-ils été admis par tous les auteurs. M. de Saussure assigne au naphte purifié comme point d'ébullition une température de 85° C.

Après lui, différents autres chimistes ont tâché de décomposer le naphte en plusieurs éléments différents. M. Unverdorben le décompose par la distillation,

*) Bibliothèque universelle Vol. IV. p. 116 et Vol. VII p. 115. Annales de Chimie et de Phys. T. IV. p. 314 et T. VI p. 380.

en plusieurs huiles, dont l'une se trouve avoir son point d'ébullition à 95°, une autre à $112\frac{1}{2}$°, une troisième à 113°. Mais pas un de ces liquides n'avait un point d'ébullition constant. MM. Sell et Blanchet confirment le même résultat *). Ils obtinrent par la distillation d'un pétrole provenant de Perse, un liquide incolore d'une densité de 0,749 à 15° C, point d'ébullition 94° C; une autre fraction du liquide bouillait de 118° C à 138°; un troisième liquide avait son point d'ébullition à 187° C. Thomson indique 160° C comme point d'ébullition du naphte, et ajoute qu'il monte jusqu'à 178° C. M. Reichenbach**) cite avoir abaissé le point d'ébullition du naphte de 200° C jusqu'à 162° C. Ces données suffiront pour prouver que personne n'est encore parvenu à obtenir un naphte parfaitement pur.

On distingue à Bakou trois espèces de pétroles, dont l'une dite blanche est jaune par le fait, l'autre désignée sous le nom de pétrole noir répond à son nom, une 3ème espèce d'une consistance semblable à celle du goudron est nommée *koupri* par les habitants du pays.

La première de ces variétés, dont j'ai fait l'objet de mes recherches, entrait en ébullition à 140° C, sa densité était de 0,835. J'essayai de la purifier au moyen de distillations réitérées, et je crus m'apercevoir que le moyen qui me mènerait le mieux à mon but, serait de fracturer les produits au moyen du thermomètre. Je recueillis à part les différentes portions du liquide qui distillaient, de 140° à 160°; puis de 160 à 180, enfin de 180 à 200. Le produit le plus dense, obtenu entre 180 et 200 fut soumis à une nouvelle distillation; le liquide entra en ébullition à 160°, et je continuai jusqu'à ce que le point d'ébullition fut remonté jusqu'à 180°, le résidu fut mis de côté, et la portion distillée fut mêlée avec une autre portion, obtenue préalablement entre les mêmes limites de température; c'est ainsi que j'exécutai plusieurs distillations avec les produits obtenus, commençant par les moins volatils, et terminant par ceux qui l'étaient le plus. Mais lorsqu'à leur tour les produits les plus légers, c'est-à-dire ceux qui avaient le

*) Ann. der Pharmacie B. VI p. 259 et Poggendorffs Annalen B. XXIX p. 149.
**) Schweigger-Seidel neues Jahrbuch der Chemie u. Ph. B. LXII ou année 1831. B. II. p. 150.

point d'ébullition le moins élevé furent soumis à une distillation, ils se trouvèrent décomposés en deux liquides d'un point d'ébullition différent. Le résidu, dont le point d'ébullition était le plus élevé fut mêlé avec un liquide antérieur du même point d'ébullition, et soumis à une nouvelle distillation. C'est ainsi que je traitai tous les liquides, depuis le plus léger jusqu'au plus dense, ou ce qui revient au même, depuis le point d'ébullition le plus bas jusqu'au plus élevé. Dans cette première série de distillations, on fractura les liquides par intervalles de 20°. Dans les séries suivantes, les intervalles ne furent plus que de 10° pour les liquides les moins volatils, et de 5° pour ceux qui l'étaient davantage. J'opérai de cette manière plus de 90 distillations sur une quantité de pétrole d'à peu près 18 ℔ sans pouvoir obtenir un liquide d'un point d'ébullition constant. Il est certain qu'on aurait pu obtenir, avec bien moins de peine, la partie la plus volatile du liquide, qui constitue le pétrole, mais j'avais pris à tâche de constater, si le pétrole était véritablement composé de trois ou quatre huiles, d'un point d'ébullition différent, ou bien s'il n'était qu'un mélange de deux composés. On pouvait, par exemple, diviser le liquide qui bouillait à 140° en deux liquides d'un point d'ébullition différent, et si l'on prenait la partie la plus volatile, on pouvait toujours faire remonter le point d'ébullition jusqu'à la température primitive. Me voyant obligé de renoncer à obtenir un liquide d'un point d'ébullition constant, je m'occupai à rechercher les propriétés du naphte ainsi obtenu; il est incolore, très liquide, prend, quand on le secoue avec un peu d'acide sulfurique, pour lui enlever son odeur empyreumatique, une odeur épicée très agréable. Sa densité est de 0,75, il commence à bouillir à 80°, mais ce n'est qu'à 130° C que son ébullition est complète, il n'a aucun goût et n'est point sensible au toucher, car quand on en humecte les doigts il ne produit ni la sensation de l'eau, ni celle de l'alcool, ni celle des huiles grasses, il ne s'étend point sur l'eau comme le pétrole qui n'a pas encore été purifié, il ne subit point d'altération à l'air; il est très inflammable. Il peut être distillé soit avec de l'acide sulfurique, soit avec de l'acide nitrique, sans subir d'altération.

Qui est-ce qui ne reconnaîtrait pas, à cette description, la similitude frappante avec l'eupion de M. Reichenbach; aussi lorsque M. Reichenbach donna, pour la première fois, la description de cette substance, ne manqua-t-il point d'être frappé de cette ressemblance, et fit même quelques expériences comparatives. Quant aux observations de ses prédécesseurs, il se borna à citer celles qui étaient les moins bien fondées. Toutefois, si l'on considère la grande masse de travaux qu'il a publiés depuis quelques années sur les produits de la distillation sèche, et les progrès qu'il nous a fait faire sur un champ si peu exploré, il n'est pas étonnant qu'il ait pu se tromper sur la nature de quelques objets qui se trouvaient sous sa main; je crois en conséquence ne point atténuer son mérite, en dévoilant quelques unes de ses erreurs, et je tâcherai d'éclaircir quelques uns des points essentiels qui ont pu l'induire en erreur sur la nature de la matière qu'il traitait. C'est principalement au manque de précision dans l'observation du point d'ébullition qu'il faut l'attribuer, car dans sa première description *) M. Reichenbach dit que l'eupion bout sous la pression de 27″ du baromètre à 169° C. N'est-on pas en droit après cela de supposer que l'eupion possède un point d'ébullition constant? Il compare ensuite ce point d'ébullition avec celui de 85°, 5 C que M. de Saussure attribue au naphte, et remarque à cette occasion „que ce point d'ébullition est tellement éloigné de celui de l'eupion, qu'on est loin d'espérer de pouvoir jamais réunir ces deux substances comme identiques.“ Cependant, il se trouva plus tard que l'eupion de M. Reichenbach n'avait pas de point d'ébullition fixe, vu qu'il le porte plus tard, après avoir donné à l'eupion un plus grand degré de pureté **), à 47° C, de 169° qu'il avait indiqué antérieurement. Quant à l'indication de M. de Saussure, on voit par son travail ***) qu'il ne s'est point servi du thermomètre pour déterminer le point d'ébullition, mais qu'il l'avait déterminé en le calculant de la dilatation qu'un volume déterminé d'air avait éprouvé, après avoir été saturé de vapeur de naphte.

*) Journal für Chemie und Physik von Schweigger-Seidel. B. LXII. p. 133.
**) Journal der praktischen Chemie. B. I. p. 384.
***) Annales de chimie et de physique. T. IV. p. 316.

Or, l'hypothèse que tous les liquides possèdent le même degré de tension à des distances égales de leur point d'ébullition, est depuis long-temps reconnue comme inexacte.

Dans un autre mémoire *) M. Reichenbach nous apprend que le pétrole préexiste dans la houille et il en tire la conclusion remarquable que la houille n'a point été produite par la chaleur souterraine. Quelques expériences comparatives, mais très insuffisantes, le confirmèrent dans l'opinion d'une très grande ressemblance entre le pétrole et l'esprit de térébenthine, ce qui lui suggéra l'idée singulière que le pétrole était probablement la térébenthine des sapins antidiluviens, que les couches de houille ne s'étaient jamais trouvées exposées à une haute température, et que l'eupion et le naphte étaient de nature essentiellement différente; c'est en vain que M. Humboldt fit observer dans une séance de la société des naturalistes de Breslau (en 1833), combien peu cette hypothèse était soutenable, puisque les débris organiques que l'on trouve dans les formations houillères appartiennent particulièrement à la famille des palmes et des fougères. En outre, la géognosie cite des faits, comme, par exemple, des lignites transformés en houille par des éruptions thrachytiques, qui sont en opposition manifeste avec l'opinion de M. Reichenbach. Cependant, sans chercher d'appui dans le domaine des sciences auxiliaires, poursuivons, par la voie des expériences, la comparaison de ces deux substances.

M. Reichenbach indique, dans son premier travail sur l'eupion, que ce liquide n'est point décomposé par le chlore. On voit cependant bien clairement qu'il n'a point poursuivi l'expérience pour s'assurer du changement que le chlore avait pu opérer. Dans son second mémoire, il dit que le liquide paraît retenir une certaine quantité de chlore, mais qu'il n'en est point décomposé.

Je fis traverser du naphte purifié par du chlore jusqu'à parfaite saturation, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'un papier de tournesol qu'on y introduisait se trouvât promptement décoloré. Il s'était formé une quantité considérable d'acide chloro-

*) Jahrbuch der Chemie. Bd. LXIX p. 19 à 29.

hydrique, qui fut enlevé par des lavages réitérés par l'eau et par la potasse caustique. Après avoir ainsi traité le naphte, je le fis traverser de nouveau par un courant de chlore qui, cette fois, ne parut plus exercer aucune action, vu que le liquide s'en trouva tout de suite saturé. Quoique le liquide eût été chauffé pendant l'expérience, il ne s'était point formé d'acide chlorohydrique, parce que le liquide ne rougissait point le papier de tournesol. Secoué avec de l'eau, celle-ci ne devenait point acide; enfin l'excès de chlore qu'elle contenait en était facilement chassé par la chaleur. Le naphte ainsi pressé fut distillé sur de la chaux-vive, après quoi je fis passer sa vapeur sur de la chaux incandescente.

L'opération terminée, la chaux fut arrosée d'eau, saturée d'acide nitrique et filtrée. Le liquide ainsi obtenu précipitait abondamment par le nitrate d'argent, preuve incontestable de la présence du chlore. L'expérience fut répétée une seconde fois, avec une nouvelle portion de naphte et des réactifs préparés exprès pour se mettre à l'abri de toute source d'erreur.

De Saussure *) qui avait aussi fait passer le chlore dans le naphte dit qu'il se forme de l'acide chlorohydrique, mais que le naphte ne subit point d'autre altération. En cela il a raison; s'il s'est servi d'un naphte qui n'était pas tout à fait incolore, il ne pouvait pas reconnaître à la simple vue la présence du chlore. Ce passage néanmoins fut mal interprété dans la suite; car par exemple, lorsque Sérullas fit agir du naphte sur du chlorure d'iode **) et qu'il enleva ensuite l'iode par la potasse caustique, il remarqua bien que le naphte contenait du chlore, mais il crut que cela ne pouvait avoir lieu que dans cette circonstance particulière ***) et cite, comme n'étant sujet à aucun doute, que l'action du chlore sur le naphte donne lieu à la formation d'acide chlorohydrique sans que pour cela le naphte contienne du chlore.

---

*) L. c. p. 317.

) Annales de Chimie et de Physique. T. XXV p. 313. *) p. 314.

Pour compléter la comparaison entre le naphte et l'eupion, il devenait nécessaire de soumettre ce dernier à l'action du chlore. Toute la quantité que j'en possédais comportait moins d'un gramme; je fis traverser cette petite quantité de liquide, qui se trouvait enfermée dans une éprouvette étroite, par un courant de chlore, jusqu'à parfaite saturation. L'eau qu'on mit en contact avec ce liquide devint acide; absorbée par de la chaux, celle-ci acquérait la propriété de précipiter par le nitrate d'argent, après avoir été dissoute dans de l'acide nitrique; l'eupion après avoir été lavé par de la potasse caustique, fut traité comme le naphte l'avait été antérieurement, en faisant passer sa vapeur sur de la chaux incandescente; le résultat fut que la chaux se trouva contenir du chlore, de façon que jusqu'à présent l'eupion et le naphte se comportaient absolument de la même manière. Il n'y avait qu'une circonstance qui m'empêchait de considérer les deux liquides comme identiques. C'était que plus la naphte approchait de la pureté, plus il me devenait impossible de la faire participer à l'odeur forte et aromatique de l'eupion.

Je résolus donc de retirer de l'eupion du goudron que l'on extrait ici en quantité considérable de l'écorce de bouleau, je me servis pour cela des procédés indiqués par M. Reichenbach. Le goudron fut d'abord distillé seul, il passa d'abord à un liquide aqueux et acide, qui fut bientôt accompagné par une substance huileuse d'une légère teinte jaune. Plus la distillation avançait, plus la quantité du liquide aqueux diminuait, à mesure que celle du liquide huileux augmentait. Je ne poussais jamais la distillation jusqu'au bout, car je me contentais de recueillir les produits les plus volatils, et je m'arrêtais dès qu'une augmentation marquée de température devenait indispensable pour continuer la distillation. Je recueillis de cette manière une quantité de 5 à 6 ℔ d'un liquide volatil qui servit aux opérations subséquentes; le liquide fut d'abord traité par une dissolution concentrée de potasse caustique, jusqu'à ce que de nouveaux lavages n'exerçassent plus d'action manifeste. Le but de cette opération était d'enlever à l'huile son contenu de créosote et de picamare.

L'huile ainsi obtenue fut secouée avec une petite quantité d'acide sulfurique, qui lui enleva son odeur de brûlé, de manière à ce que l'odeur forte et agréable de l'eupion, ne fût plus méconnaissable. Je me croyais près d'atteindre à mon but, et je m'imaginais d'avoir un liquide riche en eupion. Mais lorsque je réitérai le traitement avec une plus grande quantité d'acide sulfurique, l'odeur agréable de l'eupion diminua de plus en plus à chaque opération, et disparut bientôt tout-à-fait. Par la distillation avec l'acide sulfurique et l'acide nitrique, j'obtins un liquide léger et incolore, qui n'exerçait presque plus aucune action sur l'acide sulfurique. J'obtins, en un mot, un naphte très pur, qui entrait en ébullition à 100° C; cependant l'ébullition n'était complète qu'à 140° C; le thermomètre montait continuellement, j'avais donc sous tous les rapports un liquide identique avec le naphte du pétrole, et il ne me restait plus que de soumettre l'un et l'autre, à une analyse élémentaire.

Il faut avant tout que je me justifie d'avoir voulu soumettre à cette espèce d'analyse, un liquide qui n'avait pas de point d'ébullition constant, et qui était donc nécessairement mélangé; cependant si l'on considère la simplicité à laquelle l'analyse élémentaire est réduite aujourd'hui, on conviendra qu'il faut souvent moins de temps pour exécuter une de ces analyses avec tous les soins nécessaires, que pour faire certaines autres épreuves qui paraissent plus simples au premier abord. Je pouvais donc espérer d'obtenir au moins quelque indication.

Pour l'analyse élémentaire, je pris un liquide qui avait été soumis à des distillations multipliées comme je l'ai cité plus haut; il avait ensuite reposé pendant deux mois dans un flacon fermé, avec de l'acide nitrique, et le mélange avait souvent été remué; le liquide fut ensuite distillé en dernier lieu à une faible chaleur: je recueillis les produits qui distillaient entre 95° C et 105°. Le résultat fut:

Ire expérience.	La boule avec le naphte	0, 5675
	Boule vide	0, 3375
	Naphte	0, 2300

$\ddot{C}$	0, 724.
Appareil pour l'eau, et pointe de verre	0, 776
Pointe de verre	0, 466
Eau	0, 310
Ce qui donne: C	86, 95
H	14, 70
	101, 65

IIme expérience.	Boule avec le naphte		0, 930
	Boule vide		0, 533
			0, 397
	$\ddot{C}$	1,233 = C	0,3400
	$\dot{H}$	0,538 = H	0,0597
			0,3997

				calculé
ce qui donne: C	85,66			C 85, 964
H	15,00	=	CH^2	H 14, 036
	100,66			100, 000

Je conviens que ce résultat m'étonna beaucoup, car la plupart des savants admettaient d'après l'analyse de Saussure, pour la composition du naphte, la formule C^3H^5 qui paraissait d'autant plus probable, qu'elle avait été confirmée plus tard par Dumas, qui trouva le naphte composé de *)

	I	II
C	86,4	87,83
H	12,7	12,30
	99,1	100,13

Mais si l'on considère que la composition calculée d'après la formule C^3H^5 donne

C	88,024
H	11,976
	100,000

*) Annales de Chimie et de Physique. L. p 239.

on voit que l'analyse de M. Dumas ne saurait confirmer le résultat de Saussure, d'autant plus qu'il ne s'était pas servi d'un naphte soigneusement purifié.

MM. Sell et Blanchet obtinrent avec la partie volatile du pétrole:

C	85,05
H	14,30
	99,35

ce qui approche beaucoup de la formule CH^2.

IIIe expérience. Pour cette analyse, je pris du pétrole qui venait directement de Bakou, y avait été distillé sur de l'eau, et qu'on avait envoyé ici, sous le cachet de la couronne. Je le dois à l'obligeance du général Tchevkine. Frotté entre les doigts, ce pétrole avait une odeur forte de térébenthine, quoique sa pureté ne fût point douteuse, vu qu'il avait été distillé sous la surveillance immédiate d'un officier distingué du corps des mines. Je cite cette propriété, parce que c'est elle probablement qui suggéra à M. Reichenbach l'idée que le pétrole et la térébenthine sont de même nature, et il n'y a que cette supposition, jointe à l'insuffisance de ses expériences, qui fasse comprendre comment la présence du naphte avait pu lui échapper parmi les produits pyrogénés.

J'ai observé plus d'une fois que, si l'on distillait du naphte, provenant soit de produits pyrogénés, soit du pétrole, avec de l'eau, il prenait toujours une odeur de térébenthine, qui disparaissait jusqu'à un certain point, soit qu'on chauffât le naphte, soit qu'on le traitât par l'acide sulfurique. Cependant, je n'ai jamais réussi à produire du naphte qui, frotté entre les doigts, ne répandît une odeur rappelant celle de la térébenthine.

Ce naphte du pétrole de Bakou dont je parle, était incolore, avait une densité de 0,8 bouillait à 130° C. Secoué avec de l'acide sulfurique, il lui communiqua une teinte brunâtre à peine perceptible. Son analyse donne:

$\ddot{C}$	1,428
$\dot{H}$	0,596

ce qui équivaut à

$$\begin{array}{ll} C & 85,28 \\ H & \underline{14,27} \\ & 99,55 \end{array}$$

résultat qui répond très bien à la formule CH^2.

Ce résultat me fit supposer que la plus grande partie du pétrole pouvait être composée de la même manière. Dans cette supposition, je distillai une partie de pétrole brut, à lui seul; et je soumis à l'analyse les premiers produits de cette distillation.

IVe expérience. Quantité du naphte 0,429,

$$\begin{array}{llll} \ddot{C} & 1,287 = C & \ldots\ldots & 0,35586 \\ \dot{H} & 0,524 = H & \ldots\ldots & 0,05811 \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{ll} C & 83,0 \\ H & \underline{13,5} \\ & 96,5 \end{array}$$

Je ne savais absolument pas à quoi attribuer cette perte considérable, et je supposai d'abord une erreur dans la pesée du naphte, car:

$$\left.\begin{array}{l} 414 : 355,86 = 100 : 85,95 \\ 414 : \ \ 58,11 = 100 : \underline{14,05} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 100,00 \end{array}\right\} = CH^2$$

ce qui est exactement la composition de l'hydrogène bicarboné.

V^e^ expérience. En répétant cette analyse j'obtins.

$$\begin{array}{l} \ddot{C}\ 1,404 = C\ 0,38821 \\ \dot{H}\ 0,577 = H\ \underline{0,06409} \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0,45230 \end{array}$$

Ce qui donne

$$\begin{array}{ll} C & 81,39 \\ H & \underline{13,45} \\ & 94,84 \end{array}$$

Si l'on calcule cette analyse comme le précédente on obtient

$$\left.\begin{array}{ll} C & 85,83 \\ H & 14,17 \\ \hline & 100,00 \end{array}\right\} = CH^2.$$

VIe expérience. Une nouvelle analyse donne pour 0,435 du naphte

$$\begin{array}{lllll} \ddot{C} & 1,273 & = & C & 0,35198 \\ \dot{H} & 0,517 & = & H & 0,05143 \\ \hline & & & & 0,40941 \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{ll} C & 80,91 \\ H & 13,20 \\ \hline & 94,11 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{mais } 409 : 351,98 = 100 : 86,05 \\ 409 : \ \ 57,43 = 100 : 14,04 \\ \hline 100,09 \end{array}\right\} = CH^2$$

VIIe expérience. Une nouvelle analyse donne pour 0,654 de naphte

$$\begin{array}{lllll} \ddot{C} & 1,954 & = & C & 0,54028 \\ \dot{H} & 0,810 & = & H & 0,08999 \\ \hline & & & & 0,63027 \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{ll} C & 82,61 \\ H & 13,76 \\ \hline & 96,37 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mais } 63 : 54,028 = 100 : 85,74 \\ 63 : \ \ 8,999 = 100 : 14,27 \\ \hline 100,01 \end{array}\right\} = CH^2.$$

Je conviens, que la constance du rapport du carbone et de l'hydrogène était pour moi une énigme. Je crus d'abord que la perte constante provenait de ce qu'une partie du liquide s'était volatilisée, sans subir de décomposition. Ce qui me fortifiait dans cette idée, c'est que, chaque analyse où il y avait eu de la perte, j'avais senti un gaz fétide qui traversait la potasse caustique. Je crus donc que l'oxide cuivrique n'avait pas été assez bien tassé dans le tube à combustion, mais je trou-

vai bientôt qu'un tassement plus fort faisait crever le tube, avant la fin de l'analyse, et que, chaque fois que j'avais pu achever l'analyse, il y avait toujours eu une perte.

Je remarquerai à cette occasion que pour l'analyse des substances organiques, je me sers des procédés indiqués par M. Mitscherlich dans son traite de chimie, car j'ai eu plus d'une fois lieu d'observer combien était bien fondée chacune des manipulations qu'il indique.

Ne pouvant découvrir la cause de la perte, c'est à cette occasion que je me mis à retirer le naphte du goudron, voici le résultat de mes analyses:

Ire analyse. Quantité du naphte 0,4845.

$$\begin{array}{llll} \ddot{C} & 1,449 = C = & 0,40065 \\ \dot{H} & 0,5935 = H = & \underline{0,06593} \\ & & 0,46658 \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{ll} C & 82,4 \\ H & \underline{13,6} \\ & 96,0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{mais } 4665 : 4006,5 = 100 : 85,88 \\ 4665 : 659,3 = 100 : 14,13 \end{array}\right\} = CH^2.$$

IIe analyse. Quantité du naphte 0,487.

$$\begin{array}{lll} \ddot{C} & 1,444 = C & 0,3993 \\ \dot{H} & 0,589 = H & \underline{0,0654} \\ & & 0,4647 \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{ll} C & 81,98 \\ H & \underline{13,43} \\ & 95,41 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{mais } 4647 : 3992,7 = 100 : 85,91 \\ 4647 : 654,3 = 100 : \underline{14,08} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 99,99 \end{array}\right\} = CH^2.$$

IIIme analyse. Quantité du naphte 0,6055.

$$\begin{array}{lll} \ddot{C} & 1,827 = C & 0,50517 \\ \dot{H} & 0,74 = H & \underline{0,08222} \\ & & 0,58739 \end{array}$$

ce qui donne C 83,43
H 12,22
95,65

$$\text{mais } 5874 : 5051{,}7 = 100 : 86{,}00 \quad 5874 : 822{,}2 = 100 : 13{,}99 \quad 99{,}99 \Big\} = CH^2.$$

IV[me] analyse. Quantité du naphte 0,591.

$$\ddot{C}\ 1{,}757 = C\ 0{,}48581$$
$$\dot{H}\ 0{,}7035 = H\ 0{,}07816$$
$$0{,}56397$$

ce qui donne C 82,20
H 13,22
95,42

$$\text{mais: } 594 : 495{,}81 = 100 : 86{,}13 \quad 564 : 78{,}16 = 100 : 13{,}84 \quad 99{,}97 \Big\} = CH^2.$$

Après la troisième expérience, je croyais avoir remarqué quelques gouttes d'huile nageant sur la potasse caustique, ce qui m'engagea à faire la quatrième analyse, dans le but d'obtenir une combustion complète. Enfin, ne trouvant point de cause d'erreur, je me laissai persuader, par la concordance parfaite des 4 derniers résultats, que la cause de la perte devait être cherchée dans la composition de la substance, et non dans les détails de l'analyse; j'ai cependant cité ces expériences dans le but d'éclaircir plus tard la cause de cette perte constante.

En feuilletant mon journal, je découvris bientôt, que tous les naphtes qui à l'analyse avaient donné la formule CH^2 avaient été obtenus, ou par des distillations réitérées, ou par une distillation avec de l'eau. Le naphte du pétrole, que j'avais distillé à lui seul, avait aussi donné une perte; s'il en était effectivement ainsi, la même perte devait avoir lieu pour le naphte du goudron, qui n'avait été traité que par la potasse caustique et l'acide sulfurique, et distillé ensuite avec les acides sulfurique et nitrique. En distillant ce naphte avec de l'eau, j'obtins un liquide

incolore et limpide, tandis qu'il resta dans la cornue une huile jaunâtre. Le naphte ainsi purifié, confirma pleinement ma supposition, car:

Quantité du naphte 0,527.

$$\ddot{C}\ 1{,}65 = C = 0{,}45623$$
$$H\ 0{,}668 = H = \underline{0{,}07422}$$
$$0{,}53045$$

ce qui donne

$$\left.\begin{matrix} C & 86{,}56 \\ H & \underline{14{,}08} \\ & 100{,}64 \end{matrix}\right\} = CH^2.$$

Si nous récapitulons ce qui a été dit plus haut du naphte, nous voyons qu'il ressemble éminemment à l'eupion, puisqu'il n'est attaqué, ni par les acides, ni par les alcalis. Sa densité est à la vérité plus grande que celle de l'eupion, mais aussi son point d'ébullition n'était-il point constant. Une des propriétés que Reichenbach revendique avec tant de soin pour l'eupion, celle de dissoudre en partie le caoutchou et de l'abandonner par l'évaporation, avec toutes ses propriétés primitives, cette propriété là, le naphte purifié, comme je l'ai indiqué, la possède aussi; mais ceci n'est point neuf, M. de Saussure l'a déjà signalé, et je m'étonne d'autant plus que M. Reichenbach n'y ait attaché aucune importance: et l'on voit donc que cette propriété étant commune aux deux liquides, il ne reste plus, de toutes les propriétés les plus saillantes, que l'odeur de l'eupion qui le distingue du naphte.

Il résulte des faits cités dans ce mémoire:

1° Que la partie la plus volatile du pétrole, à laquelle nous conserverons le nom de naphte est composée de carbone et d'hydrogène dans les proportions qui constituent l'hydrogène bicarboné.

2° Que le naphte est un produit pyrogéné, ce qui se trouve en opposition complète avec les théories de M. Reichenbach, mais s'accorde avec l'opinion de M. Dumas *).

3° Que l'eupion de M. Reichenbach se trouve très probablement mêlé de naphte, qu'il n'avait point eu en vue, et que par cette raison, il exige une révision soignée.

*) Annales de Chimie et de Physique. T. L. p. 238.

4°. Que le naphte est un exemple remarquable de la polymérie de l'hydrogène bicarboné.

5°. Que le naphte pouvant avoir absorbé une quantité indéterminée d'un autre hydrogène bicarboné, il est vraisemblable que c'est là la cause qui rend son point d'ébullition variable. En outre, comme une partie de cet hydrogène bicarboné peut avoir subi quelque modification, il faudrait, pour arriver à obtenir un point d'ébullition constant, pouvoir opérer la séparation d'un mélange de plusieurs substances polymériques et peut-être même à la fois polymériques et isomériques.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR LA

THÉORIE DES PUISSANCES FONCTIONALES.

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 2 octobre 1835)

UNE note, que j'eus l'honneur de présenter à l'Académie le 19 septembre 1827, renfermait l'exposition de quelques préceptes généraux pour le développement d'un genre de fonctions, que j'ai nommées *puissances fonctionales.* Depuis, désirant contribuer à la formation du premier volume de la nouvelle série des Mémoires que l'Académie se proposait alors de publier, je jugeai à-propos d'incorporer le contenu principal de cette note à une dissertation antérieure qui, ainsi augmentée, fut insérée dans le dit recueil, p. 181, sous le titre de „recherches générales sur la transformation des fonctions." Pareille chose s'est faite pour une autre partie de la même note, laquelle se trouve jointe à la fin de ma „Solution d'un problème de la théorie des fonctions", p. 351 du volume cité. Cette première ébauche d'une théorie que je crois avoir créée et qui, convenablement cultivée, me paraît promettre de très fertiles applications, surtout pour ce qui concerne la découverte de la forme de fonctions liées entr'elles par des relations données, — laissait sans doute encore beaucoup à désirer, vu qu'elle n'offrait, pour

le développement des puissances fonctionales, que des formules très-compliquées et dont il est difficile d'entrevoir le véritable type de formation. J'ai donc repris le fil des recherches y relatives, et les résultats auxquels ce nouveau travail m'a conduit récemment, étant, à ce qui me semble, beaucoup plus satisfaisans que les précédens, j'ose aujourd'hui y rappeler l'attention bienveillante des analystes. Mais, avant d'en commencer l'exposition, je vais, afin de la rendre entièrement indépendante d'un renvoi quelconque ou de toute lecture préparatoire, la faire précéder d'une récapitulation succincte des idées fondamentales.

Qu'on s'imagine que, dans une fonction quelconque à une variable, φx, on ait substitué à la variable x la même fonction φx, le résultat $\varphi(\varphi x)$, que nous écrivons $\varphi^2 x$, sera ce que nous nommons une *puissance fonctionale du second degré*, ou bien le carré fonctional de la fonction proposée φx. La variable x étant, dans ce carré, de nouveau remplacée par la fonction φx, ou, ce qui revient au-même, le carré fonctional $\varphi^2 x$ étant substitué à la variable x dans la fonction primitive φx, le résultat, $\varphi^2(\varphi x)$ ou $\varphi(\varphi^2 x)$, que nous désignerons par $\varphi^3 x$, formera la *puissance fonctionale du troisième degré*, ou bien le cube fonctional de la fonction φx. On entendra de la même manière par puissance fonctionale du 4ième degré de la fonction φx, le résultat $\varphi^4 x$ qu'on obtient en remplaçant, dans $\varphi^3 x$, la variable x par φx, ou bien, en substituant, dans φx, le cube fonctional $\varphi^3 x$ à la variable x, de sorte que $\varphi^4 x = \varphi^3(\varphi x) = \varphi(\varphi^3 x)$; et ainsi de suite. Il est clair, que la fonction φx, que nous nommerons la *racine fonctionale* des puissances $\varphi^2 x$, $\varphi^3 x$, $\varphi^4 x, \cdots \varphi^n x$, pourra, à l'égard d'elle-même, être nommée sa première puissance fonctionale, c'est-à-dire, que $\varphi^1 x = \varphi x$; et l'on comprendra aussi aisément, que $\varphi^0 x = x$. Chaque *puissance fonctionale d'un degré quelconque*, $\varphi^n x$, aura donc sa *variable*, x, sa *racine* φx, et son *exposant*, n.

Cela posé, le but principal de nos recherches actuelles consistera à développer la puissance fonctionale du $n$ième degré d'une fonction quelconque donnée, φx, 1° en une série *suivant les puissances* (ordinaires), à exposans entiers et positifs, *de la variable* x, de sorte que les coëfficiens de ces puissances ne soient que des

fonctions de l'exposant n et de certaines constantes, dépendantes de la nature même de la fonction proposée; et 2° en une série *suivant les puissances,* toujours à exposans entiers et positifs, *de l'exposant fonctional n,* et dont les coëfficiens soient des fonctions seulement de la variable x et de certaines quantités constantes.

Occupons-nous d'abord du premier de ces deux objets. Pour cela, observons qu'en vertu du théorème de Maclaurin il faudrait former, par des différentiations successives, les dérivées des différens ordres de la fonction $\varphi^n x$, et y faire, dans chacune, $x = 0$. Ceci donnerait, par exemple:

$$\frac{d\cdot\varphi^n x}{dx} = \frac{d\cdot\varphi(\varphi^{n-1}x)}{dx} = \varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\frac{d\cdot\varphi^{n-1}x}{dx} = \varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)\cdot\frac{d\cdot\varphi^{n-2}x}{dx} =$$
$$\varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-3}x)\cdots\cdots\varphi'(\varphi^2 x)\cdot\varphi'(\varphi x)\cdot\varphi' x$$

$$\frac{d^2\varphi^n x}{dx^2} = \frac{d\cdot\varphi^n x}{dx}\cdot\frac{d\cdot\log.\left(\frac{d\cdot\varphi^n x}{dx}\right)}{dx} = \varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)\cdots\cdots\varphi'(\varphi x)\cdot\varphi' x \times$$
$$\left(\frac{d\cdot\varphi'(\varphi^{n-1}x)}{dx\cdot\varphi'(\varphi^{n-1}x)} + \frac{d\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)}{dx\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)} + \cdots\cdots + \frac{d\cdot\varphi'(\varphi x)}{dx\cdot\varphi'(\varphi x)} + \frac{\varphi'' x}{\varphi' x}\right)$$

expressions, qui deviennent toujours de plus en plus compliquées et ne se réduisent point pour $x = 0$. Cependant, ces mêmes expressions gagneraient déjà beaucoup en simplicité, si, au-lieu d'y faire $x = 0$, on y prenait $x = r$, en désignant par r la racine, ou l'une des racines, de l'équation $\varphi x = x$. En effet, puisqu'en vertu de $\varphi r = r$, on a également $\varphi^2 r = \varphi(\varphi r) = \varphi r = r$, $\varphi^3 r = r$, et généralement, $\varphi^n r = r$, la première de nos expressions se réduirait à $\frac{d\cdot\varphi^n r}{dr} = (\varphi' r)^n$ simplement, et les suivantes deviendraient au-moins beaucoup plus simples qu'elles ne le sont pour $x = 0$. A la verité la supposition de $x = r$ ne pourra guère conduire au développement exigé suivant les puissances de x, mais elle en pourra produire un, suivant les puissances de la différence $x - r$, parce qu'on à généralement:

$$fx = fr + f'r\cdot(x-r) + \frac{f''r}{2}\cdot(x-r)^2 + \frac{f'''r}{2\cdot 3}\cdot(x-r)^3 + \cdots \left(= S\left[\frac{f^{(a)}r}{a!}(x-r)^a\right]\right)$$

et le passage de celui-ci au premier pourra dès-lors s'effectuer par d'autres moyens, à-moins qu'on ne veuille faire valoir le développement suivant $x - r$ comme la

solution immédiate du problème. En nous réservant de revenir, dans la seconde partie de nos recherches, aux expressions mentionnées, nous profitons, pour le moment, des considérations précédentes pour établir la forme suivante du développement dont il s'agit maintenant.

Soit:

$$\varphi^n x = \overset{n}{c}_0 + \overset{n}{c}_1 (x-r) + \overset{n}{c}_2 (x-r)^2 + \overset{n}{c}_3 (x-r)^3 + \cdots\cdots (= S[\overset{n}{c}_{\mathfrak{a}} (x-r)^{\mathfrak{a}}]) \cdots (1)$$

où $\overset{n}{c}_0$, $\overset{n}{c}_1$, $\overset{n}{c}_2$, etc. désignent des coëfficiens indépendans de la variable x, et dont nous nous proposons de déterminer la loi de formation. Quant au premier d'entr'eux, il est évident qu'à cause de $\varphi^n r = r$ on a: $\overset{n}{c}_0 = r$. On en tire, en faisant $n = 0$:

$$x = r + \overset{0}{c}_1 (x-r) + \overset{0}{c}_2 (x-r)^2 + \overset{0}{c}_3 (x-r)^3 + \cdots\cdots$$

donc:

$$1 = \overset{0}{c}_1 + \overset{0}{c}_2 (x-r) + \overset{0}{c}_3 (x-r)^2 + \cdots\cdots$$

ce qui, en faisant $x = r$, donne:

$$\overset{0}{c}_1 = 1 \text{ et } \overset{0}{c}_2 = \overset{0}{c}_3 = \cdots\cdots = 0$$

D'ailleurs, puisque, pour $n = 1$, on a:

$$\varphi x = \overset{1}{c}_0 + \overset{1}{c}_1 (x-r) + \overset{1}{c}_2 (x-r)^2 + \overset{1}{c}_3 (x-r)^3 + \cdots\cdots$$

il s'ensuit que:

$$\overset{1}{c}_1 = \varphi' r,\ \overset{1}{c}_2 = \frac{\varphi'' r}{2!},\ \overset{1}{c}_3 = \frac{\varphi''' r}{3!},\ \text{et, en général: } \overset{1}{c}_k = \frac{\varphi^{(k)} r}{k!} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Or, comme $\varphi^n x = \varphi^{n-1} (\varphi x)$ et que:

$$(\varphi x - r)^k = \left(\varphi' r (x-r) + \frac{\varphi'' r}{2!} (x-r)^2 + \frac{\varphi''' r}{3!} (x-r)^3 + \cdots\cdots\right)^k =$$

$$S\left[\frac{k!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\mathfrak{a}!\cdots\cdots} \varphi' r^{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \left(\frac{\varphi'' r}{2!}\right)^{\mathfrak{a}} \cdots\cdots (x-r)^{k+\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = k + \mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a} + \cdots\cdots = k$$

ou bien, en faisant pour abréger:

$$(3) \cdots\cdots\cdots\cdots S\left[\frac{k!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots}\,\varphi' r^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\right] = S_{k+\mathfrak{b},\,k}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots = k + \mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots = k$$

$$(4) \cdots\cdots (\varphi x - r)^k = S\left[S_{k+\mathfrak{b},\,k}(x-r)^{k+\mathfrak{b}}\right]$$

on obtient:

$$\varphi^n x = r + \overset{n-1}{c}_1(\varphi x - r) + \overset{n-1}{c}_2(\varphi x - r)^2 + \overset{n-1}{c}_3(\varphi x - r)^3 + \cdots = S\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}}(\varphi x - r)^{\mathfrak{a}}\right]$$

$$= S\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\,\mathfrak{a}}(x-r)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\right]$$

et, en ordonnant suivant les puissances de $x - r$:

$$(5) \cdots \varphi^n x = r + \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=1}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{1,\mathfrak{a}}\right](x-r) + \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=2}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{2,\mathfrak{a}}\right](x-r)^2 + \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=3}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{3,\mathfrak{a}}\right](x-r)^3$$

$$+ \cdots = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{m}}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}}(x-r)^{\mathfrak{m}}\right]$$

donc, en comparant avec (1):

$$\overset{n}{c}_1 = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=1}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{1,\mathfrak{a}}\right] = \overset{n-1}{c}_1 S_{1,1}$$

$$\overset{n}{c}_2 = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=2}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{2,\mathfrak{a}}\right] = \overset{n-1}{c}_1 S_{2,1} + \overset{n-1}{c}_2 S_{2,2}$$

$$\overset{n}{c}_3 = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=3}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{3,\mathfrak{a}}\right] = \overset{n-1}{c}_1 S_{3,1} + \overset{n-1}{c}_2 S_{3,2} + \overset{n-1}{c}_3 S_{3,3}$$

etc. etc.

et généralement:

$$(6) \cdots \overset{n}{c}_k = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=k}{S}\left[\overset{n-1}{c}_{\mathfrak{a}} S_{k,\mathfrak{a}}\right] = \overset{n-1}{c}_1 S_{k,1} + \overset{n-1}{c}_2 S_{k,2} + \overset{n-1}{c}_3 S_{k,3} + \cdots + \overset{n-1}{c}_k S_{k,k}$$

équation, qui offre un moyen de trouver les coëfficiens $\overset{n}{c}_k$ du développement de la puissance fonctionale $\varphi^n x$ par ceux du développement de la puissance $\varphi^{n-1}x$. On pourra donc, par recurrence, c'est-à-dire, en descendant successivement par toutes les puissances fonctionales d'un ordre inférieur à n, finalement exprimer $\overset{n}{c}_k$

par les constantes $\varphi' r$, $\frac{\varphi'' r}{2!}$, $\frac{\varphi''' r}{3!}$, etc. dépendantes uniquement de la nature de la fonction donnée φx.

Tel est donc le premier moyen qui se présente pour effectuer le développement d'une puissance fonctionale suivant les puissances de sa variable, ou plutôt suivant celles de la différence entre cette variable et la quantité constante r, tirée de l'équation $\varphi^n x = x$. Mais il existe encore un autre moyen, qui non seulement a, sur celui-là, l'avantage de mieux préciser la loi de la formation des coëfficiens cherchés, mais qui, en même tems, se prête facilement à la solution du second problème, que nous nous sommes proposé, de celui du développement des puissances fonctionales suivant les puissances de leurs exposans. Le voici.

Les différentiations de la fonction $\varphi^n x$, telles que nous les avons entamées ci-dessus, continuées jusqu'à un certain ordre des différentielles, conduisent, après y avoir fait $x = r$, à une hypothèse relative à la forme que doivent avoir les coëfficiens $\overset{n}{c}_k$. Supposant, en vertu de cette hypothèse:

$$\overset{n}{c}_k = \overset{k}{A}_1 \varphi' r^n + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^{2n} + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^{3n} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^{kn} \cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

où $\overset{k}{A}_1$, $\overset{k}{A}_2$, $\overset{k}{A}_3$, ... $\overset{k}{A}_k$ désignent des quantités absolument indépendantes de la variable x et de l'exposant n, on pourra former:

1) Les k équations:

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{k}{A}_1 + \overset{k}{A}_2 + \overset{k}{A}_3 + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k = \overset{0}{c}_k = 0 \text{ (si } k > 1) \\
\overset{k}{A}_1 \varphi' r + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^2 + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^3 + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r_k = \overset{1}{c}_k = \frac{\varphi^{(k)} r}{r!} \\
\overset{k}{A}_1 \varphi' r^2 + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^4 + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^6 + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^{2k} = \overset{2}{c}_k \\
\overset{k}{A}_1 \varphi' r^3 + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^6 + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^9 + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^3 k = \overset{3}{c}_k \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\overset{k}{A}_1 \varphi' r^{k-1} + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^{2(k-1)} + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^{3(k-1)} + \cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^{k(k-1)} = \overset{n-1}{c}_k
\end{array}\right\} \quad (8)$$

pouvant servir à exprimer les coëfficiens $\overset{k}{A}_1$, $\overset{k}{A}_2 \cdots\cdots \overset{k}{A}_k$ en fonctions des $\overset{1}{c}_k$, $\overset{2}{c}_k, \cdots\cdots \overset{n-1}{c}_k$.

2) L'équation:

$$\overset{k}{A}_1 \varphi' r^n + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^{2n} + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^{3n} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^{kn} = \overset{1}{A}_1 \varphi' r^{n-1} S_{k,1}$$
$$+ (\overset{2}{A}_1 \varphi' r^{n-1} + \overset{2}{A}_2 \varphi' r^{2(n-1)}) S_{k,2} + (\overset{3}{A}_1 \varphi' r^{n-1} + \overset{3}{A}_2 \varphi' r^{2(n-1)} + \overset{3}{A}_3 \varphi' r^{3(n-1)}) S_{k,3} + \cdots$$
$$+ (\overset{k}{A}_1 \varphi' r^{n-1} + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^{2(n-1)} + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^{3(n-1)} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^{k(n-1)}) S_{k,k}$$

résultat de la substitution de (7) en (6).

Or, cette dernière pouvant être mise sous la forme:

$$\overset{k}{A}_1 \varphi' r \cdot \varphi' r^{n-1} + \overset{k}{A}_2 \varphi' r^2 \cdot \varphi' r^{2(n-1)} + \overset{k}{A}_3 \varphi' r^3 \cdot \varphi'^{3(n-1)} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k \varphi' r^k \cdot \varphi' r^{k(n-1)} =$$
$$(\overset{1}{A}_1 S_{k,1} + \overset{2}{A}_1 S_{k,2} + \overset{3}{A}_1 S_{k,3} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_1 S_{k,k}) \varphi' r^{n-1} +$$
$$(\overset{2}{A}_2 S_{k,2} + \overset{3}{A}_2 S_{k,3} + \overset{4}{A}_2 S_{k,4} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_2 S_{k,k}) \varphi' r^{2(n-1)} +$$
$$(\overset{3}{A}_3 S_{k,3} + \overset{4}{A}_3 S_{k,4} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_3 S_{k,k}) \varphi' r^{3(n-1)} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k S_{k,k} \varphi' r^{k(n-1)}$$

et devant avoir lieu indépendamment de toute valeur particulière de n, on en tirera encore k autres équations:

$$\begin{array}{r}
\overset{1}{A}_1 S_{k,1} + \overset{2}{A}_1 S_{k,2} + \overset{3}{A}_1 S_{k,3} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_1 S_{k,k} = \overset{k}{A}_1 \varphi' r \\
\overset{2}{A}_2 S_{k,2} + \overset{3}{A}_2 S_{k,3} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_2 S_{k,k} = \overset{k}{A}_2 \varphi' r^2 \\
\overset{3}{A}_3 S_{k,3} + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_3 S_{k,k} = \overset{k}{A}_3 \varphi' r^3 \\
\vdots \\
\overset{k}{A}_k S_{k,k} = \overset{k}{A}_k \varphi' r^k
\end{array}$$

dont la dernière cependant, à cause de $S_{k,k} = \varphi' r^k$ (v. 3), n'est qu'identique. Donc, si on la remplace par la première des équations (8), c'est-à-dire par $\overset{k}{A}_1 + \overset{k}{A}_2 + \overset{k}{A}_3 + \cdots\cdots + \overset{k}{A}_k = 0$, on a k équations, indépendantes les unes des autres, pour déterminer les k quantités $\overset{k}{A}_1$, $\overset{k}{A}_2$, $\overset{k}{A}_3$, $\cdots\cdots \overset{k}{A}_k$ moyennant les analogues des ordres inférieurs à k.

Examinons d'abord, quels sont les résultats généraux qu'on obtient par la résolution des k équations (8), ce qui suppose qu'on connaît déjà les valeurs des coëfficiens $\overset{n}{c}_k$, ou qu'on sait du-moins dériver ces valeurs de celles des constantes $\varphi' r$, $\frac{\varphi'' r}{2!}$, $\frac{\varphi''' r}{3!}$, etc. Pour cela nous éliminerons en premier lieu tous les coëfficiens $\overset{k}{A}_1$, $\overset{k}{A}_2$, $\overset{k}{A}_3$, $\cdots$ jusqu'à $\overset{k}{A}_{m-1}$, précédant un coëfficient $\overset{k}{A}_m$, choisi arbitrairement pour représenter tous les autres. Ceci étant fait, nous éliminerons également tous les coëfficiens qui suivent ce dernier, c'est-à-dire: $\overset{k}{A}_{m+1}$, $\overset{k}{A}_{m+2}$, etc. jusqu'à $\overset{k}{A}_k$.

La formule

$$\underset{a+b=k-1}{S}[\overset{k}{A}_{a+1}\,\varphi' r^{(a+1)p}] = \overset{p}{c}_k$$

répétée depuis $p = 0$ jusqu'à $p = k-1$, renfermant toutes les équations du système (8), nous en prendrons deux consécutives quelconques:

$$\underset{a+b=k-1}{S}[\overset{k}{A}_{a+1}\,\varphi' r^{(a+1)p}] = \overset{p}{c}_k$$

$$\text{et } \underset{a+b=k-1}{S}[\overset{k}{A}_{a+1}\,\varphi' r^{(a+1)(p-1)}] = \overset{p-1}{c}_k$$

que nous mettrons sous cette forme:

$$\overset{k}{A}_1\,\varphi' r^p + \underset{a+b=k-2}{S}[\overset{k}{A}_{a+2}\,\varphi' r^{(a+2)p}] = \overset{p}{c}_k$$

$$\overset{k}{A}_1\,\varphi' r^{p-1} + \underset{a+b=k-2}{S}[\overset{k}{A}_{a+2}\,\varphi' r^{(a+2)(p-1)}] = \overset{p-1}{c}_k$$

pour en éliminer $\overset{k}{A}_1$. Faisant, pour abréger:

$$\overset{p}{c}_k - \varphi' r\,\overset{p-1}{c}_k = \overset{p}{c}{}'_k$$

l'élimination nous fournit:

$$S\left[\overset{k}{A}_{a+2}\varphi' r^{(a+2)p-(a+1)}(\varphi' r^{a+1}-1)\right]_{a+b=k-2} = \overset{p}{c'}_k$$

ce qui, depuis $p = 1$ jusqu'à $p = k - 1$, renferme $(k-1)$ équations. Prenant de nouveau, de ces dernières, deux équations consécutives, mises sous cette forme:

$$\overset{k}{A}_2\,\varphi' r^{2p-1}(\varphi' r-1) + S\left[\overset{k}{A}_{a+3}\varphi' r^{(a+3)p-(a+2)}(\varphi' r^{a+2}-1)\right]_{a+b=k-3} = \overset{p}{c'}_k$$

$$\overset{k}{A}_2\,\varphi' r^{2p-3}(\varphi' r-1) + S\left[\overset{k}{A}_{a+3}\varphi' r^{(a+3)p-(2a+5)}(\varphi' r^{a+2}-1)\right]_{a+b=k-3} = \overset{p-1}{c'}_k$$

et faisant, pour abréger, $\overset{p}{c'}_k - \varphi' r^2 \overset{k-1}{c'}_k = \overset{p}{c''}_k$, l'élimination de $\overset{k}{A}_2$ nous donne:

$$S\left[\overset{k}{A}_{a+3}\varphi' r^{(a+3)p-(2a+3)}(\varphi' r^{a+1}-1)(\varphi' r^{a+2}-1)\right]_{a+b=k-3} = \overset{p}{c''}_k$$

ce qui, pris depuis $p = 2$ jusqu'à $p = k - 1$, représente un système de $(k-2)$ équations.

Continuant de la même manière on parvient, après quelque tems, à un système de $(k-h+1)$ équations, renfermées toutes dans la formule:

$$S\left[\overset{k}{A}_{a+h}\varphi' r^{(a+h)p-(h-1)a-\frac{h(h-1)}{2}}(\varphi' r^{a+1}-1)(\varphi' r^{a+2}-1)\cdots(\varphi' r^{a+h-1}-1)\right]_{a+b=k-h} = \overset{p}{c}{}^{(h-1)}_k$$

répétée depuis $p = h - 1$ jusqu'à $p = k - 1$. Pour le prouver, on n'a qu'à montrer que, si ce résultat a lieu pour un nombre quelconque déterminé, h, il doit également subsister pour le nombre suivant, $h + 1$. En effet, prenant, de ce dernier système, deux équations consécutives, mises sous cette forme:

$$\overset{k}{A}_h\,\varphi' r^{hp-\frac{h(h-1)}{2}}(\varphi' r-1)(\varphi' r^2-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{h-1}-1) +$$
$$S\left[A_{a+h+1}\varphi' r^{(a+h+1)p-(h-1)(a+1)-\frac{h(h-1)}{2}}(\varphi' r^{a+2}-1)(\varphi' r^{a+3}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{a+h}-1)\right]_{a+b=k-h-1} = \overset{p}{c}{}^{(h-1)}_k$$

$$\overset{k}{A}_h\,\varphi' r^{h(p-1)-\frac{h(h-1)}{2}}(\varphi' r-1)(\varphi' r^2-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{h-1}-1) +$$
$$S\left[\overset{k}{A}_{a+h+1}\varphi' r^{(a+h+1)(p-1)-(h-1)(a+1)-\frac{h(h-1)}{2}}(\varphi' r^{a+2}-1)(\varphi' r^{a+3}-1)\cdots(\varphi' r^{a+h}-1)\right]_{a+b=k-h-1} = \overset{p-1}{c}{}^{(h-1)}_k$$

et faisant $$\overset{p}{c}{}^{(h-1)}_k - \varphi' r^h \overset{p-1}{c}{}^{(h-1)}_k = \overset{p}{c}{}^{(h)}_k \qquad (10)$$

l'élimination de $\overset{k}{A}_h$ donne:

$$S\left[\overset{k}{A}_{a+h+1}\,\varphi' r^{(a+h+1)p-ha-\frac{(h+1)h}{2}}(\varphi' r^{a+1}-1)(\varphi' r^{a+2}-1)\cdots(\varphi' r^{a+h}-1)\right]=\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h)}$$
$$a+b=k-(h+1)$$

ce qui confirme notre supposition qui, pour $h=m$, conduit à un système de $(k-m+1)$ équations, renfermé dans la formule:

$$(11)\cdots\cdot S\left[\overset{k}{A}_{m+a}\,\varphi' r^{(m+a)p-(m-1)a-\frac{m(m-1)}{2}}(\varphi' r^{1+a}-1)(\varphi' r^{2+a}-1)\cdots(\varphi' r^{m-1+a}-1)\right]=\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(m-1)}$$
$$a+b=k-m$$

qui doit être répétée depuis $p=m-1$ jusqu'à $p=k-1$; système, qui ne contient plus que les $(k-m+1)$ coëfficiens $\overset{k}{A}_m$, $\overset{k}{A}_{m+1}$, ... $\overset{k}{A}_k$.

Remarquons que la formule générale (11), pour le cas particulier de $m=k$, se réduit à cette seule équation:

$$\overset{k}{A}_k\,\varphi' r^{\frac{k(k-1)}{2}}(\varphi' r-1)(\varphi' r^2-1)\cdots\cdot(\varphi' r^{k-1}-1)=\overset{k-1}{\underset{k}{c}}{}^{(k-1)}$$

d'où l'on tire:

$$(12)\qquad \overset{k}{A}_k=\frac{\overset{k-1}{\underset{k}{c}}{}^{(k-1)}}{\varphi' r^{\frac{k(k-1)}{2}}(\varphi' r-1)(\varphi' r^2-1)\cdots\cdot(\varphi' r^{k-1}-1)}$$

Suit l'élimination successive des $(k-m)$ coëfficiens $\overset{k}{A}_{m+1}$, $\overset{k}{A}_{m+2}$, ... $\overset{k}{A}_k$, qui viennent après $\overset{k}{A}_m$. Pour cela prenons encore deux équations consécutives du système (11), et mettons-les sous cette forme:

$$\overset{k}{A}_m\varphi' r^{mp-\frac{m(m-1)}{2}}(\varphi' r-1)(\varphi' r^2-1)\cdots(\varphi' r^{m-1}-1)+\overset{k}{A}_{m+1}\varphi' r^{(m+1)p-(m-1)-\frac{m(m-1)}{2}}\times$$
$$(\varphi' r^2-1)(\varphi' r^3-1)\cdots\cdot(\varphi' r^m-1)+$$
$$S\left[\overset{k}{A}_{a+m+2}\,\varphi' r^{(a+m+2)p-(m-1)(a+2)-\frac{m(m-1)}{2}}(\varphi' r^{a+3}-1)\cdots(\varphi' r^{a+m+1}-1)\right]=\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(m-1)}$$
$$a+b=k-m-2$$

et $$\overset{k}{A}_m\,\varphi' r^{m(p-1)-\frac{m(m-1)}{2}}(\varphi' r-1)(\varphi' r^2-1)\cdots\cdot(\varphi' r^{m-1}-1)$$
$$+\overset{k}{A}_{m+1}\,\varphi' r^{(m+1)(p-1)-(m-1)-\frac{m(m-1)}{2}}(\varphi' r^2-1)(\varphi' r^3-1)\cdots\cdot(\varphi' r^m-1)+$$
$$S\left[\overset{k}{A}_{a+m+2}\,\varphi' r^{(a+m+2)(p-1)-(m-1)(a+2)-\frac{m(m-1)}{2}}(\varphi' r^{a+3}-1)\cdots(\varphi' r^{a+m+1}-1)\right]=\overset{p-1}{\underset{k}{c}}{}^{(m-1)}$$
$$a+b=k-m-2$$

puis, faisant $\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(m-1)} - \varphi' r^{m+1} \overset{p-1}{\underset{k}{c}}{}^{(m-1)} = \overset{p}{c}_{k,m}$, (13)

éliminons $\overset{k}{A}_{m+1}$, et nous aurons:

$$- \overset{k}{A}_m \varphi' r^{mp - \frac{m(m-1)}{2}} (\varphi' r - 1)^2 (\varphi' r^2 - 1)(\varphi' r^3 - 1) \cdots (\varphi' r^{m-1} - 1) +$$
$$S\Big[\overset{k}{A}_{a+m+2} \varphi' r^{(a+m+2)p - ma - \frac{m(m-1)}{2} - 2m + 1} (\varphi' r^{a+1} - 1)(\varphi' r^{a+3} - 1) \times$$
$$a + b = k - m - 2$$
$$(\varphi' r^{a+4} - 1) \cdots (\varphi' r^{a+m+1} - 1)\Big] = \overset{p}{c}_{k,m}$$

ce qui, depuis $p = m$ jusqu'à $p = k - 1$, constitue un système de $(k-m)$ équations.

En suivant toujours ce même procédé, et faisant successivement:

$$\overset{p}{c}_{k,m} - \varphi' r^{m+2} \overset{p-1}{c}_{k,m} = \overset{p}{c}{}'_{k,m}$$
$$\overset{p}{c}{}'_{k,m} - \varphi' r^{m+3} \overset{p-1}{c}{}'_{k,m} = \overset{p}{c}{}''_{k,m}$$

et généralement:

$$\overset{p}{\underset{k,m}{c}}{}^{(h-1)} - \varphi' r^{m+h+1} \overset{p-1}{\underset{k,m}{c}}{}^{(h-1)} = \overset{p}{\underset{k,m}{c}}{}^{(h)} \qquad (14)$$

on parvient à un système de $(k-m-h+2)$ équations contenues dans la formule:

$$(-1)^{h-1} \overset{k}{A}_m \varphi' r^{mp - \frac{m(m-1)}{2}} (\varphi' r - 1)^2 (\varphi' r^2 - 1)^2 \cdots (\varphi' r^{h-1} - 1)^2 (\varphi' r^h - 1)(\varphi' r^{h+1} - 1) \cdots (\varphi' r^{m-1} - 1)$$
$$+ S\Big[\overset{k}{A}_{m+h+a} \varphi' r^{(m+h+a)p - (m+h-2)a - \frac{m(m-1)}{2} - hm - \frac{h(h-3)}{2}} (\varphi' r^{1+a} - 1) \times$$
$$(\varphi' r^{2+a} - 1) \cdots (\varphi' r^{h-1+a} - 1)(\varphi' r^{h+1+a})(\varphi' r^{h+2+a} - 1) \cdots (\varphi' r^{m+h-1+a} - 1)\Big] = \overset{p}{\underset{k,m}{c}}{}^{(h-2)}$$
$$a + b = k - m - h$$

depuis $p = m + h - 2$ jusqu'à $p = k - 1$; ce qui peut être démontré de la manière employée ci-dessus. Pour $h = k - m$ cette dernière formule prend la forme suivante:

$$(15) \cdots (-1)^{k-m-1} \overset{k}{A}_m \varphi' r^{mp - \frac{m(m-1)}{2}} (\varphi' r - 1)^2 (\varphi' r^2 - 1)^2 \cdots (\varphi' r^{k-m-1} - 1)^2 \times$$
$$(\varphi' r^{k-m} - 1) \cdots (\varphi' r^{m-1} - 1) + \overset{k}{A}_k \varphi' r^{kp - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(k-m)(k+m-3)}{2}} (\varphi' r - 1) \times$$
$$(\varphi' r^2 - 1) \cdots (\varphi' r^{k-m-1} - 1)(\varphi' r^{k-m+1} - 1) \cdots (\varphi' r^{k-1} - 1) = \overset{p}{\underset{k,m}{c}}{}^{(k-m-2)}$$

ce qui, depuis $p = k - 2$ jusqu'à $p = k - 1$, renferme un système de deux équations, desquelles, en éliminant $\overset{k}{A}_k$, on tire:

$$(-1)^{k-m}\overset{k}{A}_m\varphi'r^{mk-\frac{(m+1)m}{2}}(\varphi'r-1)^2(\varphi'r^2-1)^2\cdots(\varphi'r^{k-m}-1)^2(\varphi'r^{k-m+1}-1)\cdots$$
$$\cdots\cdots(\varphi'r^{m-1}-1)=\overset{k-1}{\underset{k,m}{c}}{}^{(k-m-2)}-\varphi'r^k\overset{k-2}{\underset{k\,m}{c}}{}^{(k-m-2)}=\overset{k-1}{\underset{k,m}{c}}{}^{(k-m-1)}$$

ou bien:

$$(16)\ \overset{k}{A}_m=(-1)^{k.m}\frac{\overset{k-1}{\underset{k,m}{c}}{}^{(k-m-1)}}{\varphi'r^{mk-\frac{(m+1)m}{2}}(\varphi'r-1)(\varphi'r^2-1)\cdots(\varphi'r^{k-m}-1)\times(\varphi'r-1)(\varphi'r^2-1)\cdots(\varphi'r^{m-1}-1)}$$

L'usage de cette formule générale exige un retour des signes $\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h)}$ et $\overset{p}{\underset{k,m}{c}}{}^{(h)}$, introduits pour abréger les transitions du calcul, aux signes primitifs. Ce retour doit s'opérer moyennant les équations (10) et (14.)

La première de ces équations, ou plutôt le système d'équations qu'elle représente, conduit, après des substitutions successives, à ce résultat général:

$$(17)\ \overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h)}=\underset{a+b=q}{S}\left[(-1)^a\varphi'r^{a(h-q)+\frac{(a+1)a}{2}}\frac{(\varphi'r^q-1)(\varphi'r^{q-1}-1)\cdots\cdots(\varphi'r^{q-(a-1)}-1)}{(\varphi'r-1)(\varphi'r^2-1)\cdots\cdots(\varphi'r^a-1)}\overset{p-a}{\underset{k}{c}}{}^{(h-q)}\right]$$

équation, dont le second membre a pour premier terme $\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h-q)}$.

Puisque pour $q=1$ on en tire:

$$\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h)}=\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h-1)}-\varphi'r^h\overset{p-1}{\underset{k}{c}}{}^{(h-1)}$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (10), il faut, pour démontrer la vérité de la proposition (17), prouver seulement, que si cette vérité subsiste pour un nombre quelconque déterminé, q, elle devra également avoir lieu pour le nombre suivant, $q+1$. Or, en vertu de l'équation (10), on a: $\overset{p}{\underset{k}{c}}{}^{(h)}=$

$$\underset{a+b=q}{S}\left[(-1)^a\varphi'r^{a(h-q)+\frac{(a+1)a}{2}}\frac{(\varphi'r^q-1)\cdots\cdots(\varphi'r^{q-(a-1)}-1)}{(\varphi'r-1)\cdots\cdots(\varphi'r^a-1)}\left(\overset{p-a}{\underset{k}{c}}{}^{(h-q-1)}-\varphi'r^{h-q}\overset{p-a-1}{\underset{k}{c}}{}^{(h-q-1)}\right)\right]$$

$$=\underset{a+b=q}{S}\left[(-1)^a\varphi'r^{a(h-q)+\frac{(a+1)a}{2}}\frac{(\varphi'r^q-1)\cdots\cdots(\varphi'r^{q-(a-1)}-1)}{(\varphi'r-1)\cdots\cdots(\varphi'r^a-1)}\overset{p-a}{\underset{k}{c}}{}^{(h-q-1)}\right]-$$

$$\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\varphi' r^{(\mathfrak{a}+1)(h-q)+\frac{(\mathfrak{a}+1)\mathfrak{a}}{2}}\frac{(\varphi' r^{q}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{q-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}-1}C_{k}^{(h-q-1)}\right]=$$

$${}^{p}C_{k}^{(h-q-1)}+\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\varphi' r^{(\mathfrak{a}+1)(h-q)+\frac{(\mathfrak{a}+2)(\mathfrak{a}+1)}{2}}\frac{\varphi' r^{q}-1)\cdots(\varphi' r^{q-\mathfrak{a}}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}+1}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}-1}C_{k}^{(h-q-1)}\right]$$

$$+\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\varphi' r^{(\mathfrak{a}+1)(h-q)+\frac{(\mathfrak{a}+1)\mathfrak{a}}{2}}\frac{(\varphi' r^{q}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{q-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}-1}C_{k}^{(h-q-1)})\right]$$

$$+(-1)^{q}\varphi' r^{(q+1)(h-q)+\frac{(q+1)q}{2}}\,{}^{p-\mathrm{I}-1}C_{k}^{(h-q-1)}={}^{p}C_{k}^{(h-q-1)}+$$

$$\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\varphi' r^{(\mathfrak{a}+1)(h-q)+\frac{(\mathfrak{a}+1)\mathfrak{a}}{2}}\frac{(\varphi' r^{q}-1)\cdots(\varphi' r^{q-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\left(\varphi' r^{\mathfrak{a}+1}\frac{\varphi' r^{q-\mathfrak{a}}-1}{\varphi' r^{\mathfrak{a}+1}-1}+1\right)\,{}^{p-\mathfrak{a}-1}C_{k}^{(h-q-1)}\right]$$

$$+(-1)^{q}\varphi' r^{(q+1)(h-q)+\frac{(q+1)q}{2}}\,{}^{p-q-1}C_{k}^{(h-q-1)}={}^{p}C_{k}^{(h-q-1)}+$$

$$\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\varphi' r^{(\mathfrak{a}+1)(h-q)+\frac{(\mathfrak{a}+1)\mathfrak{a}}{2}}\frac{(\varphi' r^{q+1}-1)(\varphi' r^{q}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{q+1-\mathfrak{a}}-1)}{(\varphi' r-1)\,(\varphi' r^{2}-1)\cdots\cdots(\varphi\, r^{\mathfrak{a}+1}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}-1}C_{k}^{(h-q-1)}\right]$$

$$+(-1)^{q}\varphi' r^{(q+1)(h-q)+\frac{(q+1)q}{2}}\,{}^{p-q-1}C_{k}^{(h-q-1)}=$$

$$\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\varphi' r^{\mathfrak{a}(h-q)+\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2}}\frac{(\varphi' r^{q+1}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{q+1-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots\cdots\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}}C_{k}^{(h-q-1)}\right]+$$

$$(-1)^{q}\varphi' r^{(q+1)(h-q)+\frac{(q+1)q}{2}}\,{}^{p-q-1}C_{k}^{(h-q-1)}=$$

$$\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q+1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\varphi' r^{\mathfrak{a}(h-q-1)+\frac{(\mathfrak{a}+1)\mathfrak{a}}{2}}\frac{(\varphi' r^{q+1}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{q+1-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots\cdots\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}}C_{k}^{(h-q-1)}\right]$$

La proposition (17) est donc démontrée.

L'équation (14) conduit pareillement à cet autre résultat général:

$${}^{p}C_{k,m}^{(h)}=\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=q}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\varphi' r^{\mathfrak{a}(m+h-q+2)+\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2}}\frac{(\varphi' r^{q}-1)(\varphi' r^{q-1}-1)\cdot\cdot(\varphi' r^{q-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)(\varphi' r^{2}-1)\cdot\cdot(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\,{}^{p-\mathfrak{a}}C_{k,m}^{(h-q)}\right]\quad(18)$$

qui peut être démontré d'une manière absolument semblable à la précédente.

Si, dans ces deux formules, (17) et (18), on fait $q = h$, on aura:

$$ {}^{p}C^{(h)}_{k} = S\left[(-1)^{a}\,\varphi' r^{\frac{(a+1)a}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h}-1)(\varphi' r^{h-1}-1)\cdots(\varphi' r^{h-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)(\varphi' r^{2}-1)\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-a}C_{k}\right]_{a+b=h} \qquad (19) $$

et

$$ {}^{p}C^{(h)}_{k,m} = S\left[(-1)^{a}\,\varphi' r^{a(m+2)+\frac{a(a-1)}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h}-1)(\varphi' r^{h-1}-1)\cdots(\varphi' r^{h-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)(\varphi' r^{2}-1)\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-a}C_{k,m}\right]_{a+b=h} $$

Or, comme ${}^{p}C_{k,m} = {}^{p}C^{(m-1)}_{k} - \varphi' r^{m+1}\,{}^{p-1}C^{(m-1)}_{k}$ (13), la dernière formule se réduit à:

$$ {}^{p}C^{(h)}_{k,m} = S\left[(-1)^{a}\,\varphi' r^{a(m+2)+\frac{a(a-1)}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h}-1)\cdots(\varphi' r^{h-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h} - $$

$$ S\left[(-1)^{a}\,\varphi' r^{(a+1)(m+1)+\frac{(a+1)a}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h}-1)\cdots(\varphi' r^{h-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-1-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h} = $$

$$ {}^{p}C^{(m-1)}_{k} + S\left[(-1)^{a+1}\,\varphi' r^{(a+1)(m+2)+\frac{(a+1)a}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h}-1)\cdots(\varphi' r^{h-a}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{a+1}-1)}\,{}^{p-1-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h-1} + $$

$$ S\left[(-1)^{a+1}\,\varphi' r^{(a+1)(m+1)+\frac{(a+1)a}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h}-1)\cdots(\varphi' r^{h-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-1-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h-1} + $$

$$ (-1)^{h}\,\varphi' r^{(h+1)(m+1)+\frac{(h+1)h}{2}}\,{}^{p-h-1}C^{(m-1)}_{k} = {}^{p}C^{(m-1)}_{k} + $$

$$ S\left[(-1)^{a+1}\,\varphi' r^{(a+1)(m+1)+\frac{(a+1)a}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h+1}-1)\cdots(\varphi' r^{h+1-a}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{a+1}-1)}\,{}^{p-1-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h-1} + $$

$$ (-1)^{h+1}\,\varphi' r^{(h+1)(m+1)+\frac{(h+1)h}{2}}\,{}^{p-h-1}C^{(m-1)}_{k} = $$

$$ S\left[(-)^{a}\,\varphi' r^{a(m+1)+\frac{a(a-1)}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h+1}-1)(\varphi' r^{h}-1)\cdots(\varphi' r^{h+1-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)(\varphi' r^{2}-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h+1} $$

de sorte qu'on obtient:

$$ (20)\quad {}^{p}C^{(h)}_{k,m} = S\left[(-1)^{a}\varphi' r^{a(m+1)+\frac{a(a-1)}{2}}\,\frac{(\varphi' r^{h+1}-1)(\varphi' r^{h}-1)\cdots(\varphi' r^{h+1-(a-1)}-1)}{(\varphi' r-1)(\varphi' r^{2}-1)\cdots(\varphi' r^{a}-1)}\,{}^{p-a}C^{(m-1)}_{k}\right]_{a+b=h+1} $$

Les formules (19) et (20), particularisées pour le cas de l'équation (16), deviennent enfin:

$$\left.\begin{aligned}\overset{k-1}{C}{}^{(k-m-1)}_{k,m} &= S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\varphi' r^{\mathfrak{a}(m+1)+\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2}}\frac{(\varphi' r^{k-m}-1)\cdot\cdot(\varphi' r^{k-m-(\mathfrak{a}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\overset{k-1-\mathfrak{a}}{C}{}^{(m-1)}_{k}\right]\\ &\qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=k-m\\ \overset{k-1-\mathfrak{a}}{C}{}^{(m-1)}_{k} &= S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\varphi' r^{\frac{(\mathfrak{b}+1)\mathfrak{b}}{2}}\frac{(\varphi' r^{m-1}-1)\cdots(\varphi' r^{m-1-(\mathfrak{b}-1)}-1)}{(\varphi' r-1)\cdots\cdots(\varphi' r^{\mathfrak{b}}-1)}\overset{k-1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{C_k}\right]\\ &\qquad \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m-1\end{aligned}\right\}(21)$$

Passons maintenant au second système d'équations relatives aux coëfficiens $\overset{k}{A}_1$, $\overset{k}{A}_2$, etc. (9).

Prenant une quelconque de ces équations:

$$\overset{m}{A}_m S_{m+p,m}+\overset{m+1}{A}_m S_{m+p,m+1}+\overset{m+2}{A}_m S_{m+p,m+2}+\cdots+\overset{m+p}{A}_m S_{m+p,m+p}=\overset{m+p}{A}_m\varphi' r^m$$

nous en tirons, à cause de $S_{m+p,\, m+p}=\varphi' r^{m+p}$:

$$\overset{m+p}{A}_m\varphi' r^m(\varphi' r^p-1)=-\overset{m}{A}_m S_{m+p,m}-\overset{m+1}{A}_m S_{m+p,m+1}-\cdots-\overset{m+p-1}{A}_m S_{m+p,m+p-1}$$

ou bien:

$$\overset{m+p}{A}_m=S\left[\overset{m+\mathfrak{a}}{A}_m\left(-\frac{S_{m+p,m+\mathfrak{a}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^p-1)}\right)\right]\qquad(22)$$
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=p-1$$

ce qui, à l'aide de substitutions successives, conduit enfin à:

$$\overset{m+p}{A}_m=\overset{m}{A}_m S\left[\left(-\frac{S_{m+p,\,m+\mathfrak{a}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^p-1)}\right)\left(-\frac{S_{m+\mathfrak{a},\,m+\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{\varphi r^m(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\right)\left(-\frac{S_{m+\overset{1}{\mathfrak{a}},\,m+\overset{2}{\mathfrak{a}}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}-1)}\right)\cdot\cdot\left(-\frac{S_{m+\overset{p-2}{\mathfrak{a}},\,m+\overset{p-1}{\mathfrak{a}}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^{\overset{p-2}{\mathfrak{a}}}-1)}\right)\right]\qquad(23)$$

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=p-1$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}=\mathfrak{a}-1$$
$$\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}=\overset{1}{\mathfrak{a}}-1$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\overset{p-1}{\mathfrak{a}}+\overset{p-1}{\mathfrak{b}}=\overset{p-2}{\mathfrak{a}}-1$$

où il faut faire observer, que chaque fois, que l'un des seconds membres des équations de condition devient négatif, le produit sous le signe S ne se compose que des facteurs déterminés moyennant les équations de condition précédant celles, dont les seconds membres sont négatifs.

Quant à la démonstration de cette proposition, supposons que la vérité en soit reconnue pour tous les nombres représentés par la lettre p, depuis 1 jusqu'à un certain nombre déterminé p. Alors on aura:

$$\overset{m+p+1}{A}_m = S\left[\overset{m+\mathfrak{a}}{A}_m\left(-\frac{S_{m+p+1,\,m+\mathfrak{a}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^{p+1}-1)}\right)\right] =$$
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=p$$

$$\overset{m}{A}_m S\left[\left(-\frac{S_{m+p+1,\,m+\mathfrak{a}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^{p+1}-1)}\right)\left(-\frac{S_{m+\mathfrak{a},\,m+\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^{\mathfrak{a}}-1)}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{S_{m+\overset{p-1}{\mathfrak{a}},\,m+\overset{p}{\mathfrak{a}}}}{\varphi' r^m(\varphi' r^{\overset{p-1}{\mathfrak{a}}}-1)}\right)\right]$$
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=p$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}=\mathfrak{a}-1$$
$$\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}=\overset{1}{\mathfrak{a}}-1$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\overset{p}{\mathfrak{a}}+\overset{p}{\mathfrak{b}}=\overset{p-1}{\mathfrak{a}}-1$$

Or, pour $p=1$, l'équation (23) donne:

$$\overset{m+1}{A}_m = \overset{m}{A}_m\left(-\frac{S_{m+1,\,m}}{\varphi' r^m(\varphi' r-1)}\right)$$

ce qui, étant d'accord avec l'équation (22), suffit pour faire valoir la formule (23) pour tous les nombres p.

C'est à l'aide de cette proposition qu'on s'élève successivement à cette autre:

$$(24)\qquad \overset{m+p}{A}_m = \overset{m}{A}_m\, S\left[\frac{m!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots}(\overset{1}{A}_1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(\overset{2}{A}_1)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}(\overset{3}{A}_1)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\right]$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+3\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots=m+p$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots=m$$

très-remarquable sous plusieurs rapports. La démonstration, que j'en ai trouvée jusqu'ici, me paraissant encore manquer de l'élégance et de la simplicité, dont je la crois susceptible, je la supprime pour le moment, me réservant de la faire entrer dans une suite prochaine de recherches analogues à celles dont je me suis occupé ici. Maintenant, passons aux premières conséquences qui découlent de cette nouvelle proposition.

Puisqu'en vertu du théorème polynomial:

$$(\overset{1}{A}_1(x-r)+\overset{2}{A}_1(x-r)^2+\overset{3}{A}_1(x-r)^3+\cdots\cdots)^m=$$

$$S\left[\frac{m!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots}(\overset{1}{A}_1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(\overset{2}{A}_1)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}(\overset{3}{A}_1)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots(x-r)^{m+\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+3\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=m+\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=m$$

on trouve par notre proposition (24):

$$(25)\quad \overset{m}{A}_m(\overset{1}{A}_1(x-r)+\overset{2}{A}_1(x-r)^2+\overset{3}{A}_1(x-r)^3+\cdots)^m=S\left[\overset{m+\mathfrak{b}}{A}_m(x-r)^{m+\mathfrak{b}}\right]$$

$$=\overset{m}{A}_m(x-r)^m+\overset{m+1}{A}_m(x-r)^{m+1}+\overset{m+2}{A}_m(x-r)^{m+2}+\cdots$$

Or, l'équation (1) pouvant, moyennant la formule (7), être mise sous cette forme:

$$(26)\quad \varphi^n x=r+\overset{1}{A}_1\varphi'r^n(x-r)+\left[\overset{2}{A}_1\varphi'r^n+\overset{2}{A}_2\varphi'r^{2n}\right](x-r)^2+\left[\overset{3}{A}_1\varphi'r^n+\overset{3}{A}_2\varphi'r^{2n}\right.$$

$$\left.+\overset{3}{A}_3\varphi'r^{3n}\right](x-r)^3+\cdots\cdots+\left[\overset{k}{A}_1\varphi'r^n+\overset{k}{A}_2\varphi'r^{2n}+\overset{k}{A}_3\varphi'r^{3n}\right.$$

$$\left.+\overset{k}{A}_4\varphi'r^{4n}+\cdots\cdots+\overset{k}{A}_k\varphi'r^{kn}\right](x-r)^k+\cdots\cdots$$

et puis, sous celle-ci:

$$(27)\quad \varphi^n x=r+(\overset{1}{A}_1(x-r)+\overset{2}{A}_1(x-r)^2+\overset{3}{A}_1(x-r)^3+\cdots+\overset{k}{A}_1(x-r)^k+\cdots)\varphi'r^n$$

$$+(\overset{2}{A}_2(x-r)^2+\overset{3}{A}_2(x-r)^3+\cdots\cdots+\overset{k}{A}_2(x-r)^k+\cdots)\varphi'r^{2n}$$

$$+(\overset{3}{A}_3(x-r)^3+\cdots\cdots+\overset{k}{A}_3(x-r)^k+\cdots)\varphi'r^{3n}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

il suit de (25) que:

$$(28)\quad \varphi^n x = r + (\overset{1}{A}_1(x-r) + \overset{2}{A}_1(x-r)^2 + \overset{3}{A}_1(x-r)^3 + \cdots\cdots)\varphi'r^n$$
$$+ \overset{2}{A}_2(\overset{1}{A}_1(x-r) + \overset{2}{A}_1(x-r)^2 + \overset{3}{A}_1(x-r)^3 + \cdots\cdots)^2\varphi'r^{2n}$$
$$+ \overset{3}{A}_3(\overset{1}{A}_1(x-r) + \overset{2}{A}_1(x-r)^2 + \overset{3}{A}_1(x-r)^3 + \cdots\cdots)^3\varphi'r^{3n}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Donc, en faisant:

$$(29)\quad \overset{1}{A}_1(x-r) + \overset{2}{A}_1(x-r)^2 + \overset{3}{A}_1(x-r)^3 + \cdots = f(x-r)$$

on aura:

$$(30)\quad \varphi^n x = r + \varphi'r^n \cdot f(x-r) + \overset{2}{A}_2(\varphi'r^n \cdot f(x-r))^2 + \overset{3}{A}_3(\varphi'r^n \cdot f(x-r))^3 +$$
$$= r + S[\overset{a+1}{A}_{a+1}(\varphi'r^n f(x-r))^{a+1}] = S[\overset{a}{A}_a(\varphi'r^n f(x-r))^a]$$

où $\overset{0}{A}_0 = A = r$, et $\overset{1}{A}_1 = 1$.

$$\text{Or } \varphi'r^n = 1 + \frac{\log.\ \varphi'r}{1!}n + \frac{(\log.\ \varphi'r)^2}{2!}n^2 + \frac{\log\ \varphi'r)^3}{3!}n^3 + \cdots\cdots$$
$$\varphi'r^{2n} = 1 + \frac{\log.\ \varphi'r}{1!}2n + \frac{(\log.\ \varphi'r)^2}{2!}4n^2 + \frac{(\log.\ \varphi'r)^3}{3!}8n^3 + \cdots\cdots$$
$$\varphi'r^{3n} = 1 + \frac{\log.\ \varphi'r}{1!}3n + \frac{(\log.\ \varphi'r)^2}{2!}9r^2 + \frac{(\log.\ \varphi'r)^3}{3!}27n^3 + \cdots\cdots$$

etc. etc.

par conséquent:

$$(31)\quad \varphi^n x = \left(r + f(x-r) + \overset{2}{A}_2(f(x-r))^2 + \overset{3}{A}_3(f(x-r))^3 + \cdots\right) +$$
$$\left(f(x-r) + 2\overset{2}{A}_2(f(x-r))^2 + 3\overset{3}{A}_3(f(x-r))^3 + \cdots\right)\log.\varphi'r\cdot n +$$
$$\left(f(x-r) + 4\overset{2}{A}_2(f(x-r))^2 + 9\overset{3}{A}_3(f(x-r))^3 + \cdots\right)\frac{(\log.\varphi'r)^2}{2!}n^2 +$$
$$\left(f(x-r) + 8\overset{2}{A}_2(f(x-r))^2 + 27\overset{3}{A}_3(f(x-r))^3 + \cdots\right)\frac{(\log.\varphi'r)^3}{3!}n^3 +$$

etc. etc.

Mais, en faisant, dans l'équation (30), $n = 0$, on en tire:

$$x = r + f(x-r) + \overset{2}{A}_2(f(x-r))^2 + \overset{3}{A}_3(f(x-r))^3 + \cdots$$

et partant:

$$f(x-r)+2\overset{2}{A}_2(f(x-r))^2+3\overset{3}{A}_3(f(x-r))^3+\cdots=\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}$$

$$f(x-r)+4\overset{2}{A}_2(f(x-r))^2+9\overset{3}{A}_3(f(x-r))^3+\cdots=\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}\frac{d\left(\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}\right)}{dx}$$

$$f(x-r)+8\overset{2}{A}_2(f(x-r))^2+27\overset{3}{A}_3(f(x-r))^3+\cdots=\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}\frac{d\left[\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}\frac{d\left(\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}\right)}{dx}\right]}{dx}$$

etc. etc.

d'où, en faisant $\frac{f(x-r)}{f'(x-r)}=X$, l'on obtient:

$$\varphi^n x = x + X\cdot\log.\varphi' r\cdot n + X\frac{dX}{dx}\cdot\frac{(\log.\varphi' r)^2}{2!}n^2 + X\frac{d\left(X\cdot\frac{dX}{dx}\right)}{dx}\frac{(\log.\varphi' r)^3}{3!}n^3 +$$

$$X\frac{d\left[X\frac{d\left(X\cdot\frac{dX}{dx}\right)}{dx}\right]}{dx}\frac{(\log.\varphi' r)^4}{4!}n^4+\cdots\cdot\cdot$$

ce qui est le développement exigé, suivant les puissances de l'exposant n de la puissance fonctionale $\varphi^n x$.

SUR UN CAS SINGULIER

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES

INCOMPRESSIBLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 19 fevrier 1836.)

La mécanique ne met d'autre distinction entre les différents corps, ou systèmes de corps, que celle qui est relative à leurs masses, à leurs positions et à leurs déplacements possibles. Ces déplacements étant donnés avec la masse, ou la quantité d'inertie de chaque élément du système, on a tout ce qu'il faut pour traiter de l'équilibre ou du mouvement de tout système quelconque. Mais aussi, pour cet objet, la connaissance des masses et des déplacements possibles est indispensable.

Pour qu'un système sollicité par des forces quelconques reste en équilibre, il est nécessaire qu'aucun des déplacements, possibles pour le système, ne le soit pour les forces, c'est-à-dire que les forces ne puissent imprimer aucun déplacement de tous ceux que le système est capable de recevoir. Or les forces pouvant produire tous les déplacements dont le moment total est positif, et aucun de ceux qui répondent au moment zéro ou négatif, il s'en suit que, pour l'équilibre du sy-

stème, le moment total doit être zéro ou négatif pour tous les déplacements possibles. On tire de ce grand principe, de la manière la plus simple et la plus facile, la condition de l'équilibre du système, sans avoir besoin de rien autre chose que de la connaissance des masses et des déplacements possibles. Ainsi, en particulier, pour l'équilibre des liquides, on n'a point besoin du principe d'expérience, connu sous le nom de l'égalité des pressions, sur lequel les géomètres, avant la publication de la Mécanique analytique, basaient la théorie de l'équilibre des fluides. Il suffit de savoir comment une masse liquide peut être déplacée, et c'est d'après cette seule donnée, que sont formées, dans la Mécanique analytique, les équations relatives à l'équilibre des liquides. Mais Lagrange, ayant négligé de considérer les déplacements accompagnés de l'augmentation du volume, déplacements évidemment possibles, n'a pas pu déduire de son analyse une condition essentielle, savoir que la quantité, qui représente la pression, doit nécessairement être positive. En ajoutant cette condition, la théorie de Lagrange deviendra la plus satisfaisante de toutes celles où l'on considère les liquides comme des masses continues; et s'il reste encore une remarque à y ajouter, c'est qu'on y prend, pour condition de l'incompressibilité du fluide, l'incompressibilité des parallélépipèdes différentiels; tandis qu'on devrait exprimer directement qu'une portion quelconque, finie ou infiniment petite, de la masse liquide ne peut diminuer. A la vérité, comme on peut supposer un volume quelconque composé d'éléments différentiels, l'incompressibilité de ceux-ci entraîne celle du volume. Cependant on désirerait voir, comment le calcul exprimerait directement l'incompressibilité d'une portion quelconque du volume liquide.

Pour le montrer, désignons par x, y, z les coordonnées d'un point du liquide, coordonnées qui, par leur variabilité, appartiendront à tous les points. Une portion quelconque du volume liquide peut être exprimée par $\int dx\,dy\,dz$, l'intégrale étant prise entre les limites convenables; il faudra donc exprimer que $\int dx\,dy\,dz$ ne peut diminuer pendant que le liquide reçoit un déplacement quelconque. Pour cela, désignons respectivement par δx, δy, δz, les projections sur les axes coordonnés x, y, z de l'espace que le point (x, y, z) aurait parcouru par

suite d'un déplacement qu'on aurait donné, ou seulement imaginé, dans le liquide. Le point (x, y, z) après le déplacement, possible ou non, répondrait aux coordonnées $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, que, pour abréger, nous représenterons respectivement par X, Y, Z. Tout autre point du volume $\int dx\,dy\,dz$, se déplaçant semblablement, le volume entier prendrait une autre position dans l'espace, et ses divers points seraient définis par les coordonnées X, Y, Z qu'on pourra regarder comme fonctions entièrement arbitraires de x, y, z. Le volume $\int dx dy dz$, dans sa nouvelle position, deviendrait $\int dX dY dZ$, et par conséquent subirait la variation

$$\int dX dY dZ - \int dx dy dz$$

que nous allons développer.

Pour mieux comparer entr'elles les intégrales $\int dX dY dZ$, $\int dx dy dz$, il faut les ramener aux mêmes variables et aux mêmes limites, ce qu'on obtiendra en transformant, par les formules connues, les coordonnées X, Y, Z en x, y, z. Nous avons pour cet objet

$$dX\,dY\,dZ = \left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz} - \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dy} + \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dz} + \frac{dX}{dz}\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dy} - \frac{dX}{dz}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dx}\right) dx dy dz$$

et, par conséquent, la variation du volume deviendra

$$S\left[\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz} - \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dy} + \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dz} + \frac{dX}{dz}\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dy} - \frac{dX}{dz}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dx} - 1\right] dx dy dz;$$

en substituant pour X, Y, Z leurs valeurs $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ et en ne conservant, conformément à l'esprit du calcul différentiel, que les infiniment petits de l'ordre le moins élevé, on trouve, pour la variation du volume,

$$S\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) dx\,dy\,dz\,;$$

or, si l'on ne considère que le déplacement possible, le volume ne peut qu'augmenter ou rester le même; donc la variation précédente doit être zéro ou positive pour tous les déplacements possibles, et elle doit l'être quel que soit le volume que l'on considère, c'est-à-dire quelles que soient les limites de l'intégrale $S\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) dx dy dz$, ce qui ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait $\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \geqq o$ pour tous les

déplacements possibles. On aurait pu employer les coordonnées polaires ou d'autres coordonnées quelconques. On pourrait également, si l'on en avait besoin, exprimer l'invariabilité d'une portion de masse, etc.

Les géomètres, qui ont traité de l'équilibre des fluides d'après Euler, ont aussi considéré l'équilibre des parallélépipèdes différentiels; mais on pourrait équilibrer une portion quelconque du volume, finie ou infiniment petite. En effet, imaginons, dans l'intérieur du liquide, un volume à volonté; il faut établir la condition de l'équilibre de ce volume en vertu des forces motrices qui lui sont appliquées, et des pressions exercées à sa surface. En désignant par dm un élément de sa masse, élément qui répond au coordonnées x, y, z, et par X, Y, Z les forces accélératrices, parallèles aux axes coordonnés. Xdm, Ydm, Zdm seront les forces motrices; chaque autre élément sera sollicité par de pareilles forces.

Cela posé, soit p la pression exercée à la surface du volume en question. Si l'on désigne par ds un élément de cette surface, et par λ, μ, ν les angles que la normale à ds, prolongée en dehors du volume, fait avec les axes coordonnés. pds sera la pression supportée par l'élément ds, et $-p\cos.\lambda ds$, $-p\cos.\mu ds$, $-p\cos.\nu ds$ les composantes de cette pression. Maintenant, chaque élément du volume étant sollicité par les forces Xdm, Ydm, Zdm, et chaque élément de la surface, par les forces $-p\cos.\lambda ds$, $-p\cos.\mu ds$, $-p\cos.\nu ds$, il faut équilibrer le volume à la masse du système invariable. Pour cela, on supposera que le volume devenant rigide, soit invariablement lié à l'origine des coordonnées; on y transportera toutes les forces Xdm, Ydm, Zdm, $-pds\cos.\lambda$, $-pds\cos.\mu$, $-pds\cos.\nu$ et considérera les couples que ce transport fera naître. Toutes les forces, transportées à l'origine des coordonnées, se réduiront à trois

$$\int Xdm - \int pds\cos.\lambda$$
$$\int Ydm - \int pds\cos.\mu$$
$$\int Zdm - \int pds\cos.\nu$$

qui doivent s'évanouir pour l'équilibre. Ce qui donnera

$$\begin{aligned}\int Xdm &= \int pds\cos.\lambda\\ \int Ydm &= \int pds\cos.\mu \qquad \text{(I)}\\ \int Zdm &= \int pds\cos.\nu\end{aligned}$$

Les intégrales qui renferment l'élément dm de la masse se rapportent au volume entier du liquide, et celles qui renferment ds ne se rapportent qu'à la surface de ce volume. Les forces Xdm, Ydm, Zdm, par leur translation à l'origine des coordonnées, donneront les couples $(xY-yX)\,dm$, $(yZ-zY)\,dm$, $(zX-xZ)\,dm$, qui se trouveront respectivement dans les plans des xy, yz, zx. Les forces $-pds\cos.\lambda$, $-pds\cos.\mu$, $-pds\cos.\nu$ donneront pareillement dans les plans coordonnées les couples

$$-(x\cos.\lambda - y\cos.\mu)\,pds,\quad -(y\cos.\nu - z\cos.\mu)\,pds,\quad -(z\cos.\lambda - x\cos.\nu)\,pds,$$

les moments de tous les couples, qui sont situés dans le plan de xy s'ajoutent ceux des couples dans les plans de yz et zx s'ajoutent aussi; en sorte que tous les couples se réduisent à trois

$$\int(xY-yX)\,dm - \int(x\cos.\lambda - y\cos.\mu)\,pds$$
$$\int(yZ-zY)\,dm - \int(y\cos.\nu - z\cos.\mu)\,pds$$
$$\int(zX-xZ)\,dm - \int(z\cos.\lambda - x\cos.\mu)\,pds$$

lesquels doivent disparaître pour l'équilibre, ce qui donne

$$\int(xY-yX)\,dm = \int(x\cos.\mu - y\cos.\lambda)\,pds$$
$$\int(yZ-zY)\,dm = \int(y\cos.\nu - z\cos.\mu)\,pds$$
$$\int(zX-xZ)\,dm = \int(z\cos.\lambda - x\cos.\mu)\,pds.$$

Or, si l'on a une intégrale telle que

$$\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)d\omega,$$

P, Q, R étant fonctions de x, y, z et $d\omega$ un volume différentiel, et que l'on doive prendre cette intégrale dans l'étendue d'un volume V, on aura, comme l'on sait

$$\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)dm = \int(P\cos.\lambda + Q\cos.\mu + R\cos.\nu)\,ds$$

la dernière intégrale est prise seulement pour la surface du volume. Nous aurons, comme conséquence de la formule précédente

$$\int pds\cos.\lambda = \int\frac{dP}{dx}\,d\omega$$

$$\int pds\cos.\mu = \int\frac{dP}{dy}\,d\omega$$

$$\int pds\cos.\nu = \int\frac{dP}{dz}\,d\omega$$

$$\int (x \cos.\mu - y \cos.\lambda)\, pds = \int \left(x \frac{dP}{dy} - y \frac{dP}{dx}\right) d\omega$$

$$\int (y \cos.\nu - z \cos.\mu)\, pds = \int \left(y \frac{dP}{dz} - z \frac{dP}{dy}\right) d\omega$$

$$\int (z \cos.\lambda - x \cos.\lambda)\, pds = \int \left(z \frac{dP}{dx} - x \frac{dP}{dz}\right) d\omega$$

donc les équations de l'équilibre (1) et (2) deviendront

$$\int X dm = \int \frac{dP}{dx} d\omega$$

$$\int Y dm = \int \frac{dP}{dy} d\omega$$

$$\int Z dm = \int \frac{dP}{dz} d\omega$$

$$\int (xY - yX)\, dm = \int \left(x \frac{dP}{dy} - y \frac{dP}{dx}\right) d\omega$$

$$\int (yZ - zY)\, dm = \int \left(y \frac{dP}{dz} - z \frac{dP}{dy}\right) d\omega$$

$$\int (zX - xZ)\, dm = \int \left(z \frac{dP}{dx} - x \frac{dP}{dz}\right) d\omega$$

et comme les équations précédentes doivent avoir lieu quelles que soient les limites des intégrales, on doit avoir nécessairement

$$X dm = \frac{dP}{dx} d\omega$$

$$Y dm = \frac{dP}{dy} d\omega$$

$$Z dm = \frac{dP}{dz} d\omega$$

ou bien, en faisant $\frac{dm}{d\omega} = \varrho$

$$\frac{dP}{dx} = \varrho X, \quad \frac{dP}{dy} = \varrho Y, \quad \frac{dP}{dz} = \varrho Z,$$

ϱ exprimant le rapport de la masse dm au volume $d\omega$, n'est autre chose que la densité.

Considérons particulièrement un liquide homogène dont la surface est entièrement libre et ne souffre aucune pression extérieure, nous aurons d'abord pour tous les éléments du liquide, quels que soient dx, dy, dz

$$dp = \varrho\,(X dx + Y dy + Z dz)$$

et puis, pour la surface

$$o = Xdx + Ydy + Zdz.$$

La dernière équation montre que la résultante de X, Y, Z est normale à la surface du liquide; il est clair que, dans $Xdx + Ydy + Zdz$, les différentielles dx, dy, dz appartiennent au passage d'une molécule de la surface à une autre molécule également située à la surface, mais si l'on passait d'une molécule à la surface, à une molécule située dans l'intérieur on aurait $Xdx + Ydy + Zdz > o$, ce qui exige que la résultante de X, Y, Z soit dirigée vers l'intérieur de la masse liquide; ainsi pour l'équilibre d'une masse liquide homogène, et libre de toute pression extérieure, il paraît nécessaire que la différentielle $Xdx + Ydy + Zdz$ soit exacte pour tous les points de la masse, que la résultante des forces X, Y, Z soit normale à la surface dans tous les éléments de la surface, qu'elle agisse toujours vers l'intérieur du liquide. Si ces conditions ne sont pas toutes remplies, on pourrait croire que la masse liquide ne pourrait jamais demeurer en équilibre. Cependant j'ai remarqué un cas où la dernière de ces conditions n'est pas satisfaite, et où certainement l'équilibre existe.

Supposons que le liquide forme une couche sphérique d'une épaisseur quelconque et dont chaque molécule soit attirée vers le centre par une force proportionnée à une fonction de la distance de la molécule au centre, l'équilibre aura nécessairement lieu. Car les molécules, situées à une même distance du centre d'attraction, ne peuvent se mouvoir que toutes de la même manière; si l'une d'elles s'approche du centre, toutes les autres doivent s'en approcher, et de la même distance, et elles ne peuvent pas s'en approcher de manière que toutes celles, situées sur une même surface sphérique décrite du centre d'attraction, conservent le même mouvement; car il en résulterait une diminution du volume liquide. Ainsi le liquide restera en équilibre; mais il est évident que la force, qui attire chaque molécule située à la surface intérieure de la couche, est dirigée en dehors de la masse liquide. Appelons $f(r)$ l'attraction, a le rayon de la surface inférieure, b le rayon de la surface supérieure, nous aurons

$$dp = - f(r)\, dr$$

donc $$p = -\int_b^r f(r)\,dr = \int_r^b f(r)\,dr$$

donc la pression sur la surface inférieure sera $\int_a^b f(r)\,dr$, et cette pression est certainement différente de zéro, ce qui est encore contraire à ce qu'on avait généralement admis.

Voici donc un cas singulier de l'équilibre qui échappe à la théorie connue des liquides, et qui autorise à penser que cette théorie n'a pas une étendue convenable.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ВѢРОЯТНОСТИ,

что

УРАВНЕНІЕ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ, СЪ ЦѢЛЫМИ КОЕФФИЦІЕНТАМИ, ВЗЯТОЕ НАУДАЧУ, ИМѢЕТЪ КОРНИ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ;

Г. БУНЯКОВСКАГО.

(Читано 2 Октября 1835 г.)

Пусть будетъ $x^2+px+q=0$ полное уравненіе второй степени. Положимъ, что коеффиціенты p и q суть цѣлыя числа, измѣняющіяся между предѣлами $-m$ и $+m$, и, по причинѣ простоты случая, предполагаемъ что ни p, ни q, не обращается въ нуль. При такихъ условіяхъ, чаще всего имѣющихъ мѣсто, представляется любопытный вопросъ: *какъ велика вѣроятность, что уравненіе, написанное наудачу, имѣетъ корни вещественные?* Предлагаемъ рѣшеніе этой задачи.

Извѣстно, что искомая вѣроятность выразится дробью, коей числитель будетъ изображать число случаевъ, въ которыхъ уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ корни вещественные, предполагая что p и q измѣняются между предѣлами $-m$ и $+m$.

Для опредѣленія сказаннаго числа, стоитъ только изслѣдовать, сколько разъ разность p^2-4q обратится въ *нуль* и въ величину *положительную*, измѣняя p и q отъ $-m$ до $+m$, включительно. Что касается

до знаменателя дроби, выражающей искомую вѣроятность, то онъ очевидно будетъ равенъ полному числу уравненій, получаемыхъ чрезъ измѣненіе цѣлыхъ коэффиціентовъ p и q между предѣлами $-m$ и $+m$, или, что все равно, числу всѣхъ возможныхъ переложеній чиселъ 1, 2, $3 \cdots m$, взятыхъ по-два, принимая притомъ въ расчетъ и знаки ихъ.

Пусть будетъ $z = \frac{N}{M}$ искомая вѣроятность. Знаменатель M опредѣляется весьма просто. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ коэффиціенты p и q могутъ быть и положительные и отрицательные, то, принявъ p и q положительными, слѣдующія четыре предположенія имѣютъ мѣсто:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + px + q = 0 \\ x^2 - px + q = 0 \\ x^2 + px - q = 0 \\ x^2 - px - q = 0; \end{cases}$$

и какъ сверхъ того p и q принимаютъ значенія $1, 2, 3, \cdots m$, то очевидно, что каждое изъ четырехъ уравненій (1) заключаетъ въ себѣ m^2 другихъ, и слѣдовательно, совокупность ихъ будетъ $4m^2$; вотъ знаменатель M дроби, выражающей вѣроятность z; посему

$$z = \frac{N}{4m^2}.$$

Теперь займемся опредѣленіемъ числителя N. Пусть будетъ n число случаевъ, при которыхъ *первое* изъ уравненій (1) допускаетъ вещественные корни; n', то-же самое, въ отношеніи ко *второму* изъ уравненій (1); n'', въ отношеніи къ *третьему*, и n''', въ отношеніи къ *четвертому*. Въ такомъ предположеніи, будетъ $N = n + n' + n'' + n'''$.

Но очевидно что $n = n'$, ибо разность $p^2 - 4q$ одинакова въ обоихъ уравненіяхъ $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 - px + q = 0$. Что касается до m'' и m''', то ясно, что сіи числа равны между собою, и каждое изъ нихъ равно m^2, ибо корни обоихъ уравненій $x^2 + px - q = 0$ во всякомъ случаѣ вещественные. И такъ $N = 2n + 2m^2$; слѣдовательно

(2) $$z = \frac{2n + 2m^2}{4m^2} = \frac{n + m^2}{2m^2}.$$

Изъ этого видимъ, что вопросъ приводится къ опредѣленію числа n, выражающаго сколько разъ разность $p^2 - 4q$ обращается въ нуль и въ количество положительное, приписывая величинамъ p и q, безъ разбора, всѣ положительныя значенія $1, 2, 3 \cdots\cdots m$.

И такъ, надлежитъ найти число рѣшеній формулы

$$p^2 - 4q \geqq 0,$$

или, что всё равно, слѣдующей:

$$q \leqq \frac{p^2}{4}$$

для значеній p и q, заключающихся между предѣлами 1 и m, включительно.

Принимая послѣдовательно $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\cdots$ получимъ извѣстныя значенія для q, при которыхъ условіе $q \leqq \frac{p^2}{4}$ удовлетворяется, или, что все равно, такія величины q, при которыхъ уравненіе $x^2 + px + q = 0$ имѣетъ вещественные корни. Наибольшее цѣлое, заключающееся въ $\frac{p^2}{4}$, опредѣлитъ число уравненій, допускающихъ вещественные корни при предполагаемой величинѣ коеффиціента p. На этомъ основаніи получимъ таблицу:

(3)····

p	q
1	0
2	1
3	2, 1
4	4, 3, 2, 1
5	6, 5, 4, 3, 2, 1
6	9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
.	.
.	.
.	.

Разсматривая рядъ наибольшихъ величинъ для q, именно слѣдующій: $1, 2, 4, 6, 9 \cdots\cdots$ (*нуль* исключенъ изъ значеній q), замѣчаемъ во 1-хъ.

что для опредѣленія числа n надобно знать законъ составленія сказаннаго ряда; во 2-хъ. Надлежитъ опредѣлить, при какомъ значеніи p, наибольшая величина для q не будетъ превышать данный предѣлъ m. Напримѣръ, если $m = 5$, то значеніе p, о которомъ говоримъ, будетъ 4, ибо величинѣ $p = 5$, соотвѣтствуетъ уже величина $q = 6$; это значеніе $q = 6$, по условію вопроса, слѣдуетъ откинуть, а удержать только пять слѣдующихъ 5, 4, 3, 2, 1, не превышающихъ предѣла m. И такъ, въ настоящемъ случаѣ, число $n = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$, что̀ легко повѣрить на самыхъ уравненіяхъ.

Пусть будетъ P величина коеффиціента p, доставляющая въ предыдущемъ ряду для q величину Q, непосредственно ме́ньшую или равную m. Слѣдовательно будетъ $\frac{P^2}{4} \geqq m$, откуда $P = E(\sqrt{4m})$, разумѣя подъ $E(\sqrt{4m})$, наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{4m}$. Для значеній p, бо́льшихъ нежели P, будемъ получать величины q, вообще бо́льшія предѣла m; изъ нихъ должно будетъ удержать только тѣ, которыя не превышаютъ числа m, именно $1, 2, 3 \cdots m$. Но такъ какъ между $p = P$ и $p = m$, будетъ $m - P$ членовъ, и m значеній для q, соотвѣтствующихъ каждому изъ этихъ членовъ, то заключаемъ, что между предѣлами $p = P$ и $p = m$, число уравненій, съ вещественными корнями, выразится чрезъ $m(m-P)$.

Теперь остается опредѣлить сумму s ряда

$$1, 2, 4, 6, 9 \cdots\cdots Q,$$

ибо когда она будетъ извѣстна, то найдется n посредствомъ формулы

$$n = s + m\,(m-P).$$

Для опредѣленія суммы s, необходимо знать законъ, по которому составляется предыдущій рядъ. Займемся симъ опредѣленіемъ, и для бо́льшой ясности, различимъ два случая, смотря по тому, будетъ ли P *чётное* или *нечётное* число.

Первый случай, въ которомъ предполагается $P = 2k$.

Ясно, что въ этомъ предположеніи, имѣемъ $Q = k^2$; предшествующая ей величина получится взявъ $p = 2k - 1$ и составивъ количество $\frac{p^2}{4} = k^2 - k + \frac{1}{4}$; наибольшее цѣлое, заключающееся въ этой величинѣ, даетъ искомое значеніе для q, которое очевидно равняется разности $k^2 - k$. Потомъ получимъ для q величину $(k-1)^2$, далѣе $(k-1)^2 - (k-1)$, и проч. Эти величины, написанныя въ принятомъ нами порядкѣ, составятъ рядъ

$$(4) \cdots \left\{ \begin{array}{l} k^2,\ k^2 - k,\ (k-1)^2,\ (k-1)^2 - (k-1),\ (k-2)^2,\ (k-2)^2 - (k-2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 9,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1 \end{array} \right.$$

Сумма этой строки, изображенная выше чрезъ s, будетъ выражать число уравненій съ вещественными корнями, отъ предѣла $p = 1$ до $p = E(\sqrt{4m}) = P$, включительно. Но рядъ этотъ можетъ быть написанъ въ видѣ

$$s = 1 + [2+4] + [6+9] + \cdots + [2(k-1)^2 - (k-1)] + [2k^2 - k],$$

и, по обратному способу разностей, найдется весьма простымъ образомъ

$$s = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} = \frac{P(P+2)(2P-1)}{24}.$$

Слѣдовательно, полное число случаевъ, въ которыхъ уравненіе $x^2 + px + q = 0$ имѣетъ вещественные корни, выражаемое суммою $s + m(m - P)$, будетъ

$$\frac{P(P+2)(2P-1)}{24} + m(m - P).$$

Но это число изображено выше чрезъ n; и такъ, вѣроятность z, что уравненіе второй степени, съ коеффиціентами цѣлыми, заключающимися между предѣлами $-m$ и $+m$, выразится, въ слѣдствіе уравненія (2), формулою

$$z = \frac{\frac{P(P+2)(2P-1)}{24} + m(2m - P)}{2m^2},$$

гдѣ $P = E(\sqrt{4m})$, и предполагается *чётнымъ* числомъ. —

Второй случай, въ которомъ предполагается $P = 2k + 1$.

Въ этомъ случаѣ будетъ $Q = k^2 + k$, ибо $\frac{P^2}{4} = k^2 + k + \frac{1}{4}$, откуда, отдѣляя цѣлое число, имѣетъ $k^2 + k$; слѣдовательно, предшествующая величина для q, соотвѣтствующая значенію $p = 2k$, будетъ k^2; потомъ величины для q пойдутъ точно въ такомъ порядкѣ, какъ и въ ряду (4). И такъ, чтобъ получить сумму ряда

$$1, 2, 4, 6, 9 \cdots\cdots 2k^2 - k, \; k^2 + k,$$

достаточно будетъ, къ суммѣ

$$s = 1 + [2+4] + [6+9] + \cdots + (2k^2 - k) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6},$$

придать величину дополнительнаго члена

$$k^2 + k,$$

что приведетъ насъ къ слѣдующему выраженію:

$$\frac{k(k+1)(4k+5)}{6} = \frac{(P-1)(P+1)(2P+3)}{24},$$

почему вѣроятность z, въ случаѣ P *нечётнаго*, выразится формулою:

$$z = \frac{\frac{(P-1)(P+1)(2P+3)}{24} + m(2m-P)}{2m^2}.$$

И такъ, для опредѣленія вѣроятности z, что произвольно взятое полное уравненіе 2-й степени $x^2 + px + q = 0$, въ которомъ p и q суть цѣлыя числа, заключающіяся между предѣлами $-m$ и $+m$, имѣетъ корни вещественные, слѣдуетъ сперва найти наибольшее цѣлое число содержащееся въ $\sqrt{4m}$. Пусть будетъ P это число; если P *чётное*, то

$$(5) \qquad z = \frac{\frac{P(P+2)(2P-1)}{24} + m(2m-P)}{2m^2};$$

когда P *нечётное*, то

$$(6) \qquad z = \frac{\frac{(P-1)(P+1)(2P+3)}{24} + m(2m-P)}{2m^2}.$$

Положимъ, напримѣръ, $m = 10$; найдемъ $P = E(\sqrt{40}) = 6$, и по формулѣ (5)

$$z = \frac{162}{200}.$$

Для $m = 100$, имѣемъ $P = E(\sqrt{400}) = 20$, и по той-же формулѣ (5) найдемъ

$$z = \frac{18715}{20000}.$$

Для $m = 1000$, получаемъ $P = E(\sqrt{4000}) = 63$, и въ слѣдствіе формулы (6) имѣемъ

$$z = \frac{1958328}{2000000},$$

и такъ далѣе. —

Изъ сихъ примѣровъ усматриваемъ, что вѣроятность получить наудачу уравненіе 2-й степени, имѣющее вещественные корни, быстро увеличивается, по мѣрѣ того, какъ увеличиваемъ предѣлы его коеффиціентовъ. Если положимъ $m = \infty$, то обѣ формулы (5) и (6) даютъ $z = 1$. Этотъ выводъ, при первомъ воззрѣніи, долженъ показаться ошибочнымъ, ибо изъ него слѣдуетъ, что вѣроятность получить уравненіе съ *мнимыми корнями* равна нулю, между тѣмъ какъ нѣтъ никакого сомнѣнія, что такихъ уравненій безчисленное множество. Этотъ кажущійся парадоксъ легко объясняется тѣмъ, что число уравненій, имѣющихъ вещественные корни, безконечно велико въ отношеніи къ числу уравненій, допускающихъ мнимыя рѣшенія. Основываясь на формулахъ (5) и (6) легко доказать, что отношеніе числа уравненій съ вещественными корнями, къ числу уравненій съ мнимыми, будетъ пропорціонально $\sqrt{m}$, когда предположимъ $m = \infty$. Впрочемъ замѣтимъ, что еслибы предѣлы коеффиціентовъ p и q были различны между собою, то можно бы было выбрать эти предѣлы такъ, что вѣроятность z обратилась бы нетолько въ количество дробное, но даже и въ нуль. —

Окончимъ изслѣдованіе наше указаніемъ на способъ для опредѣленія вѣроятности получить уравненіе съ вещественными корнями, когда оно будетъ вида $ax^2 + bx + c = 0$, разумѣя подъ a, b и c цѣлыя числа, измѣняющіяся между предѣлами 1 и m, включительно. Для краткости, мы умалчиваемъ о томъ случаѣ, когда коеффиціенты a, b и c могутъ принимать оба знака $+$ и $-$; это обстоятельство не представляетъ никакихъ особеннныхъ затрудненій. —

Если изобразимъ искомую вѣроятность дробью $\frac{N}{M} = z$, то знаменатель M будетъ равняться числу всѣхъ возможныхъ переложеній чиселъ 1, 2, 3 .... m, взятыхъ по-три, то есть, m^3. Слѣдовательно

$$z = \frac{N}{m^3}.$$

Что касается до числителя N, то, руководствуясь способомъ, подобнымъ тому, который былъ выше изложенъ, и положивъ для краткости $E\left(\frac{m^2}{4}\right) = \lambda$, найдемъ:

$$
\begin{aligned}
N = \; & 1 \\
& 2 + 1 \\
& 4 + 2 + 1 + 1 \\
& 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 \\
& 9 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
& 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
& 16 + 8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
& \cdot \; \cdot \\
& E\left(\frac{\lambda}{1}\right) + E\left(\frac{\lambda}{2}\right) + E\left(\frac{\lambda}{3}\right) + \cdots\cdots + E\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) + E\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right),
\end{aligned}
$$

наблюдая притомъ, что каждое число, превышающее m, должно замѣнить этимъ самымъ предѣломъ m, и сверхъ того, въ каждой горизонтальной строкѣ удержать, съ лѣвой стороны, только m членовъ, а остальные откинуть.

На примѣръ, если $m = 5$, то дѣйствуя сказаннымъ образомъ, получимъ:

$$\begin{aligned} N = \; & 1 \\ & 2 + 1 \\ & 4 + 2 + 1 + 1 \\ & 6^* + 3 + 2 + 1 + 1 + 1_*. \end{aligned}$$

Такъ какъ число 6^* болѣе 5, то вмѣсто этого числа слѣдуетъ поставить 5; сверхъ того надлежитъ откинуть шестой членъ 1_*. Слѣдовательно настоящая величина N будетъ

$$N = \left.\begin{aligned} & 1 \\ & 2 + 1 \\ & 4 + 2 + 1 + 1 \\ & 5 + 3 + 2 + 1 + 1 \end{aligned}\right\} = 24,$$

а искомая вѣроятноть

$$z = \frac{24}{5^3} = \frac{24}{125}.$$

Разсматривая уравненіе $x^2 + px + q = 0$, (гдѣ p и q полагаются положительными, нашли бы, что для $m = 5$, вѣроятность получить уравненіе съ вещественными корнями, выражается дробью $\frac{12}{25}$, которая въ $2\frac{1}{2}$ раза болѣе найденной сей-часъ вѣроятости $\frac{24}{125}$.

Полагая $m = 10$, найдемъ $\lambda = E\left(\frac{10^2}{4}\right) = 25$, и слѣдовательно

$$\begin{aligned} N = \; & 1 \\ & 2 + 1 \\ & 4 + 2 + 1 + 1 \\ & 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ & 9 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & 12^* + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1_* + 1_* \\ & 16^* + 8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* \\ & 20^* + 10^* + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* \\ & 25^* + 12^* + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2_* + 2_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_* + 1_*. \end{aligned}$$

Числа 12*, 16*, 20*, 25*, и 12* должны быть замѣнены, каждое, числомъ 10, а члены, съ одинадцатаго мѣста, отмѣченные звѣздочкой внизу, совсѣмъ откинуты. Сдѣлавъ это, получимъ

$$N = 217$$

и слѣдовательно вѣроятность

$$z = \frac{217}{1000}$$

Само собой разумѣется, что при опредѣленіи числа N должно, для сокращенія дѣйствія, прямо писать, вмѣсто чиселъ превышающихъ предѣлъ, самый предѣлъ, и ограничиваться, въ каждой горизортальной строкѣ, числомъ m членовъ: и такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, слѣдовало бы прямо написать величину N въ видѣ

$$N = \left.\begin{array}{l} 1 \\ 2 + 1 \\ 4 + 2 + 1 + 1 \\ 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ 9 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 10 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 10 + 8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 \\ 10 + 10 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ 10 + 10 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 \end{array}\right\} = 217.$$

Найденная сей-часъ вѣроятность $\frac{217}{1000}$, и относящаяся къ уравненію $ax^2 + bx + c = 0$, когда a, b и c заключаются между предѣлами 1 и m, будетъ менѣе вѣроятности, соотвѣтствующей уравненію $x^2 + px + q = o$, гдѣ p и q содержатся между тѣми же предѣлами; дѣйствительно, найдемъ для сей послѣдней дробь $\frac{62}{100}$. И вообще, можно заключить, что изъ двухъ уравненій вида $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + px + q = 0$, взятыхъ наудачу, но въ которыхъ коеффиціенты a, b, c, p, q заключаются между одинаковыми предѣлами, бо́льшая вѣроятность вещест-

венности корней на сторонѣ втораго, то есть, уравненія $x^2 + px + q = 0$.

Способъ относящійся къ уравненію $ax^2 + bx + c = 0$, можетъ быть весьма легко приложенъ также къ опредѣленію вѣроятности, что всѣ три корни уравненія третьей степени $ax^3 + bx + c = 0$, имѣютъ вещественныя значенія.

SUR

L'ÉQUATION RELATIVE

À LA

PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS L'INTÉRIEUR DES LIQUIDES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 8 avril 1836.)

J'écris cette note après avoir fait la lecture d'un mémoire posthume de Fourier publié en 1833. (Voyez le tome 12ème des Mémoires de l'académie des sciences de Paris, page 507.)

Fourier regardait comme très difficile la démonstration de l'équation pour la propagation de la chaleur dans les masses liquides, et, je le tiens de lui, quand il en est venu à bout, il l'a proposée, comme defi, à Laplace et à M. Poisson.

Dans une note, que j'ai lue à l'académie le 23 septembre 1829, j'ai donné l'équation

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

pour celle qui exprime le mouvement de la chaleur dans les liquides, θ désigne la température, k la capacité spécifique, K la conductibilite, x, y, z les coordonnées

rectangles, et l'on a fait pour abréger $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$. Mais je n'ai pas manqué d'ajouter expressément, que je n'étais pas assuré de l'exactitude de mon équation; je l'ai fait principalement à cause des difficultés dont Fourier m'avait souvent parlé, et n'ai pas lieu de me repentir de cette reserve.

Même année, 1833, le 12 octobre, M. Poisson a lu à l'académie des sciences de Paris un très beau mémoire sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques et des liquides, et, en passant, il y a donné, pour la température variable dans les derniers, la même équation

$$k\frac{dt}{dx}=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

que s'ils étaient solides; mais plus tard, dans son traité de mécanique *), il a remplacé cette équation par celle que j'avais proposée, dans ma note précédemment citée, c'est-à-dire par

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}.$$

Malgré cette correction, la formule précéente ne coincide avec celle que l'on trouve dans le mémoire cité de Fourier, et qui est

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+\frac{d(u\theta)}{dx_1}+\frac{d(v\theta)}{dy}+\frac{d(w\theta)}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{dt}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{dt}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{dt}{dz}\right)}{dz}$$

que quand on suppose $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$, c'est-à dire quand on considère la masse liquide comme invariable en volume, malgré l'inégalité de température, ce qui est inadmissible. Voilà donc deux résultats différents et impossibles à accorder; il faut que l'un d'entre eux au moins soit inexact. Or, il est facile de faire voir que l'équation

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{d}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

n'est pas exacte; car cette équation, par la manière dont elle a été formée, appartien-

*) Page 677 du second volume.

drait au mouvement de la chaleur dans une masse quelconque pour vu que le rayonnement intérieur ne s'étend qu'à des distances insensibles; or, en supposant qu'il n'y en a pas du tout, c'est-à-dire en faisant $K = 0$, ce qui est à peu près le cas des liquides, on trouve

$$\frac{d\theta}{dt} + u\frac{d\theta}{dx} + v\frac{d\theta}{dy} + w\frac{d\theta}{dz} = 0$$

équation qui nous montre que la température d'une même molécule reste la même pendant toute la durée du mouvement, résultat inadmissible dès que la masse que l'on considère, est compressible.

La différence entre l'équation

$$k\left(\frac{d\theta}{dt} + u\frac{d\theta}{dx} + v\frac{d\theta}{dy} + w\frac{d\theta}{dz}\right) = \frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

et celle de Fourier vient, comme on va le voir, de ce qu'en établissant la première, on a oublié de prendre en considération la variabilité du volume liquide par la chaleur, et quand on y fait attention, on trouve le résultat de Fourier, et on le trouve avec beaucoup plus de simplicité et de clarté que cet illustre Géomètre ne l'avait obtenue, car il faut le dire; l'analyse de Fourier est très obscure, et il ne fallait rien moins que son nom illustre et ses longs travaux sur la chaleur pour que je ne l'aie pas prise pour inexacte; mais il faut dire aussi que son mémoire a paru après sa mort et que, sans doute, il lui aurait donné toute l'exactitude et la clarté désirables s'il avait pu le publier lui même.

Considérons une portion quelconque V du volume liquide, désignons par s un élément de la surface de V, et par λ, μ, ν les angles que la partie extérieure de la normale à s fait avec les axes coordonnés; l'on sait que

$$K\left(\frac{d\theta}{dx}\text{Cos.}\lambda + \frac{d\theta}{dy}\text{Cos.}\mu + \frac{d\theta}{dz}\text{Cos.}\nu\right) sdt,$$

exprime la quantité de chaleur qui s'introduit dans le volume V par l'élément s pendant l'instant dt. En intégrant l'expression précédente dans toute l'étendue de la surface de V, on trouve

$$\int K\left(\frac{d\theta}{dx}\text{Cos.}\lambda + \frac{d\theta}{dy}\text{Cos.}\mu + \frac{d\theta}{dz}\text{Cos.}\nu\right) sdt$$

pour la quantité de chaleur que V reçoit pendant l'instant dt. Or comme

$$\int K\left(\frac{d\theta}{dx}\text{Cos.}\lambda+\frac{d\theta}{dy}\text{Cos.}\mu+\frac{d\theta}{dz}\text{Cos.}\nu\right)s=\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega,$$

la quantité de chaleur dont il s'agit aura pour expression

$$\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt$$

ω étant un élément du volume V, et l'intégrale étant relative à tous les éléments de V.

D'un autre côté, la quantité de chaleur que V renferme au bout du temps t en sus de celle qu'il contiendrait à la température zéro, est $\int k\theta\omega$; l'intégrale étant relative à tous les éléments du volume V; or, pendant l'instant dt, la quantité $\int k\theta\omega$ recevra un accroissement $d\int k\theta\omega$ qui doit être égal à

$$\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt$$

donc, en faisant attention que, d'après le principe du calcul des variations, on peut mettre $\int d(k\theta\omega)$ à la place de $d\int k\theta\omega$, nous aurons

$$\int d\,(k\theta\omega)=\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt$$

et comme cette équation doit avoir lieu quelle que soit la portion V du volume liquide, c'est-à-dire quelles que soient les limites des intégrales qu'elles renferment, nous ne pouvons y satisfaire à moins de supposer

$$d\,(k\theta\omega)=\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt$$

or, il est facile de voir que

$$d\,(k\theta\omega)=\omega d\,(k\theta)+k\theta d\omega$$

et comme $d(k\theta)=\left(\frac{d\,(k\theta)}{dt}+\frac{d\,(k\theta)}{dx}u+\frac{d\,(k\theta)}{dy}v+\frac{d\,(k\theta)}{dz}w\right)dt$

$$d\omega=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\omega dt,$$

nous aurons

$$d\,(k\theta\omega)=\left[\frac{d\,(k\theta)}{dt}+\frac{d\,(k\theta u)}{dx}+\frac{d\,(k\theta v)}{dy}+\frac{d\,(k\theta w)}{dz}\right]\omega dt$$

et par suite

$$\frac{d(k\theta)}{dt}+\frac{d(k\theta u)}{dx}+\frac{d(k\theta v)}{dy}+\frac{d(k\theta w)}{dz}=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

Si l'on considère la capacité pour la chaleur k comme constante, on obtiendra l'équation de Fourier, savoir

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\theta u}{dx}+\frac{d\theta v}{dy}+\frac{d\theta w}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}.$$

En supposant de plus $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$, on retrouvera l'équation que nous avons proposée, M. Poisson et moi. Or, je regarde la supposition $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$ comme inadmissible, ce que M. Poisson reconnaîtra sans doute aussi, surtout s'il consulte les équations (12) et (13) page 156 de son beau mémoire sur le solides élastiques et les fluides, en corrigeant toutefois la dernière où l'on a mis $\frac{d\xi}{dt}$ au lieu de $\frac{d\xi}{dt}+u\frac{d\xi}{dx}+v\frac{d\xi}{dy}+w\frac{d\xi}{dz}$, ce qui, au reste peut venir, d'une faute d'impression. Quant à l'équation (12), elle devient aussi inexacte, si l'on veut avoir égard à la compressibilité des liquides *par pression;* mais l'erreur qui en résulte est très petite, et on la commet aussi dans la *théorie ordinaire* du mouvement des liquides.

L'augmentation du volume d'une molécule liquide ne dépend pas seulement de l'augmentation de la température, mais aussi de l'état de pression que la molécule éprouve, de manière que, si l'on appelle ω le volume d'une molécule fluide, on aura

$$d\omega=(Pd\theta-Qdp)\,\omega$$

en désignant par p la pression, et en faisant varier tous ce qui varie avec t dans $d\theta$ et dp. Quant à $d\omega$, on prendra pour sa valeur $\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\omega dt$, de manière que l'on aura

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=P\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)-Q\left(\frac{dp}{dt}+u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{dz}\right).$$

TABLES

DES RACINES PRIMITIVES POUR TOUS LES NOMBRES PREMIERS AU DESSOUS DE 200, AVEC LES TABLES POUR TROUVER L'INDICE D'UN NOMBRE DONNÉ, ET POUR TROUVER LE NOMBRE D'APRÈS L'INDICE.

Présenté le 22 Avril 1836, par M. Ostrogradsky.

Remarque. Les indices doivent être cherchées dans les tables marquées d'un I, et les nombres dans celles qui sont marquées de la lettre N.

Nombre premier 5.

Racines primitives: 2. 3.

Tables pour la base 2.

I.

Nombres	1	2	3	4
Indices	4	1	3	2

N.

Indices	1	2	3	4
Nombres	2	4	3	1

Nombre premier 7.

Racines primitives: 3. 5.

Tables pour la base 3.

I.

Nomb.	1	2	3	4	5	6
Ind.	6	2	1	4	5	3

N.

Ind.	1	2	3	4	5	6
Nomb.	3	2	6	4	5	1

Nombre premier 11.

Racines primitives: 2. 6. 7. 8.

Tables pour la base 2.

I.

Nomb.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ind.	10	1	8	2	4	9	7	3	6	5

N.

Ind.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nomb.	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

Nombre premier 13.

Racines primitives: 2. 6. 7. 11.

Tables pour la base 6.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		12	5	8	10	9	1	7	3	4
1	2	11	6							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		6	10	8	9	2	12	7	3	5
1	4	11	1							

Nombre premier 17.

Racines primitives: 3. 5. 6. 7. 10. 11. 12. 14.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		16	10	11	4	7	5	9	14	6
1	1	13	15	12	3	2	8			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	15	14	4	6	9	5	16	7
1	2	3	13	11	8	12	1			

Nombre premier 19.

Racines primitives: 2. 3. 10. 13. 14. 15.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		18	17	5	16	2	4	12	15	10
1	1	6	3	13	11	7	14	8	9	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	5	12	6	3	11	15	17	18
1	9	14	7	13	16	8	4	2	1	

Nombre premier 23.

Racines primitives: 5. 7. 10. 11. 14. 15. 17. 19. 20. 21.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		22	8	20	16	15	6	21	2	18
1	1	3	14	12	7	13	10	17	4	5
2	9	19	11							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	8	11	18	19	6	14	2	20
1	16	22	13	15	12	5	4	17	9	21
2	3	7	1							

Nombre premier 29.

Racines primitives: 2. 3. 8. 10. 11. 14. 15. 18. 19. 21. 26. 27.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		28	11	27	22	18	10	20	5	26
1	1	23	21	2	3	17	16	7	9	15
2	12	19	6	24	4	8	13	25	14	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	13	14	24	8	22	17	25	18
1	6	2	20	26	28	19	16	15	5	21
2	7	12	4	11	23	27	9	3	1	

Nombre premier 31.

Racines primitives: 3. 11. 12. 13. 17. 21. 22. 24.

Tables pour la base 17.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		30	12	13	24	20	25	4	6	26
1	2	29	7	23	16	3	18	1	8	22
2	14	17	11	21	19	10	5	9	28	27
3	15									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		17	10	15	7	26	8	12	18	27
1	25	22	2	3	20	30	14	21	16	24
2	5	23	19	13	4	6	9	29	28	11
3	1									

Nombre premier 37.

Racines primitives: 2. 5. 13. 15. 17. 18. 19. 20. 22. 24. 32. 35.

Tables pour la base 5.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		36	11	34	22	1	9	28	33	32
1	12	6	20	13	3	35	8	5	7	25
2	23	26	17	21	31	2	24	30	14	15
3	10	27	19	4	16	29	18			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	14	33	17	11	18	16	6
1	30	2	10	13	28	29	34	22	36	32
2	12	23	4	20	26	19	21	31	7	35
3	27	24	9	8	3	15	1			

NOMBRE PREMIER 41.

Racines primitives: 6. 7. 11. 12. 13. 15. 17. 19. 22. 24. 26. 28. 29. 30. 34. 35.

TABLES POUR LA BASE 6.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		40	26	15	12	22	1	39	38	30
1	8	3	27	31	25	37	24	33	16	9
2	34	14	29	36	13	4	17	5	11	7
3	23	28	10	18	19	21	2	32	35	6
4	20									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		6	36	11	25	27	39	29	10	19
1	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34
2	40	35	5	30	16	14	2	12	31	22
3	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7
4	1									

NOMBRE PREMIER 43.

Racines primitives: 3. 5. 12. 18. 19. 20. 26. 28. 29. 30. 33. 34.

TABLES POUR LA BASE 28.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		42	39	17	36	5	14	7	33	34
1	2	6	11	40	4	22	30	16	31	29
2	41	24	3	20	8	10	37	9	1	25
3	19	32	27	23	13	12	28	35	26	15
4	38	18	21							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		28	10	22	14	5	11	7	24	27
1	25	12	35	34	6	39	17	3	41	30
2	23	42	15	33	21	29	38	32	36	19
3	16	18	31	8	9	37	4	26	40	2
4	13	20	1							

NOMBRE PREMIER 47.

Racines primitives: 5. 10. 11. 13. 15. 19. 20. 22. 23. 26. 29. 30. 31. 33. 35. 38. 39. 40. 41. 43. 44. 45.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		46	30	18	14	17	2	38	44	36
1	1	27	32	3	22	35	28	42	20	29
2	31	10	11	39	16	34	33	8	6	43
3	19	5	12	45	26	9	4	24	13	21
4	15	25	40	37	41	7	23			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	6	13	36	31	28	45	27	35
1	21	22	32	38	4	40	24	5	3	30
2	18	39	14	46	37	41	34	11	16	19
3	2	20	12	26	25	15	9	43	7	23
4	42	44	17	29	8	33	1			

Nombre premier 53.

Racines primitives: 2. 3. 5. 8. 12. 14. 18. 19. 20. 21. 22. 26. 27. 31. 32. 33. 34. 35. 39. 41. 45. 48. 50. 51.

Tables pour la base 26.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		52	25	9	50	31	34	38	23	18
1	4	46	7	28	11	40	48	42	43	41
2	29	47	19	39	32	10	1	27	36	6
3	13	45	21	3	15	17	16	22	14	37
4	2	33	20	30	44	49	12	8	5	24
5	35	51	26							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		26	40	33	10	48	29	12	47	3
1	25	14	46	30	38	34	36	35	9	22
2	42	32	37	8	49	2	52	27	13	20
3	43	5	24	41	6	50	28	39	7	23
4	15	19	17	18	44	31	11	21	16	45
5	4	51	1							

Nombre premier 59.

Racines primitives: 2. 6. 8. 10. 11. 13. 14. 18. 23. 24. 30. 31. 32. 33. 34. 37. 38. 39. 40. 42. 43. 44. 47. 50. 52. 54. 55. 56.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		58	25	32	50	34	57	44	17	6
1	1	45	24	23	11	8	42	14	31	22
2	26	18	12	27	49	10	48	38	36	4
3	33	7	9	19	39	20	56	41	47	55
4	51	2	43	13	37	40	52	53	16	30
5	35	46	15	28	5	21	3	54	29	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	41	56	29	54	9	31	15	32
1	25	14	22	43	17	52	48	8	21	33
2	35	55	19	13	12	2	20	23	53	58
3	49	18	3	30	5	50	28	44	27	34
4	45	37	16	42	7	11	51	38	26	24
5	4	40	46	47	57	39	36	6	1	

NOMBRE PREMIER 61.

Racines primitives: 2. 6. 7. 10. 17. 18. 26. 30. 31. 35. 43. 44. 51. 54. 55. 59.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		60	47	42	34	14	29	23	21	24
1	1	45	16	20	10	56	8	49	11	22
2	48	5	32	39	3	28	7	6	57	25
3	43	13	55	27	36	37	58	33	9	2
4	35	18	52	41	19	38	26	40	50	46
5	15	31	54	51	53	59	44	4	12	17
6	30									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	39	24	57	21	27	26	16	38
1	14	18	58	31	5	50	12	59	41	44
2	13	8	19	7	9	29	46	33	25	6
3	60	51	22	37	4	40	34	35	45	23
4	47	43	3	30	56	11	49	2	20	17
5	48	53	42	54	52	32	15	28	36	55
6	1									

NOMBRE PREMIER 67.

Racines primitives: 2. 7. 11. 12. 13. 18. 20. 28. 31. 32. 34. 41. 44. 46. 48. 50. 51. 57. 61. 63.

TABLES POUR LA BASE 12.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		66	29	9	58	39	38	7	21	18
1	2	61	1	23	36	48	50	8	47	26
2	31	16	24	20	30	12	52	27	65	22
3	11	43	13	4	37	46	10	44	55	32
4	60	19	45	63	53	57	49	64	59	14
5	41	17	15	3	56	34	28	35	51	54
6	40	5	6	25	42	62	33			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		12	10	53	33	61	62	7	17	3
1	36	30	25	32	49	52	21	51	9	41
2	23	8	29	13	22	63	19	27	56	2
3	24	20	39	66	55	57	14	34	6	5
4	60	50	64	31	37	42	35	38	15	46
5	16	58	26	44	59	38	54	45	4	48
6	40	11	65	43	47	28	1			

Nombre premier 71.

Racines primitives: 7. 11. 13. 21. 22. 28. 31. 33. 35. 42. 44. 47. 52. 53. 55. 56. 59. 61. 62. 63. 65. 67. 68. 69.

Tables pour la base 62.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		70	58	18	46	14	6	33	34	36
1	2	43	64	27	21	32	15	7	24	38
2	60	51	31	5	52	28	22	54	9	4
3	20	13	10	61	65	47	12	30	26	45
4	48	55	39	44	19	50	63	17	40	66
5	16	25	3	59	42	57	67	56	62	29
6	8	37	1	69	68	41	49	11	53	23
7	35									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		62	10	52	29	23	6	17	60	28
1	32	67	36	31	5	26	50	47	3	44
2	30	14	16	69	18	51	38	13	25	59
3	37	22	15	7	8	70	9	61	19	42
4	48	65	54	11	43	39	4	35	40	66
5	45	21	24	68	27	41	57	55	2	53
6	20	33	58	46	12	34	49	56	64	63
7	1									

Nombre premier 73.

Racines primitives: 5. 11. 13. 14. 15. 20. 26. 28. 29. 31. 33. 34. 39. 40. 42. 44. 45. 47. 53. 58. 59. 60. 62. 68.

Tables pour la base 5.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		72	8	6	16	1	14	33	24	12
1	9	55	22	59	41	7	32	21	20	62
2	17	39	63	46	30	2	67	18	49	35
3	15	11	40	61	29	34	28	64	70	65
4	25	4	47	51	71	13	54	31	38	66
5	10	27	3	53	26	56	57	68	43	5
6	23	58	19	45	48	60	69	50	37	52
7	42	44	36							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		5	25	52	41	59	3	15	2	10
1	50	31	9	45	6	30	4	20	27	62
2	18	17	12	60	8	40	54	51	36	34
3	24	47	16	7	35	29	72	68	48	21
4	32	14	70	58	71	63	23	42	64	28
5	67	47	69	53	46	11	55	56	61	13
6	65	33	19	22	37	39	49	26	57	66
7	38	44	1							

NOMBRE PREMIER 79.

Racines primitives : 3. 6. 7. 28. 29. 30. 34. 35. 37. 39. 43. 47. 48. 53. 54. 59. 60. 63. 66. 68. 70. 74. 75. 77.

TABLES POUR LA BASE 29.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		78	50	71	22	34	43	19	72	64
1	6	70	15	74	69	27	44	9	36	10
2	56	12	42	52	65	68	46	57	41	1
3	77	76	16	63	59	53	8	23	60	67
4	28	21	62	47	14	20	24	55	37	38
5	40	2	18	7	29	26	13	3	51	17
6	49	75	48	5	66	30	35	54	31	45
7	25	33	58	4	73	61	32	11	39	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		29	51	57	73	63	10	53	36	17
1	19	77	21	56	44	12	32	59	52	7
2	45	41	4	37	46	70	55	15	40	54
3	65	68	76	71	5	66	18	48	49	78
4	50	28	22	6	16	69	26	43	62	60
5	2	58	23	35	67	47	20	27	72	34
6	38	75	42	33	9	24	64	39	25	14
7	11	3	8	74	13	61	31	30	1	

NOMBRE PREMIER 83.

Racines primitives : 2. 5. 6. 8. 13. 14. 15. 18. 19. 20. 22. 24. 32. 34. 35. 39. 42. 43. 45. 46. 47. 50. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 60. 62. 66. 67. 71. 72. 73. 74. 76. 79. 80.

TABLES POUR LA BASE 50.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		82	3	52	6	81	55	24	9	22
1	2	72	58	67	27	51	12	4	25	59
2	5	76	75	16	61	8	70	74	30	36
3	54	32	15	42	7	23	28	60	62	37
4	8	38	79	49	78	21	19	69	64	48
5	1	56	73	13	77	71	33	29	39	20
6	57	34	35	46	18	66	45	53	10	68
7	26	17	31	43	63	50	65	14	40	47
8	11	44	41							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		50	10	2	17	20	4	34	40	8
1	68	80	16	53	77	32	23	71	64	46
2	59	45	9	35	7	18	70	14	36	57
3	28	72	31	56	61	62	29	39	41	58
4	78	82	33	73	81	66	63	79	49	43
5	75	15	3	67	30	6	51	60	12	19
6	37	24	38	74	48	76	65	13	69	47
7	26	55	11	52	27	22	21	54	44	42
8	25	5	1							

NOMBRE PREMIER 89.

Racines primitives : 3. 6. 7. 13. 14. 15. 19. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 33. 35. 38. 41. 43. 46. 48. 51. 54. 56. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 65. 66. 70. 74. 75. 76. 82. 83. 86.

TABLES POUR LA BASE 30.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		88	72	87	56	18	71	7	40	86
1	2	4	55	65	79	17	24	82	70	53
2	74	6	76	31	39	36	49	85	63	29
3	1	57	8	3	66	25	54	77	37	64
4	58	67	78	59	60	16	15	34	23	14
5	20	81	33	10	69	22	47	52	13	45
6	73	19	41	5	80	83	75	32	50	30
7	9	26	38	68	61	35	21	11	48	46
8	42	84	51	27	62	12	43	28	44	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		30	10	33	11	63	21	7	32	70
1	53	77	85	58	49	46	45	15	5	61
2	50	76	55	48	16	35	71	83	87	29
3	69	23	67	52	47	75	25	38	72	24
4	8	62	80	86	88	59	79	56	78	26
5	68	82	57	19	36	12	4	31	40	43
6	44	74	84	28	39	13	54	41	73	54
7	18	6	2	60	20	66	22	37	42	14
8	64	51	17	65	81	27	9	3	1	

NOMBRE PREMIER 97.

Racines primitives: 5. 7. 10. 13. 14. 15. 17. 21. 23. 26. 29. 37. 38. 39. 40. 41. 56. 57. 58. 59. 60. 68. 71. 74. 76. 80. 82. 83. 84. 87. 90. 92.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		96	86	2	76	11	88	53	66	4
1	1	82	78	83	45	13	56	19	90	27
2	87	55	72	79	68	22	73	6	35	47
3	3	26	46	84	9	64	80	41	17	85
4	77	71	45	44	62	15	69	60	58	10
5	12	21	63	14	92	95	23	29	37	65
6	89	32	16	57	36	94	74	51	95	81
7	54	25	70	20	31	24	7	39	75	42
8	67	8	61	91	35	30	34	49	52	18
9	5	40	39	28	50	38	48			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	3	30	9	90	27	76	81	34
1	49	5	50	15	53	45	62	38	89	17
2	73	51	25	56	75	71	31	19	93	57
3	85	74	61	28	86	84	64	58	95	77
4	91	37	79	14	43	42	32	29	96	87
5	94	67	88	7	70	21	16	63	48	92
6	47	82	44	52	35	59	8	80	24	46
7	72	41	22	26	66	78	4	40	12	23
8	36	69	11	13	33	39	2	20	6	60
9	18	83	54	55	65	68	1			

NOMBRE PREMIER 101.

Racines primitives: 2. 3. 7. 8. 11. 12. 15. 18. 26. 27. 28. 29. 34. 35. 38. 40. 42. 46. 48. 50. 51. 53. 55. 59. 61. 63. 66. 67. 72. 73. 74. 75. 83. 86. 89. 90. 93. 94. 98. 99.

TABLES POUR LA BASE 2.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		100	1	69	2	24	70	9	3	38
1	25	13	71	66	10	93	4	30	39	96
2	26	78	14	86	72	48	67	7	11	91
3	94	84	5	82	31	33	40	56	97	35
4	27	45	79	42	15	62	87	58	73	18
5	49	99	68	23	8	37	12	65	92	29
6	95	77	85	47	6	90	83	81	32	55
7	34	44	41	61	57	17	98	22	36	64
8	28	76	46	89	80	54	43	60	16	21
9	63	75	88	53	59	20	74	52	19	51
10	50									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	4	8	16	32	64	27	54	7
1	14	28	56	11	22	44	88	75	49	98
2	95	89	77	53	5	10	20	40	80	59
3	17	34	68	35	70	39	78	55	9	18
4	36	72	43	86	71	41	82	63	25	50
5	100	99	97	93	85	69	37	74	47	94
6	87	73	45	90	79	57	13	26	52	3
7	6	12	24	48	96	91	81	61	21	42
8	84	67	33	66	31	62	23	46	92	83
9	65	29	58	15	30	60	19	38	76	51
10	1									

NOMBRE PREMIER 103.

Racines primitives: 5. 6. 11. 12. 20. 21. 35. 40. 43. 44. 45. 48. 51. 53. 54. 62. 65. 67. 70. 71. 74. 75. 77. 78. 84. 85. 86. 87. 88. 96. 99. 101.

TABLES POUR LA BASE 6.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		102	46	57	92	59	1	32	36	12
1	3	29	47	66	78	14	82	50	58	28
2	49	89	75	90	93	16	10	69	22	76
3	60	99	26	86	96	91	2	81	74	21
4	95	94	33	55	19	71	34	17	37	64
5	62	5	56	11	13	88	68	85	20	70
6	4	84	43	44	72	23	30	53	40	45
7	35	77	48	9	25	73	18	61	67	42
8	39	24	38	100	79	7	101	31	65	27
9	15	98	80	54	63	87	83	52	8	41
10	6	97	51							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		6	36	10	60	51	100	85	98	73
1	26	53	9	54	15	90	25	47	76	44
2	58	39	28	65	81	74	72	89	19	11
3	66	87	7	42	46	70	8	48	82	80
4	68	99	79	62	63	69	2	12	72	20
5	17	102	97	67	93	43	52	3	18	5
6	30	77	50	94	49	88	13	78	56	27
7	59	45	64	75	38	22	29	71	14	84
8	92	37	16	96	61	57	33	95	55	21
9	23	35	4	24	41	40	34	101	91	31
10	83	86	1							

Nombre premier 107.

Racines primitives: 2. 5. 6. 7. 8. 15. 17. 18. 20. 21. 22. 24. 26. 28. 31. 32. 38. 43. 45. 46. 50. 51. 54. 55. 58. 59. 60. 63. 65. 66. 67. 68. 70. 71. 72. 73. 74. 77. 78. 80. 82. 84. 88. 91. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 103. 104.

Tables pour la base 63.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		106	95	78	84	13	67	57	73	50
1	2	76	56	58	46	91	62	105	39	96
2	97	29	65	60	45	26	47	22	35	72
3	80	21	51	48	94	70	28	6	85	30
4	86	90	18	93	54	63	49	16	34	8
5	15	77	36	64	11	89	24	68	61	87
6	69	102	10	1	40	71	37	33	83	32
7	59	81	17	41	101	104	74	27	19	88
8	75	100	79	98	7	12	82	44	43	92
9	52	9	38	99	5	3	23	55	103	20
10	4	14	66	31	25	42	53			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		63	10	95	100	94	37	84	49	91
1	62	54	85	5	101	50	47	72	42	78
2	99	31	27	96	56	104	25	77	36	21
3	39	103	69	67	48	28	52	66	92	18
4	64	73	105	88	87	24	14	26	33	46
5	9	32	90	106	44	97	12	7	13	70
6	23	58	16	45	53	22	102	6	57	60
7	35	65	29	8	76	80	11	51	3	82
8	30	71	86	68	4	38	40	59	79	55
9	41	15	89	43	34	2	19	20	83	93
10	81	74	61	98	75	17	1			

Nombre premier 109.

Racines primitives: 6. 10. 11. 13. 14. 18. 23. 24. 30. 37. 39. 40. 42. 47. 50. 51. 52. 53. 56. 57. 58. 59. 62. 65. 67. 69. 70. 72. 79. 85. 91. 95. 96. 98. 99. 103.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		108	93	28	78	16	13	88	63	56
1	1	107	106	7	73	44	48	21	41	3
2	94	8	92	105	91	32	100	84	58	10
3	29	74	33	27	6	104	26	65	96	35
4	79	45	101	66	77	72	90	5	76	68
5	17	49	85	97	69	15	43	31	103	71
6	14	22	59	36	18	23	12	47	99	25
7	89	42	11	80	50	60	81	87	20	83
8	64	4	30	46	86	37	51	38	62	40
9	57	95	75	102	98	19	61	52	53	55
10	2	9	34	67	70	24	82	39	54	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	19	81	47	34	13	21	101
1	29	72	66	6	60	55	5	50	64	95
2	78	17	61	65	105	69	36	33	3	30
3	82	57	25	32	102	39	63	85	87	107
4	89	18	71	56	15	41	83	67	16	51
5	74	86	97	98	108	99	9	90	28	62
6	75	96	88	8	80	37	43	103	49	54
7	104	59	45	14	31	92	48	44	4	40
8	73	76	106	79	27	52	84	77	7	70
9	46	24	22	2	20	91	38	53	94	68
10	26	42	93	58	35	23	12	11	1	

NOMBRE PREMIER 113.

Racines primitives: 3. 5. 6. 10. 12. 17. 19. 20. 21. 23. 24. 27. 29. 33. 34. 37. 38. 39. 43. 45. 46. 47. 54. 55. 58. 59. 66. 67. 68. 70. 74. 75. 76. 79. 80. 84. 86. 89. 90. 92. 93. 94. 96. 101. 103. 107. 108. 110.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		112	52	79	104	61	19	72	44	46
1	1	22	71	58	12	28	96	59	98	93
2	53	39	74	105	11	10	110	13	64	87
3	80	30	36	101	111	21	38	29	33	25
4	105	34	91	17	14	107	43	97	63	32
5	62	26	50	76	65	83	4	60	27	9
6	20	106	82	6	88	7	41	99	51	70
7	73	35	90	49	81	89	85	94	77	55
8	45	92	86	24	31	8	69	54	66	67
9	47	18	95	109	37	42	3	40	84	68
10	2	15	78	57	102	100	16	75	5	48
11	23	108	56							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	96	56	108	63	65	85	59
1	25	24	14	27	44	101	106	43	91	6
2	60	35	11	110	83	39	51	58	15	37
3	31	84	49	38	41	71	32	94	36	21
4	97	66	95	46	8	80	9	90	109	73
5	52	68	2	20	87	79	112	103	13	17
6	57	5	50	48	28	54	88	89	99	86
7	69	12	7	70	22	107	53	78	102	3
8	30	74	62	55	98	76	82	29	64	75
9	72	42	81	19	77	92	16	47	18	67
10	105	33	104	23	4	40	61	45	111	93
11	26	34	1							

NOMBRE PREMIER 127.

Racines primitives: 3. 6. 7. 12. 14. 23. 29. 39. 43. 45. 46. 48. 53. 55. 56. 57. 58. 65. 67. 78. 83. 85. 86. 91. 92. 93. 96. 97. 101. 106. 109. 110. 112. 114. 116. 118.

TABLES POUR LA BASE 109.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		126	18	23	56	111	41	125	54	46
1	3	52	59	20	17	8	72	118	64	42
2	21	22	70	11	77	96	58	69	35	79
3	26	50	90	75	10	110	82	112	60	43
4	39	76	40	121	88	31	29	120	95	124
5	114	15	56	67	87	37	53	65	97	91
6	44	30	68	45	108	5	93	107	28	34
7	2	116	100	24	4	119	78	51	61	32
8	57	92	94	25	58	105	13	102	106	123
9	49	19	47	73	12	27	113	89	16	98
10	6	101	53	14	74	7	85	84	105	1
11	55	9	71	80	83	122	115	66	109	117
12	62	104	48	99	86	81	63			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		109	70	10	74	65	100	105	15	111
1	34	23	94	86	105	51	98	14	2	91
2	13	20	21	3	73	83	30	95	68	46
3	61	45	79	102	69	28	4	55	26	40
4	42	6	19	39	60	63	9	92	122	90
5	31	77	11	56	8	110	52	80	84	12
6	38	78	120	126	18	57	117	53	62	27
7	22	112	16	93	104	33	41	24	76	29
8	113	125	36	114	107	106	124	54	44	97
9	32	59	81	66	82	48	25	58	99	123
10	72	101	87	85	121	107	88	67	64	118
11	35	5	37	96	50	116	31	119	17	75
12	47	43	115	89	49	7	1			

Nombre premier 131.

Racines primitives : 2. 6. 8. 10. 14. 17. 22. 23. 26. 29. 30. 31. 37. 40. 50. 54. 56. 57. 66. 67. 72. 76. 82. 83. 85. 87. 88. 90. 93. 95. 96. 97. 98. 103. 104. 106. 110. 111. 115. 116. 118. 119. 120. 122. 124. 126. 127. 128.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		130	83	126	36	48	79	38	119	122
1	1	98	32	64	121	44	72	59	75	45
2	84	34	51	89	115	96	17	118	74	73
3	127	67	25	94	12	86	28	23	128	60
4	37	58	117	22	4	40	42	5	68	76
5	49	55	100	78	71	16	27	41	26	46
6	80	104	20	30	108	112	47	43	95	85
7	39	15	111	91	106	92	81	6	13	35
8	120	114	11	3	70	107	105	69	87	52
9	123	102	125	63	88	93	21	77	29	90
10	2	62	8	9	53	82	31	50	24	116
11	99	19	110	10	124	7	109	56	129	97
12	33	66	57	54	103	14	113	101	61	18
13	65									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	83	44	47	77	115	102	103
1	113	82	34	78	125	71	55	26	129	111
2	62	96	43	37	108	32	58	56	36	98
3	63	106	12	120	21	79	4	40	7	70
4	45	57	46	67	15	19	59	66	5	50
5	107	22	89	104	123	51	117	122	41	17
6	39	128	101	93	13	130	121	31	48	87
7	84	54	16	29	28	18	49	97	53	6
8	60	76	105	2	20	69	35	88	94	23
9	99	73	75	95	33	68	25	119	11	110
10	52	127	91	124	61	86	74	85	64	116
11	112	72	65	126	81	24	109	42	27	8
12	80	14	9	90	114	92	3	30	38	118
13	1									

NOMBRE PREMIER 137.

Racines primitives : 3. 5. 6. 12. 13. 20. 21. 23. 24. 26. 27. 29. 31. 33. 35. 40. 42. 43. 45. 46. 47. 48. 51. 52. 53. 54. 55. 57. 58. 62. 66. 67. 70. 71. 75. 79. 80. 82. 83. 84. 85. 86. 89. 90. 91. 92. 94. 95. 97. 102. 104. 106. 108. 110. 111. 113. 114. 116. 117. 124. 125. 131. 132. 134.

TABLES POUR LA BASE 12.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		136	130	13	124	23	7	2	118	26
1	17	90	1	53	132	36	112	86	20	54
2	11	15	84	129	131	46	47	39	126	95
3	30	133	106	103	80	25	14	102	48	66
4	5	51	9	37	78	49	123	111	125	4
5	40	99	41	71	33	113	120	67	89	128
6	24	110	127	28	100	76	97	87	74	6
7	19	29	8	32	96	59	42	92	60	21
8	135	52	45	101	3	109	31	108	72	57
9	43	55	117	10	105	77	119	73	134	116
10	34	82	93	12	35	38	65	98	27	58
11	107	115	114	63	61	16	83	79	122	88
12	18	44	104	64	121	69	22	85	94	50
13	70	75	91	56	81	62	68			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		12	7	84	49	40	69	6	72	42
1	93	20	103	3	36	21	115	10	120	70
2	18	79	126	5	60	35	9	108	63	71
3	30	86	73	54	100	104	15	43	105	27
4	50	52	76	90	121	82	25	26	38	45
5	129	41	81	13	19	91	133	89	109	75
6	78	114	135	113	123	106	39	57	136	125
7	130	53	88	97	68	131	65	95	44	117
8	34	134	101	116	22	127	17	67	119	58
9	11	132	77	102	128	29	74	66	107	51
10	64	83	37	33	122	94	32	110	88	85
11	61	47	16	55	112	111	99	92	8	96
12	56	124	118	46	4	48	28	62	59	23
13	2	24	14	31	98	80	1			

NOMBRE PREMIER 139.

Racines primitives: 2. 3. 12. 15. 17. 18. 19. 21. 22. 26. 32. 40. 50. 53. 56. 58. 61. 68. 70. 72. 73. 85. 88. 90. 92. 93. 98. 101. 102. 104. 108. 109. 110. 111. 114. 115. 119. 123. 126. 128. 130. 132. 134. 135.

TABLES POUR LA BASE 92.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		138	119	49	100	22	30	16	81	98
1	3	74	11	26	135	71	62	37	79	83
2	122	65	55	39	130	44	7	9	116	8
3	52	40	43	123	18	38	60	136	64	75
4	103	82	46	23	36	120	20	70	111	32
5	25	86	126	73	128	96	97	132	127	15
6	33	125	21	114	24	48	104	110	137	88
7	19	68	41	35	117	93	45	90	56	102
8	84	58	63	28	27	59	4	57	17	94
9	101	42	1	89	51	105	92	115	13	34
10	6	133	67	129	107	87	54	112	109	121
11	77	47	78	76	113	61	108	124	134	53
12	14	10	106	131	2	66	95	80	5	72
13	29	12	85	99	91	31	118	50	69	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		92	124	10	86	128	100	26	29	27
1	121	12	131	98	120	59	7	88	34	70
2	46	62	5	43	64	50	13	84	83	130
3	6	135	49	60	99	73	44	17	35	23
4	31	72	91	32	25	76	42	111	65	3
5	137	94	30	119	106	22	78	87	81	85
6	36	115	16	82	38	21	125	102	71	138
7	47	15	129	53	11	39	113	110	112	18
8	127	8	41	19	80	132	51	105	69	93
9	77	134	96	75	89	126	55	56	9	133
10	4	90	79	40	66	95	122	104	116	108
11	67	48	107	114	63	97	28	74	136	2
12	45	109	20	33	117	61	52	58	54	103
13	24	123	57	101	118	14	37	68	1	

NOMBRE PREMIER 149.

Racines primitives : 2. 3. 8. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 18. 21. 23. 27. 32. 34. 38. 40. 41. 43. 48. 50. 51. 52. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 62. 65. 66. 70. 71. 72. 74. 75. 77. 78. 79. 83. 84. 87. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 97. 98. 99. 101. 106. 108. 109. 111. 115. 117. 122. 126. 128. 131. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 141. 146. 147.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		148	117	115	86	32	84	38	55	82
1	1	25	53	133	7	147	24	4	51	60
2	118	5	142	15	22	64	102	49	124	128
3	116	52	141	140	121	70	20	136	29	100
4	87	61	122	77	111	114	132	14	139	76
5	33	119	71	34	18	57	93	27	97	9
6	85	6	21	120	110	17	109	104	90	130
7	39	143	137	72	105	31	146	63	69	113
8	56	16	30	35	91	36	46	95	80	11
9	83	23	101	19	131	92	108	145	45	107
10	2	65	88	58	40	37	3	48	135	13
11	26	103	62	94	144	47	66	67	126	42
12	54	50	123	28	138	96	89	68	79	44
13	134	125	78	98	73	81	59	127	99	75
14	8	129	112	10	106	12	41	43	74	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	106	17	21	61	14	140	59
1	143	89	145	109	47	23	81	65	54	93
2	36	62	24	91	16	11	110	57	123	38
3	82	75	5	50	53	83	85	105	7	70
4	104	146	119	147	129	98	86	115	107	27
5	121	18	31	12	120	8	80	55	103	136
6	19	41	112	77	25	101	116	117	127	78
7	35	52	73	134	148	139	49	43	132	128
8	88	135	9	90	6	60	4	40	102	126
9	68	84	95	56	113	87	125	58	133	138
10	39	92	26	111	67	74	144	99	96	66
11	64	44	142	79	45	3	30	2	20	51
12	63	34	42	122	28	131	118	137	29	141
13	69	94	46	13	130	108	37	72	124	48
14	33	32	22	71	114	97	76	15	1	

Nombre premier 151.

Racines primitives: 6. 7. 12. 13. 14. 15. 30. 35. 48. 51. 52. 54. 56. 61. 63. 71. 77. 82. 89. 93. 96. 102. 104. 106. 108. 109. 111. 112. 114. 115. 117. 120. 126. 129. 130. 133. 134. 140. 141. 146.

Tables pour la base 114.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		150	70	141	140	82	61	37	60	132
1	2	34	131	101	107	73	130	88	52	90
2	72	28	104	115	51	14	21	123	27	54
3	143	58	50	25	8	119	122	76	10	92
4	142	111	98	38	24	64	35	86	121	74
5	84	79	91	69	43	116	97	81	124	30
6	63	59	128	19	120	33	95	93	78	106
7	39	137	42	87	146	5	80	71	12	117
8	62	114	31	3	18	20	108	45	94	53
9	134	138	105	49	6	22	41	118	144	16
10	4	9	149	46	11	110	139	99	113	23
11	36	67	17	85	1	47	44	83	100	125
12	133	68	129	102	48	96	89	126	40	29
13	103	147	15	127	13	55	148	32	26	56
14	109	77	57	135	112	136	7	65	66	145
15	75									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		114	10	83	100	75	94	146	34	101
1	38	104	78	134	25	132	99	112	84	63
2	85	26	95	109	44	33	138	28	21	129
3	59	82	137	65	11	46	110	7	43	70
4	128	96	72	54	116	87	103	115	124	93
5	32	24	18	89	29	135	139	142	31	61
6	8	6	80	60	45	147	148	111	121	53
7	2	77	20	15	49	150	37	141	68	51
8	76	57	5	117	50	113	47	73	17	126
9	19	52	39	67	88	66	125	56	42	107
10	118	13	123	130	22	92	69	14	86	140
11	105	41	144	108	81	23	55	79	97	35
12	64	48	36	27	58	119	127	133	62	122
13	16	12	9	120	90	143	145	71	91	106
14	4	3	40	30	98	149	74	131	136	102
15	1									

*

NOMBRE PREMIER 157.

Racines primitives: 5. 6. 15. 18. 20. 21. 24. 26. 34. 38. 43. 53. 55. 60. 61. 62. 63. 66.
69. 70. 72. 73. 74. 77. 80. 83. 84. 85. 87. 88. 91. 94. 95. 96. 97. 102.
104. 114. 119. 123. 131. 133. 136. 137. 139. 142. 151. 152.

TABLES POUR LA BASE 139.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		156	147	122	138	11	113	57	129	88
1	2	152	104	130	48	133	120	128	79	116
2	149	23	143	81	95	22	121	54	39	15
3	124	58	111	118	119	68	70	28	107	96
4	140	75	14	151	134	99	72	76	86	114
5	13	94	112	25	45	7	30	82	6	27
6	115	155	49	145	102	141	109	12	110	47
7	59	64	61	83	19	144	98	53	87	9
8	131	20	66	97	5	139	142	137	125	32
9	90	31	63	24	67	127	77	37	105	84
10	4	108	85	123	103	34	16	91	36	8
11	154	150	21	56	73	92	153	62	18	29
12	106	148	146	41	40	33	136	46	93	117
13	132	43	100	17	3	65	101	71	38	1
14	50	42	55	126	52	26	74	80	10	51
15	135	35	89	60	44	69	78			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		139	10	134	100	84	58	55	109	79
1	148	5	67	50	42	29	106	133	118	74
2	81	112	25	21	93	53	145	59	37	119
3	56	91	89	125	105	151	108	97	138	28
4	124	123	141	131	154	54	127	69	14	62
5	140	149	144	77	27	142	113	7	31	70
6	153	72	117	92	71	135	82	94	35	155
7	36	137	46	114	146	41	47	96	156	18
8	147	23	57	73	99	102	48	78	9	152
9	90	107	115	128	51	24	39	83	76	45
10	132	136	64	104	12	98	120	38	101	66
11	68	32	52	6	49	60	19	129	33	34
12	16	26	3	103	30	88	143	95	17	8
13	13	80	130	15	44	150	126	87	4	85
14	40	65	86	22	75	63	122	2	121	20
15	111	43	11	116	110	61	1			

Nombre premier 163.

Racines primitives: 2. 3. 7. 11. 12. 18. 19. 20. 29. 32. 42. 44. 45. 50. 52. 63. 66. 67. 68. 70. 72. 73. 75. 76. 79. 80. 82. 89. 92. 94. 101. 103. 106. 107. 108. 109. 112. 114. 116. 117. 120. 122. 124. 128. 129. 130. 137. 139. 147. 148. 149. 153. 154. 159.

Tables pour la base 70.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		162	71	43	142	93	114	161	51	86
1	2	97	23	57	70	136	122	159	157	127
2	73	42	6	153	94	24	128	129	141	145
3	45	39	31	140	68	92	66	75	36	100
4	144	20	113	106	77	17	62	44	3	160
5	95	40	37	18	38	28	50	8	54	27
6	116	30	110	85	102	150	49	155	139	34
7	1	52	137	7	146	67	107	96	9	103
8	53	10	91	134	22	90	15	26	148	65
9	88	56	133	82	115	58	74	130	69	21
10	4	29	111	35	108	135	89	131	109	119
11	99	118	121	14	79	84	125	143	98	158
12	25	32	101	63	19	117	156	147	11	149
13	59	112	120	126	64	60	48	47	105	13
14	72	87	123	154	46	76	78	41	55	151
15	138	104	16	83	5	132	80	33	12	61
16	124	152	81							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		70	10	48	100	154	22	73	57	78
1	81	128	158	139	113	86	152	45	53	124
2	41	99	84	12	25	120	87	59	55	101
3	61	32	121	157	69	103	38	52	54	31
4	51	147	21	3	47	30	144	137	136	66
5	56	8	71	80	58	148	91	13	95	130
6	135	159	46	123	134	89	36	75	34	98
7	14	2	140	20	96	37	145	44	146	114
8	156	162	93	153	115	63	9	141	90	106
9	85	82	35	5	24	50	77	11	118	110
10	39	122	64	79	151	138	43	76	104	108
11	62	102	131	42	6	94	60	125	111	109
12	132	112	16	142	160	116	133	19	26	27
13	97	107	155	92	83	105	15	72	150	68
14	33	28	4	117	40	29	74	127	88	129
15	65	149	161	23	143	67	126	18	119	17
16	49	7	1							

NOMBRE PREMIER 167.

Racines primitives : 5. 10. 13. 15. 17. 20. 23. 26. 30. 34. 35. 37. 39. 40. 41. 43. 45. 46. 51. 52. 53. 55. 59. 60. 67. 68. 69. 70. 71. 73. 74. 78. 79. 80. 82. 83. 86. 90. 91. 92. 95. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 109. 110. 111. 113. 117. 118. 119. 120. 123. 125. 129. 131. 134. 135. 136. 138. 139. 140. 142. 143. 145. 146. 148. 149. 151. 153. 155. 156. 158. 159. 160. 161. 163. 164. 165.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		166	86	144	6	81	64	96	92	122
1	1	110	150	43	16	59	12	143	42	50
2	87	74	30	51	70	162	129	100	102	32
3	145	152	98	88	63	11	128	127	136	21
4	7	55	160	75	116	37	137	68	156	26
5	82	121	49	31	20	25	22	128	118	23
6	65	34	72	52	18	124	8	85	149	29
7	97	159	48	71	47	140	56	40	107	119
8	93	78	141	163	80	58	161	10	36	24
9	123	139	57	130	154	131	76	14	112	66
10	2	91	41	101	135	155	117	148	106	35
11	111	105	108	103	114	132	38	165	109	73
12	151	54	120	33	158	77	138	90	104	53
13	44	45	94	146	5	15	69	62	115	19
14	17	46	79	153	134	113	157	4	133	125
15	60	95	142	99	126	67	27	84	39	9
16	13	147	164	89	61	3	83			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	165	147	134	4	40	66	159
1	87	35	16	160	97	135	14	140	64	139
2	54	39	56	59	89	55	49	156	57	69
3	22	53	29	123	61	109	88	45	116	158
4	77	102	18	13	130	131	141	74	72	52
5	19	23	63	129	121	41	76	92	85	15
6	150	164	137	34	6	60	99	155	47	136
7	24	73	62	119	21	43	96	125	81	142
8	84	5	50	166	157	67	2	20	33	163
9	127	101	8	80	132	151	7	70	32	153
10	27	103	28	113	128	111	108	78	112	118
11	11	110	98	145	114	138	44	106	58	79
12	122	51	9	90	65	149	154	37	36	26
13	93	95	115	148	144	104	38	46	126	91
14	75	82	152	17	3	30	133	161	107	68
15	12	120	31	143	94	105	48	146	124	71
16	42	86	25	83	162	117	1			

Nombre premier 173.

Racines primitives: 2. 3. 5. 7. 8. 11. 12. 17. 18. 19. 20. 26. 27. 28. 30. 32. 39. 42. 44. 45. 46. 48. 50. 53. 58. 59. 61. 62. 63. 65. 66. 68. 69. 70. 71. 72. 74. 75. 76. 79. 82. 86. 87. 91. 94. 97. 98. 99. 101. 102. 103. 104. 105. 107. 108. 110. 111. 112. 114. 115. 120. 123. 125. 127. 128. 129. 131. 134. 141. 143. 145. 146. 147. 153. 154. 155. 156. 161. 162. 165. 166. 168. 170. 171.

Tables pour la base 91.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		172	13	7	26	163	20	31	39	14
1	4	127	33	142	44	170	52	89	27	85
2	17	38	140	88	46	154	155	21	57	152
3	11	122	65	134	102	22	40	42	98	149
4	30	74	51	60	153	5	101	144	59	62
5	167	96	168	123	34	118	70	72	165	19
6	24	169	135	45	78	133	147	50	115	95
7	35	23	53	94	55	161	111	158	162	71
8	43	28	87	104	64	80	73	159	166	150
9	18	1	114	129	157	76	72	25	75	141
10	8	139	109	121	9	29	136	61	47	164
11	131	49	83	110	105	79	6	156	32	120
12	37	82	10	81	148	145	58	15	91	67
13	146	137	160	116	63	12	128	126	108	16
14	48	151	36	97	66	143	107	69	68	132
15	2	54	124	103	171	113	3	138	84	130
16	56	119	41	90	100	125	117	106	77	112
17	93	99	86							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		91	150	156	10	45	116	3	100	104
1	122	30	135	2	9	127	139	20	90	59
2	6	27	35	71	60	97	4	18	81	105
3	40	7	118	12	54	70	142	120	21	8
4	36	162	37	80	14	63	24	108	140	111
5	67	42	16	72	151	74	160	28	126	48
6	43	107	49	134	84	32	144	129	148	147
7	56	79	96	86	41	98	95	168	64	115
8	85	123	121	112	158	19	172	82	23	17
9	163	128	57	170	73	69	51	143	38	171
10	164	46	34	153	83	114	167	146	138	102
11	113	76	169	155	92	68	133	166	55	161
12	119	103	31	53	152	165	137	11	136	93
13	159	110	149	65	33	62	106	131	157	101
14	22	99	13	145	47	125	130	66	124	39
15	89	141	29	44	25	26	117	94	77	87
16	132	75	78	5	109	58	88	50	52	61
17	15	154	1							

NOMBRE PREMIER 179.

Racines primitives: 2. 6. 7. 8. 10. 11. 18. 21. 23. 24. 26. 28. 30. 32. 33. 34. 35. 37. 38. 40. 41. 44. 50. 53. 54. 55. 58. 62. 63. 69. 71. 72. 73. 78. 79. 84. 86. 90. 91. 92. 94. 96. 97. 98. 99. 102. 103. 104. 105. 109. 111. 112. 113. 114. 115. 118. 119. 120. 122. 123. 127. 128. 130. 131. 132. 133. 134. 136. 137. 140. 143. 148. 150. 152. 154. 157. 159. 160. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 170. 174. 175. 176.

TABLES POUR LA BASE 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		178	73	52	146	106	125	23	41	104
1	1	27	20	134	96	158	114	14	177	26
2	74	75	100	65	93	34	29	156	169	70
3	53	76	9	79	87	129	72	19	99	8
4	147	101	148	144	173	32	138	136	166	46
5	107	66	102	111	51	133	64	78	143	110
6	126	94	149	127	82	62	152	48	160	117
7	24	35	145	95	92	86	172	50	81	91
8	42	30	174	150	43	120	39	122	68	16
9	105	157	33	128	31	132	61	85	119	131
10	2	170	139	83	175	3	6	56	124	113
11	28	71	137	63	151	171	38	60	5	37
12	21	54	167	153	44	140	22	13	155	18
13	135	77	47	49	121	84	55	59	12	58
14	97	10	108	161	40	176	168	98	165	142
15	159	80	67	118	123	4	154	11	164	163
16	115	88	103	25	69	7	45	109	116	90
17	15	130	112	36	17	57	141	162	89	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	105	155	118	106	165	39	32
1	141	157	138	127	17	170	89	174	129	37
2	12	120	126	7	70	163	19	11	110	26
3	81	94	45	92	25	71	173	119	116	86
4	144	8	80	84	124	166	49	132	67	133
5	77	54	3	30	121	136	107	175	139	137
6	117	96	65	113	56	23	51	152	88	164
7	29	111	36	2	20	21	31	131	57	33
8	151	78	64	103	135	97	75	34	161	178
9	169	79	74	24	61	73	14	140	147	38
10	22	41	52	162	9	90	5	50	142	167
11	59	53	172	109	16	160	168	69	153	98
12	85	134	87	154	108	6	60	63	93	35
13	171	99	95	55	13	130	47	112	46	102
14	125	176	149	58	43	72	4	40	42	62
15	83	114	66	123	156	128	27	91	15	150
16	68	143	177	159	158	148	48	122	146	28
17	101	115	76	44	82	104	145	18	1	

Nombre premier 181.

Racines primitives : 2. 10. 18. 21. 23. 24. 28. 41. 47. 50. 53. 54. 57. 58. 63. 66. 69. 76. 77. 78. 83. 84. 85. 90. 91. 96. 97. 98. 103. 104. 105. 112. 115. 118. 123. 124. 127. 128. 131. 134. 140. 153. 157. 158. 160. 163. 171. 179.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		180	133	68	86	48	21	15	39	136
1	1	146	154	32	148	116	165	55	89	135
2	134	83	99	29	107	96	172	24	101	84
3	69	27	125	34	8	63	42	38	88	100
4	87	59	36	140	52	4	162	109	60	30
5	49	123	118	121	157	14	54	23	37	108
6	22	65	160	151	78	80	167	66	141	97
7	16	57	175	20	171	164	41	161	53	166
8	40	92	12	73	169	103	93	152	5	25
9	137	47	115	95	62	3	13	79	163	102
10	2	130	76	143	71	131	74	81	110	85
11	147	106	7	51	156	77	170	168	61	70
12	155	112	18	127	113	144	104	67	31	28
13	33	139	120	150	19	72	94	142	50	126
14	149	177	10	178	128	132	153	98	124	35
15	117	159	174	11	114	75	6	17	119	9
16	173	44	45	179	145	82	26	58	122	64
17	56	91	46	129	105	111	138	176	158	43
18	90									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	95	45	88	156	112	34	159
1	142	153	82	96	55	7	70	157	122	134
2	73	6	60	57	27	89	166	31	129	23
3	49	128	13	130	33	149	42	58	37	8
4	80	76	36	179	161	162	172	91	5	50
5	138	113	44	78	56	17	170	71	167	41
6	48	118	94	35	169	61	67	127	3	30
7	119	104	135	83	106	155	102	115	94	97
8	65	107	165	21	29	109	4	40	38	18
9	180	171	81	86	136	93	25	69	147	22
10	39	28	99	85	126	174	111	24	59	47
11	108	175	121	124	154	92	15	150	52	158
12	132	53	168	51	148	32	139	123	144	173
13	101	105	145	2	20	19	9	90	176	131
14	43	68	137	103	125	164	11	110	14	140
15	133	63	87	146	12	120	114	54	178	151
16	62	77	46	98	75	26	79	66	117	84
17	116	74	16	160	152	72	177	141	143	163
18	1									

NOMBRE PREMIER 191.

Racines primitives : 19. 21. 22. 28. 29. 33. 35. 42. 44. 47. 53. 56. 57. 58. 61. 62. 63. 71. 73. 74. 76. 83. 87. 88. 89. 91. 93. 94. 95. 99. 101. 105. 106. 110. 111. 112. 113. 114. 116. 119. 123. 124. 126. 127. 131. 132. 137. 140. 141. 143. 145. 146. 148. 151. 157. 164. 165. 167. 168. 171. 173. 174. 175. 176. 178. 179. 181. 182. 183. 187. 188. 189.

TABLES POUR LA BASE 157.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		190	102	148	14	90	60	133	116	106
1	2	115	162	156	45	48	28	184	18	93
2	104	91	27	112	74	180	68	64	147	29
3	150	125	130	73	96	33	120	65	5	114
4	16	145	3	174	129	6	24	39	176	76
5	92	142	170	77	166	15	59	51	131	182
6	62	63	37	49	42	56	175	44	8	70
7	135	69	32	189	167	138	107	58	26	66
8	118	22	57	173	105	84	86	177	41	149
9	108	99	126	83	141	183	88	46	178	31
10	4	13	54	136	82	181	179	10	78	152
11	117	23	161	121	153	12	43	72	94	127
12	164	40	165	103	139	80	151	137	144	132
13	158	157	87	36	146	154	110	71	172	75
14	47	187	171	81	134	119	101	34	79	98
15	50	111	19	100	160	25	128	1	168	35
16	30	55	124	52	159	163	85	169	17	122
17	186	9	188	113	89	123	143	140	61	67
18	20	97	11	21	38	155	185	109	53	7
19	95									

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		157	10	42	100	38	45	189	68	171
1	107	182	115	101	4	55	40	168	18	152
2	180	183	81	111	46	155	78	22	16	29
3	160	99	72	35	147	159	133	62	184	47
4	121	88	64	116	67	14	97	140	15	63
5	150	57	163	188	102	161	65	82	77	56
6	6	178	60	61	27	37	79	179	26	71
7	69	137	117	33	24	139	49	53	108	148
8	125	143	104	93	85	166	86	132	96	174
9	5	21	50	19	118	190	34	181	149	91
10	153	146	2	123	20	84	9	76	90	187
11	136	151	23	173	39	11	8	110	80	145
12	36	113	169	175	162	31	92	119	156	44
13	32	58	129	7	144	70	103	127	75	124
14	177	94	51	176	128	41	134	28	3	89
15	30	126	109	114	135	185	13	131	130	164
16	154	112	12	165	120	122	54	74	158	167
17	52	142	138	83	43	66	48	87	98	106
18	25	105	59	95	17	186	170	141	172	73
19	1									

Nombre premier 193.

Racines primitives: 5. 10. 15. 17. 19. 22. 26. 30. 34. 37. 38. 40. 41. 44. 45. 47. 51. 52. 53. 57. 58. 61. 66. 70. 73. 77. 78. 79. 80. 82. 90. 91. 102. 103. 111. 113. 114. 115. 116. 120. 123. 127. 132. 135. 136. 140. 141. 142. 146. 148. 149. 152. 153. 155. 156. 159. 163. 167. 171. 174. 176. 178. 183. 188.

Tables pour la base 10.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		192	182	156	172	11	146	184	162	120
1	1	93	136	15	174	167	152	149	110	59
2	183	148	83	54	126	22	5	84	164	9
3	157	134	142	57	139	3	100	55	49	171
4	173	125	138	72	73	131	44	127	116	176
5	12	113	187	79	74	104	154	23	191	92
6	147	133	124	112	132	26	47	6	129	18
7	185	27	90	41	45	178	39	85	161	109
8	163	48	115	190	128	160	62	165	63	81
9	121	7	34	98	117	70	106	10	166	21
10	2	130	103	25	177	159	69	158	64	32
11	94	19	144	67	13	65	181	135	82	141
12	137	186	123	89	114	33	102	143	122	36
13	16	28	37	51	188	95	119	58	8	170
14	175	91	17	108	80	20	31	140	35	169
15	168	42	29	77	75	145	151	4	99	43
16	153	46	38	61	105	68	180	101	118	30
17	150	179	52	87	155	14	53	56	71	78
18	111	40	189	97	24	66	88	50	107	76
19	60	86	96							

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	100	35	157	26	67	91	138	29
1	97	5	50	114	175	13	130	142	69	111
2	145	99	25	57	184	103	65	71	131	152
3	169	146	109	125	92	148	129	132	162	76
4	181	73	151	159	46	74	161	66	81	38
5	187	133	172	176	23	37	177	33	137	19
6	190	163	86	88	108	115	185	113	165	106
7	95	178	43	44	54	154	189	153	179	53
8	144	89	118	22	27	77	191	173	186	123
9	72	141	59	11	110	135	192	183	93	158
10	36	167	126	102	55	164	96	188	143	79
11	18	180	63	51	124	82	48	94	168	136
12	9	90	128	122	62	41	24	47	84	68
13	101	45	64	61	31	117	12	120	42	34
14	147	119	32	127	112	155	6	60	21	17
15	170	156	16	160	56	173	3	30	107	105
16	85	78	8	80	28	87	98	15	150	149
17	139	39	4	40	14	140	49	104	75	171
18	166	116	2	20	7	70	121	52	134	182
19	83	58	1							

*

NOMBRE PREMIER 197.

Racines primitives: 2. 3. 5. 8. 11. 12. 13. 17. 18. 21. 27. 30. 31. 32. 35. 38. 44. 45. 46. 48. 50. 52. 56. 57. 58. 66. 67. 71. 72. 73. 74. 75. 78. 79. 80. 82. 86. 89. 91. 94. 95. 98. 99. 102. 103. 106. 108. 111. 115. 117. 118. 119. 122. 123. 124. 125. 126. 130. 131. 139. 140. 141. 145. 147. 149. 151. 152. 153. 159. 162. 165. 166. 167. 170. 176. 179. 180. 184. 185. 186. 189. 192. 194. 195.

TABLES POUR LA BASE 73.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		196	61	65	122	137	126	86	183	130
1	2	5	187	153	147	6	48	95	191	182
2	63	151	66	68	52	78	18	195	12	40
3	67	173	109	70	156	27	56	148	47	22
4	124	46	16	54	127	71	129	106	113	172
5	139	160	79	80	60	142	73	51	101	96
6	128	180	38	20	170	94	131	57	21	133
7	88	179	117	1	13	143	108	91	83	59
8	185	64	107	14	77	36	115	105	188	23
9	132	43	190	42	167	123	174	102	37	135
10	4	76	25	69	140	92	141	34	121	90
11	7	17	134	175	112	9	162	87	157	181
12	189	10	45	111	99	19	81	186	35	119
13	155	33	192	72	118	136	82	30	194	3
14	149	171	44	158	178	177	62	41	74	15
15	8	31	169	29	152	114	144	26	120	145
16	50	154	125	58	168	11	75	165	138	110
17	97	116	176	150	166	164	53	161	84	93
18	193	146	104	49	55	89	103	100	32	85
19	184	28	39	24	163	159	98			

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		73	10	139	100	11	15	110	150	115
1	121	165	28	74	83	149	42	111	26	125
2	63	68	39	89	193	102	157	35	191	153
3	137	151	188	131	107	128	85	98	62	192
4	29	147	93	91	142	122	41	38	16	183
5	160	57	24	176	43	184	36	67	163	79
6	54	2	146	20	81	3	22	30	23	103
7	33	45	133	56	148	166	101	84	25	52
8	53	126	136	78	178	189	7	117	70	185
9	109	77	105	179	65	17	59	170	196	124
10	187	58	97	186	182	87	47	82	76	32
11	169	123	114	48	155	86	171	72	134	129
12	158	108	4	95	40	162	6	44	60	46
13	9	66	90	69	112	99	135	5	168	50
14	104	106	55	75	156	159	181	14	37	140
15	173	21	154	13	161	130	34	118	143	195
16	51	177	116	194	175	167	174	94	164	152
17	64	141	49	31	96	113	172	145	144	71
18	61	119	19	8	190	80	127	12	88	120
19	92	18	132	180	138	27	1			

Nombre premier 199.

Racines primitives: 3. 6. 15. 22. 30. 34. 38. 39. 41. 44. 48. 54. 68. 69. 71. 73. 75. 77. 84. 87. 95. 97. 99. 105. 108. 110. 113. 118. 119. 120. 127. 129. 133. 134. 142. 143. 146. 148. 149. 150. 152. 153. 154. 163. 164. 166. 167. 168. 170. 173. 176. 179. 183. 185. 186. 189. 190. 192. 195. 197.

Tables pour la base 127.

I.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		198	194	155	190	6	151	32	186	112
1	2	189	147	128	28	161	182	57	108	11
2	196	187	185	74	143	12	124	69	24	158
3	157	76	178	146	53	38	104	121	7	85
4	192	145	183	176	181	118	70	98	139	64
5	8	14	120	136	65	195	20	166	154	129
6	153	126	72	144	174	134	142	39	49	31
7	34	71	100	41	117	167	3	23	81	50
8	188	26	141	51	179	63	172	115	177	92
9	114	160	66	33	94	17	135	109	60	103
10	4	159	10	36	116	193	132	165	61	15
11	191	78	16	73	162	80	150	42	125	89
12	149	180	122	102	68	18	140	1	170	133
13	130	148	138	43	35	75	45	171	27	54
14	30	55	67	119	96	164	37	21	113	107
15	163	40	197	169	19	82	77	84	46	93
16	184	106	22	5	137	152	47	79	175	58
17	59	123	168	25	111	44	173	86	88	97
18	110	9	156	83	62	127	29	48	90	101
19	13	87	131	52	105	91	56	95	99	

N.

I.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		127	10	76	100	163	5	38	50	181
1	102	19	25	190	51	109	112	95	125	154
2	56	147	162	77	28	173	81	138	14	186
3	140	69	12	93	70	134	103	146	35	67
4	151	73	117	133	175	136	158	166	187	68
5	79	83	193	34	139	141	196	17	169	170
6	98	108	184	85	49	54	92	142	124	27
7	46	71	62	113	23	135	31	156	111	167
8	115	78	155	183	157	39	177	191	178	119
9	188	195	89	159	94	197	144	179	47	198
10	72	189	123	99	36	194	161	149	18	97
11	180	174	9	148	90	87	104	74	45	143
12	52	37	122	171	26	118	61	185	13	59
13	130	192	106	129	65	96	53	164	132	48
14	126	82	66	24	63	41	33	12	131	120
15	116	6	165	60	58	3	182	30	29	101
16	91	15	114	150	145	107	57	75	172	153
17	128	137	86	176	64	168	43	88	32	84
18	121	44	16	42	160	22	8	21	80	11
19	4	110	40	105	2	55	20	152	1	

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PRODUITS PYROGÉNÉS,

PAR

M. HESS.

(Lu le 8 juillet 1836.)

Sur l'existence de deux séries d'hydrogène bicarboné.

Dans un mémoire précédent, je crois avoir prouvé 1°, que le naphte est un produit pyrogéné; 2° que le naphte, soit naturel, soit artificiel, se trouve toujours composé d'après la formule CH^2. Pour rendre ce dernier point plus évident, j'ai réuni ci-dessous le résultat de mes analyses. Les deux premières colonnes du tableau indiquent le rapport du carbone à l'hydrogène, la somme de ces deux éléments étant prise $= 100$. Là où l'analyse a indiqué une perte, on trouve dans la troisième colonne le nombre qui y correspond.

	Sur 100 parties		
	C.	H.	O.
1. Naphte naturel purifié par des distillations réitérées avec l'acide sulfurique, l'eau et la potasse caustique	86, 95	14, 70	
Le même liquide	85, 66	15, 00	
2. Naphte de Bakou distillé une fois avec de l'eau	85, 66	14, 34	0, 45
3. Pétrole distillé une fois à lui seul	85, 95	14, 05	3, 62
4. Une autre portion de ce même pétrole . . .	85, 83	14, 17	5, 44
5. Une nouvelle portion de ce même pétrole . .	86, 05	14, 04	6, 25
6. Une nouvelle portion du même pétrole . . .	85, 74	14, 27	3, 76
7. Pétrole artificiel 1	85, 88	14, 13	4, 16
2	85, 97	14, 08	4, 81
3	86, 00	13, 99	4, 54
4	86, 13	13, 87	4, 80
8. Le même pétrole distillé avec de l'eau . . .	86, 56	14, 08	
La formule CH^2 correspond à	85, 96	14, 04	

La comparaison de ces nombres prouve suffisamment que la composition du pétrole se trouve être conforme à celle de l'hydrogène bicarboné. Je ne puis passer sous silence, que MM. Sell et Blanchet (Annales de Poggendorff, T. 29, page 134) et M. Herman à Moscou (Annales de Poggendorff, T. 18, p. 386), ont chacun de leur côté obtenu des résultats analogues.

Quant à la perte indiquée dans le tableau ci-dessus, elle doit être attribuée en grande partie à de l'oxigène, la suite de ce mémoire en donnera la preuve suffisante.

Guidé par la grande analogie qui existe entre les propriétés du liquide décrit par M. Reichenbach sous le nom d'eupion et le naphte, je tendis à démontrer

qu'ils étaient identiques dans le principe; ce n'est qu'après avoir obtenu du naphte artificiel en tout semblable au naphte naturel, que la grande différence qui se trouvait entre son point d'ébullition et celui de l'eupion, me prouva que ces deux liquides étaient réellement différents. Il était donc naturel de vouloir chercher à connaître le rapport qui existe entre ces deux substances. Pour cela, il fallait préparer de l'eupion, et c'est pendant ce travail que j'ai observé différents phénomènes que j'ai cru devoir éclaircir avant tout, et qui, par cette raison, font le sujet de ce mémoire. Je me suis servi d'huile de chènevis, usitée ici pour l'éclairage; j'essayai d'abord de la distiller dans une chaudière de cuivre, mais j'abandonnai bientôt ce procédé pour me servir de l'appareil suivant. Un canon de fusil fut placé horizontalement dans un poële de fer, comme on s'en sert pour l'analyse des substances organiques; son bout antérieur était un peu recourbé vers le bas, de manière à le plonger dans le tube de l'appareil réfrigérateur; le bout opposé était fermé par un bouchon à travers lequel passait un tube de verre, recourbé en forme de tube de sûreté et surmonté d'un petit entonnoir. Le canon de fusil se trouvant échauffé par des braises, on y introduit, par le tube de sûreté, l'huile qui se trouve dans un grand flacon muni de deux tubulures; l'une, destinée à laisser écouler l'huile par un siphon, l'autre à recevoir un tube pour maintenir la pression constante. De cette manière le canon de fusil se trouve alimenté d'huile, et l'on est tout-à-fait maître d'arrêter ou d'accélérer l'opération. La partie inférieure du serpentin, qui sert à condenser les parties huileuses, communique, au moyen d'un tube de verre, avec un flacon à deux tubulures qui sert de récipient. A la suite de ce premier flacon, on en adapte un second pour recueillir les produits qui pourraient ne pas être condensés dans le premier. De ce dernier flacon part un tube qui conduit les produits gazeux vers l'endroit où s'opère la décomposition de l'huile; là, le tube se termine par un bec qui donne issue au gaz; il suffit alors d'allumer ce dernier pour que le laboratoire soit suffisamment éclairé. Pendant tout le temps de la distillation, il se dégage, outre le gaze-leigth, une substance d'une odeur pénétrante et insupportable, qui, si elle

n'est point brûlée, attaque fortement les yeux, ce qui oblige à donner un soin particulier à tous les joints de l'appareil. Cette substance fétide est de l'acide lampique qui, vu sa grande volatilité, ne se trouve condensé qu'en partie avec les produits liquides. On distille facilement 80 onces d'huile par jour. Le lendemain avant de recommencer l'opération, il faut avoir soin de nettoyer le tube de fer.

Dans le premier récipient, on recueille des produits liquides; j'avais versé une dissolution de potasse caustique dans le second; l'expérience avait à peine duré deux heures, que la dissolution de potasse devint jaune et trouble et forma bientôt un précipité de couleur orange, qui possédait toutes les propriétés assignées par M. Liebig à la substance qu'il nomme résine d'aldéhyde. Si on essaie de se servir d'une dissolution concentrée d'ammoniaque, au lieu de potasse, elle devient trouble, et il s'y dépose un précipité blanc, de même que le long de tout le tube qui donne passage au gaz, et partout où les vapeurs d'ammoniaque se trouvent en contact avec les vapeurs qui se dégagent.

Quoique la substance blanche, dont il est ici question, me parût posséder toutes les propriétés de l'aldéhyde ammoniacal, qu'elle jaunissait à l'air comme celui-ci, répandît la même odeur, ce dont je pus juger par comparaison sur un échantillon de cette substance que m'avait communiqué M. le docteur Fritzsche, je crus néanmoins devoir faire quelques expériences comparatives. Je me servis donc d'éther au lieu de potasse ou d'ammoniaque dans le second flacon, et je le saturai après l'expérience, par du gaz ammoniaque anhydre; tout le liquide s'épaissit bientôt par le dépôt d'un précipité blanc. Séché, puis dissout dans de l'eau, cette dissolution se comportait envers le nitrate d'argent, justement comme une dissolution d'aldéhyde ammoniacal.

Je me réserve de faire une recherche séparée, pour savoir si la substance que j'ai désignée sous le nom d'acide lampique se trouverait identique avec l'acide aldéhydique.

L'huile dont je m'étais servi avait une pesanteur sp. de 0, 96. Le produit liquide recueilli avait, terme moyen, une densité de 0,93. Après avoir recueilli

une quantité suffisante de ce liquide, je le soumis à une distillation, dans une petite chaudière munie d'un couvercle qui ne laissait point échapper de vapeur, ce qui rendait tout lut inutile. Un thermomètre, qui plongeait dans le liquide, indiquait sa température; les produits de cette distillation furent condensés dans un serpentin soigneusement entouré de glace. Le liquide, soumis à la distillation, répandait une odeur insupportable d'acide lampique; son point d'ébullition ne dépassait point 75° C. au commencement de l'opération, mais il monta bientôt jusqu'à 140° C. Ce qui distilla jusqu'à cette température fut recueilli à part. Ce produit était très volatil, et affectait tellement les yeux et la respiration, qu'il fallut renoncer à s'en servir dans cet état pour un ouvrage de plus longue haleine. J'essayai de le saturer de potasse caustique, mais le liquide s'échauffa de manière à entrer en ébullition, le bouchon du flacon fut projeté avec force et une partie considérable du fluide volatilisé. Cette expérience m'apprit qu'il ne fallait pas enlever le liquide trop tôt; je continuai donc la distillation jusqu'à ce que le thermomètre indiquât 200° dans la chaudière. Le liquide obtenu jusqu'à cette température formait deux couches différentes: celle qui occupait le fond était un mélange d'eau, d'acide acétique, d'acide lampique et d'autres produits. Ce liquide fut séparé du fluide plus léger, et je n'ai point fait de recherche sur la nature des substances qu'il pouvait contenir. Le fluide supérieur fut refroidi par de la glace et saturé de potasse. L'alcali se colora en jaune et enleva au liquide son odeur pénétrante; le fluide fut soumis à une nouvelle distillation avec de l'eau, cette fois, dans une cornue en verre; le produit recueilli, lorsque le point d'ébullition du liquide fut monté jusqu'à 75° C., avait une densité de 0,711; il était presque incolore.

Deux moyens différents se présentaient dès lors pour la purification ultérieure de ce liquide: l'un consistait à le traiter par l'acide sulfurique, comme l'a fait M. Reichenbach, l'autre, à le soumettre à des distillations réitérées. Je dus m'apercevoir bientôt que le traitement par l'acide sulfurique ne faisait que m'éloigner de mon but; le liquide s'échauffait fortement avec cet acide, il brunissait, se décomposait avec dégagement d'acide sulfureux et manifestait tous les symptômes,

que M. Reichenbach attribue à la présence de la mésite. Si, malgré cela, je distillais le mélange, j'obtenais un produit dont le point d'ébullition se trouvait plus élevé que celui du liquide primitif. J'ai essayé de secouer le liquide avec de l'eau, sans qu'il parût diminuer de volume, et même des distillations réitérées à l'eau n'opérèrent aucun changement; le liquide s'échauffait avec l'acide sulfurique après, tout comme avant le traitement à l'eau. Cependant, lorsque M. Reichenbach rechercha la mésite dans les produits pyrogénés, c'est au moyen de l'eau qu'il la sépara de l'eupion *). On trouvera à l'endroit cité que M. Reichenbach, voyant que la mésite s'échauflait avec l'acide sulfurique, en conclut (page 184) que dans tous les cas où les goudrons, ou produits pyrogénés, s'échauffaient avec l'acide sulfurique, cette réaction était due à la présence de la mésite. On ne saurait méconnaître combien cette fausse argumentation lui a suscité d'entraves dans toutes ses recherches.

Voyant que j'avais affaire à un autre liquide qu'à de la mésite, j'ai résolu de soumettre le liquide que je tenais à des distillations réitérées, et d'analyser de temps en temps les produits, pour voir les changements qu'opéreraient les traitements ultérieurs. Je secouai donc le liquide avec des dissolutions de potasse jusqu'à ce qu'elles ne prissent plus de teinte jaunâtre; je le distillai ensuite dans un bain d'eau. Le récipient fut soigneusement refroidi par un mélange frigorifique. Je recueillis à part le liquide qui avait distillé jusqu'à 45° C. (le liquide se trouvait en pleine ébullition pendant tout le temps de la distillation); le liquide ainsi recueilli possédait une odeur particulière que beaucoup de personnes trouvaient désagréable; sa densité était de 0,648 à la température de 20° C. J'avoue cependant ne pas avoir donné de soins particuliers à la détermination de cette densité, le liquide n'ayant pas encore atteint un point d'ébullition constant.

Je recueillis une seconde partie du liquide, lorsque le point d'ébullition fut monté à 75° C. Je recueillis de même à part la portion du liquide qui distilla

*) Journal de Schweigger-Seidel. T. LXIX, p. 177 (année 1833).

entre 75° et 100° C. il resta dans la cornue encore un résidu liquide, dont le point d'ébullition dépassait 100° C. A cette occasion, j'ai fait l'observation intéressante que l'espace qu'occupaient les trois liquides, non compris le résidu restant dans la cornue, était plus considérable que le volume primitif du liquide. Cela me suggéra l'idée que l'ébullition en elle-même pouvait changer l'état d'agrégation des molécules de ce liquide. Pour m'en assurer, je pris un tube de verre, recourbé en forme de U; un thermomètre fut soudé dans l'une des branches; l'autre fut laissée d'une longueur considérable; le liquide étant introduit dans le tube, j'y fis le vide et je le fermai ensuite à la lampe. Le tube étant placé dans de l'eau convenablement chauffée, le liquide entra en ébullition. La branche la plus longue du tube fut entourée de glace, de façon que toutes les vapeurs condensées retombaient dans le liquide; l'ébullition ayant été prolongée pendant deux heures, je ne pus cependant pas observer de changement dans le point d'ébullition, de façon que le changement continuel qu'on observe en distillant ce liquide, ne peut provenir que de son état de mélange.

Je soumis à l'analyse une quantité indéterminée du liquide, qui donna:

Acide carbonique	1,403	= 0,38794	de carbone.
Eau	0,548	= 0,06087	d'hydrogène.

Ce qui sur 100, équivaut à:

		atomes	le calcul donne:
Carbone	86,43	1	85,96
Hydrogène	13,57	2	14,04
	100,00.		

Cette expérience ne comporte point d'autre rapport entre l'hydrogène et le carbone que celui de 1 : 2, cependant le petit surplus en carbone pouvait conduire à supposer que le liquide contenait une petite quantité de benzine; j'exposai donc le liquide à un froid de — 20°, mais il ne forma point de dépôt. Malgré la rigueur de l'hiver passé qui me permit d'exposer le liquide pendant plusieurs jours de suite à un grand froid, je n'ai pas obtenu une trace de substance cristallisée quelconque.

Je soumis alors le liquide à une analyse quantitative.

0,592 grm. donnèrent 1,831 d'acide carbonique et 0,712 d'eau.

Ce qui équivaut à:

Carbone	85,51
Hydrogène	13,55
	99,06.

En supposant la somme de l'hydrogène et du carbone = 100, on a, comme la première fois,

Carbone	86,48
Hydrogène	13,52
	100,00.

Je traitai le liquide par du sodium. Il s'y forma un dépôt brun. Le liquide, ayant été secoué à plusieurs reprises avec ce métal, jusqu'à ce qu'il n'essuyât plus aucun changement, fut distillé et soumis à une nouvelle analyse:

0,428 grain donnèrent 1,34 d'acide carbonique et 0,524 d'eau.

Ce qui équivaut à

Carbone	86,57
Hydrogène	13,60
	100,17.

Ce liquide a donc aussi la composition de l'hydrogène bicarboné et prouve par le fait que, s'il s'échauffe avec l'acide sulfurique, cela n'est point occasionné par de la mésite, qui ne peut pas s'y trouver, vu que le liquide ne contient point d'oxigène. Entouré d'un mélange frigorifique et mêlé peu à peu avec de l'acide sulfurique, le liquide fournit un mélange de couleur cramoisie; à la surface de ce mélange, il se déposa, au bout de quelque temps, une couche d'un liquide incolore, dont la quantité était petite et n'augmenta pas sensiblement dans l'espace de deux mois. Enlevé de dessus le mélange, et traité alternativement par la potasse caustique et l'acide sulfurique, il prit une légère odeur de musc. J'ai essayé de déterminer sa composition

I.	0,425 grm.	donnèrent	1,3	d'acide carbonique	et 0,555	d'eau
II.	0,407 —	—	1,235 —	—	0,550	— .

Ce qui équivaut à

	I	II
Carbone	84,76	83,93
Hydrogène	14,50	14,75
	99,26	98,68.

Les deux analyses, ayant été faites avec le même liquide, devraient s'accorder davantage, et je crois en effet que la quantité de carbone indiquée est moins grande qu'elle ne l'est effectivement, il faut attribuer cette différence à l'état de mélange de la substance; ce qui, comme on le verra plus tard, ne pouvait avoir lieu autrement; en effet, le liquide plongé dans de l'eau à 60°, entrait déjà en ébullition, tandis que pour volatiliser les dernières parties, il ne fallait rien moins qu'une chaleur rouge fort intense.

Quant au liquide le plus léger que j'ai obtenu (voyez page 392), j'ai aussi tenté d'en déterminer la composition; ce liquide, ayant été secoué, fut redistillé dans un appareil complètement fermé. Le liquide ainsi obtenu était tellement volatil, qu'il entra en ébullition dès que l'appareil fut ouvert pour l'en retirer. Lorsque cette ébullition eut cessé, le liquide était encore assez volatil pour bouillir par la chaleur de la main.

I.	0,539 grm.	donnèrent	1,619	d'acide	carbonique	et 0,656	d'eau.
II.	0,4125 —	—	1,225	—	—	— 0,500	—
III.	0,4475 —	—	1,33	—	—	— 0,542	—
IV.	0,661 —	—	2,016	—	—	— 0,796	—
V.	0,498 —	—	1,536	—	—	— 0,614	—

Ce qui équivaut à:

	I	II	III	IV	V
Carbone	83,05	82,06	82,17	84,33	85,28
Hydrogène	13,52	13,46	13,45	13,38	13,69
	96,57	95,52	95,62	97,71	98,97.

La somme du carbone et de l'hydrogène supposée = 100, on a:

	I	II	III	IV	V
Carbone	86,00	85,90	85,93	86,30	86,16
Hydrogène	13,99	14,08	14,06	13,69	13,83
	99,99	99,98	99,99	99,99	99,99.

Les atômes du carbone et de l'hydrogène se trouvent donc encore strictement dans le rapport de 1 : 2, le liquide, que je viens d'analyser, n'exerçait aucune action sur la potasse caustique, on pouvait même le distiller sur du sodium sans que celui-ci en fût terni, il est donc vraisemblable qu'il ne contenait point d'oxigène, mais il était trop volatil pour pouvoir être analysé sans perte; il est néanmoins évident qu'il ne pouvait pas entrer dans mes vues, de dégager d'abord par la chaleur les parties les plus volatiles, pour analyser le reste. Quant à ce que le liquide ne contenait point d'oxigène, je crois pouvoir le conclure aussi de l'expérience suivante. Je m'étais aperçu que quand on le conservait dans un flacon mal bouché, en contact avec de la potasse caustique, cet alcali prenait bientôt une couleur jaune-brunâtre, et il s'y déposait, au bout de quelque temps, une substance qui avait beaucoup de ressemblance avec la résine d'aldéhyde. Après avoir remarqué ceci, j'exposai une portion du liquide au contact de l'oxigène pur, sous une cloche renversée sur du mercure. L'absorption de l'oxigène se manifesta bientôt, au bout de quelques jours je fus obligé de renouveler l'oxigène. Lorsque j'essayai de traiter le liquide en partie oxidé par de la potasse caustique, il se forma un dépôt considérable de la substance jaune. Il devient donc important de faire des recherches pour savoir si, par l'oxidation de cet hydrogène bicarboné, il ne se forme point d'aldéhyde, ou bien si la résine mentionnée ne se trouve point produite d'une autre manière. Cette question mérite d'autant plus d'attention, que c'est, je crois, le premier cas observé de l'oxidation d'un hydrogène bicarboné. Le liquide moins volatil, traité de la même manière, donne le même résultat.

Quant au liquide le plus volatile, il faut que je fasse observer ici qu'ayant été mêlé avec de l'acide sulfurique, le mélange ne fut point surnagé d'un liquide incolore. Ce liquide qui, sous tant de points, paraît coïncider avec celui de M. Faraday, partage avec lui la propriété de se troubler par une évaporation prompte, et de déposer une substance blanche cristalline qui se volatilise très vîte.

Il résulte donc de ces expériences que la plus grande partie du carbure d'hydrogène que je viens de traiter, a la faculté de se combiner avec l'acide sulfurique, et il paraît même que la partie, qui ne se combine point avec cet acide, renferme un nombre d'atomes de carbone et d'hydrogène, qui se trouve dans le rapport de 1 : 2. La distillation sèche donne donc lieu à un grand nombre de produits, composés de carbone et d'hydrogène dans le rapport indiqué. Ces combinaisons forment deux séries très distinctes, en ce que l'une d'elles ne manifeste aucune affinité pour l'acide sulfurique; tandis que l'autre se combine avec lui, avec beaucoup d'énergie. Je nomme la première série, série *passive*; la seconde, série *active*. La série passive comprend, parmi les combinaisons déjà connues aujourd'hui, la *paraffine*, le *naphte*, avec ses divers degrés de densité, et probablement aussi l'*eupion*; et enfin, l'hydrogène bicarboné ou gaz oléfiant. La seconde série ne contient encore que peu de combinaisons qui sont: le liquide dont je viens de faire l'analyse et l'hydrogène bicarboné gazeux de M. Faraday (quadricarbure C^2H^4). Les membres de cette série, se trouvant combinés à l'acide sulfurique, forment des sels doubles avec les alcalis. Il est donc possible que le Capnomore de M. Reichenbach appartienne à cette série.

Si les deux séries que je viens de distinguer, sont isomères, on peut en conclure avec certitude, que les différents membres de ces séries, se trouvent dans le rapport de substances polymères. C'est aussi là la raison pour laquelle ces différents membres d'une série (par exemple de la série passive), n'ont pas encore pu être séparés, et cela explique pourquoi on n'a pu isoler que les deux combinaisons extrêmes de cette série, le gaz oléfiant, à cause de son état gazeux, et la paraffine, à cause de son état cristallin. Il est donc évident que, si dans le cas présent, qui est peut-être le seul que nous offre la science jusqu'aujourd'hui, on n'eût pas entrepris l'analyse élémentaire, avant d'obtenir un liquide d'un point d'ébullition constant, on aurait pu tâtonner encore long-temps et créer de nouveaux noms pour des substances mal caractérisées, sans se rapprocher de la vérité.

La distinction des deux séries que je viens d'établir, se trouve parfaitement en harmonie avec d'autres phénomènes que nous présente la science. Le changement qui s'opère, quand plusieurs substances inorganiques passent d'un état soluble dans un état parfaitement insoluble pour les acides, offre une analogie parfaite avec le cas que je viens de citer. Les deux états de l'hydrogène phosphoré nous présentent une nouvelle analogie, en ce que l'un de ces gaz se comporte d'une manière active envers l'oxigène, tandis que l'autre se comporte d'une manière passive envers ce même gaz.

Il était naturel de se demander, d'où pouvaient provenir ces différents états du carbure d'hydrogène. Je vais citer quelques faits, pour tâcher d'y répondre. On se souviendra que je me suis servi d'un canon de fusil, chauffé par des braises, pour décomposer l'huile. Les premières portions du produit obtenu furent secouées avec de l'eau, séparées de ce liquide et soumises à une distillation, dans une cornue en verre. Les parties les plus volatiles, les premières que l'on obtint, furent traitées par la potasse caustique, ensuite par l'acide sulfurique. Le liquide *s'échauffa peu* avec cet acide. Je continuai donc à décomposer l'huile comme cela a été indiqué p. 389. Les différentes portions du liquide ainsi obtenu se comportaient tout différemment envers l'acide sulfurique; elles s'échauffaient fortement à son contact. C'était le liquide le plus volatile qui s'échauffait le plus, et il ne s'en sépara point de carbure d'hydrogène passif, la partie du liquide moins volatile, qui avait été obtenue entre les limites de 45° et 75° C, n'abandonna qu'une petite portion de carbure passif qui, naturellement, devait contenir presque tous les membres de cette série. On voit bien que ce résultat ne s'accordait nullement avec celui du premier essai; il était cependant évident que d'après la méthode de décomposition dont je m'étais servi, les premiers produits ne pouvaient nullement différer des derniers. Je croyais m'être aperçu que la température avait été beaucoup plus élevée vers la fin de l'opération que dans le commencement, et je croyais ne pouvoir attribuer la différence du résultat qu'à la différence de température; pour m'en assurer je pris un tube très mince en cuivre

jaune, je le posai dans la canelure d'un morceau de tole, comme on s'en sert pour l'analyse des substances organiques, et j'échauffai le tout par une lampe à esprit de vin, que j'avais fait construire dans le but de m'en servir pour l'analyse des substances organiques. Cette lampe étant construite sur le principe des lampes à double courant, elle permettait parfaitement de régler la chaleur.

L'huile ayant été décomposée par cet appareil, à une chaleur beaucoup moindre que la première fois, les premières portions du liquide, après avoir été convenablement traitées, s'échauffèrent à la vérité, avec l'acide sulfurique, mais elles laissèrent se déposer à la superficie une quantité considérable de liquide passif, ce liquide avait une odeur aromatique très forte; un grand excès d'acide sulfurique la lui enlevait complètement.

Nous voyons donc évidemment qu'une température convenablement mesurée, détermine plus particulièrement la formation de combinaisons passives; tandis qu'une température plus élevée, détermine la formation de combinaisons actives. Comme le pétrole consiste, en grande partie, en hydrogène bicarboné passif, il paraît en résulter que la température, qui a présidé à sa formation, n'a jamais dépassé une certaine limite. Je me réserve de la déterminer dans un des prochains ouvrages que je vais entreprendre. Quant au pétrole, il faut observer qu'il n'est pas uniquement composé de carbure d'hydrogène passif, mais qu'il contient aussi plus ou moins de carbure actif. C'est aussi la raison pour laquelle certain pétrole ne s'échauffe presque nullement avec l'acide sulfurique, même dans son état naturel, tel par exemple est le naphte que l'on tire des sources de Surachansk, près de Bakou; tandis que tel autre pétrole s'échauffe d'une manière fort sensible avec l'acide.

Dans mon premier mémoire sur le naphte, j'ai toujours essuyé une perte, en analysant le pétrole qui n'avait point été dégagé du carbure actif; cette perte ne peut être attribuée à de l'oxigène, qu'autant qu'on puisse donner des preuves de sa présence, or celles-ci ne sont point difficiles à fournir. Je renfermai un peu de ce pétrole dans une éprouvette, remplie d'oxigène et renversée sur du mercure;

je plaçai, à côté, une autre éprouvette contenant du naphte complètement passif. Au bout de quinze jours, on ne pouvait pas encore remarquer de traces sensibles d'absorbtion, par le naphte passif; tandis que le pétrole, renfermé dans l'autre tube, avait absorbé, dans l'espace de huit jours, plus de six fois son volume d'oxigène.

Après ce que je viens de citer, je me demandai s'il n'était pas possible de transformer le carbure d'hydrogène passif en carbure actif, au moyen d'une température plus élevée. On conçoit bien que cette transformation n'est pas une suite nécessaire de ce qui précède, et que le liquide ayant une fois adopté la forme passive, l'action que la chaleur exerce sur elle pourrait ne pas produire d'autre résultat que de changer l'un des membres de la série passive, en un autre membre de la même série.

Je fis passer du naphte parfaitement passif, par un tube de cuivre jaune, tout rempli de petits clous, afin d'obtenir une plus grande superficie de contact, et fortement échauffé; le liquide qui avait subi cette opération, possédait tout à fait l'odeur de l'hydrogène bicarboné actif; secoué avec de l'acide sulfurique, le liquide se colora fortement et diminua un peu de volume. Il y a donc tout lieu de croire que certains membres de la série passive peuvent passer, par l'action de la chaleur, à la série active.

En dernier lieu il ne sera pas inutile d'observer que, quand on sera parvenu à séparer les différents membres des deux séries, on ne pourra leur appliquer de nomenclature plus convenable que celle qui a été proposée par Sérullas *) pour les carbures d'hydrogène.

---

*) Annales de Chimie et de Physique. T. XXXIX p. 180.

SUR

LA TRANSFORMATION DES VARIABLES

DANS

LES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 12 août 1836.)

Il arrive fréquemment que, pour faciliter la recherche d'une intégrale multiple, l'on remplace les variables, par rapport auxquelles les intégrations doivent s'effectuer, par d'autres quantités qui sont fonctions des premières. Le principe de ce changement des variables est connu. On le doit à Euler et à Lagrange; mais ces grands géomètres ne l'ont pas, ce me semble, exposé avec toute la clarté désirable.

Je vais d'abord faire voir comment l'interprétation, à mon avis la plus naturelle des paroles d'Euler et de Lagrange *), peut conduire à un résultat complètement erroné; puis j'ajouterai ce qui manque à l'exposition de ces deux grands géomètres pour la mettre à l'abri de fausses interprétations.

§ 1. Ne considérons qu'une intégrale double $\int V dx dy$, V étant une fonction de x et de y. Supposons que x et y soient des coordonnées rectangles d'un point, que l'intégrale $\int V dy dx$ s'étend à tous les points de l'intérieur de la figure $ABCD$ (fig. 1), et que l'on veuille remplacer les coordonnées rectangles x et y par les coordonnées

---

*) Voyez Mémoires de l'académie de Berlin, 1773.

polaires r et p en sorte que $x = r \cos. p$, $y = r \sin. p$. Pour cela, en substituant dans V, à la place de x et de y, leurs valeurs précédentes, il ne restera qu'à exprimer le parallélogramme différentiel $dxdy$ en r et p. Supposons que $MM'M'''M''$ représente $dxdy$; pour avoir l'aire $dxdy$, il faut trouver $dx = MM'$ et $dy = MM''$. Or, pour passer du point M au point M', il faut, sans varier y, changer x en $x + dx$, ce qui donnera

$$dx = dr \cos. p - r \sin. pdp$$

$$o = dr \sin. p + r \cos. pdp$$

d'où

$$dx = \frac{dr}{\cos. p} = -\frac{rdp}{\sin. p}.$$

Pour passer du point M à M'', il faut au contraire laisser x constant et changer y en $y + dy$. Mais x étant constant, il ne s'en suit pas que la valeur de dx, qu'on vient de trouver, soit nulle; car chaque passage du point M à un point voisin exige d'autres accroissements de x et de y; et ce sera un autre dx qu'on doit égaler à zéro, en sorte, qu'en désignant par δp et δr les différentielles relatives au passage de M a M'', on aura

$$0 = \delta r \cos. p - r \sin. p\delta p$$

$$dy = \delta r \sin. p + r \cos. p\delta p$$

d'où

$$dy = \frac{\delta r}{\sin. p} = \frac{r\delta p}{\cos. p}$$

et par suite

$$dxdy = \frac{dr\delta r}{\cos. p \sin. p} = \frac{rdr\delta p}{\cos.^2 p} = -\frac{r\delta r\, dp}{\sin.^2 p} = -\frac{r^2 dp\delta p}{\cos. p \sin. p}$$

aucune de ces quatre valeurs n'est celle que l'on connaît.

§ 2. Considérons de nouveau l'intégrale $\int V dydx$ dont les limites sont arbitrairement données. L'intégration, d'abord par rapport à y, puis par rapport à x, présentant des difficultés, on veut changer les variables x et y en d'autres, u et v, qui sont fonctions des premières, et l'on trouve commode d'effectuer les intégrations, relatives aux nouvelles variables, d'abord par rapport à v, puis par rapport à u.

Comme l'intégrale $\int V dydx$ est la somme de tous les éléments différentiels, pour la trouver il n'y a qu'a ajouter tous les $V dydx$ qui répondent à la surface d'une courbe $ABCDEF$ (fig. 2) dont le contour a pour coordonnées les valeurs limites de x et y. L'ordre, dans lequel on ajoutera les éléments $V dydx$, est évidemment indifférent pour le résultat définitif. Mais, en le choisissant convenablement, on simplifiera beaucoup l'intégration. C'est dans les différentes manières d'ajouter les éléments différentiels, que consiste toute la théorie du changement des variables dans les intégrales multiples. Si, par exemple, on prenait l'intégrale $\int V dydx$, d'abord par rapport à y et puis par rapport à x, cela reviendrait à ajouter d'abord tous les éléments $V dydx$ qui sont relatifs à la bande AD, parallèle à l'axe des y et ayant dx pour largeur, et puis ajouter ce qui relatif à toutes les bandes semblables à AD et que l'on peut tracer dans l'intérieur de $ABCDEF$. Mais la même somme $\int V dydx$ peut s'obtenir en ajoutant les éléments $V dydx$ dans tout autre ordre, par exemple, d'abord tout ceux qui répondent à une bande courbe $BCEF$ infiniment étroite, puis on continuera l'addition des éléments par bandes semblables à $BCEF$, jusqu'à ce qu'on les aura épuisées.

Revenons à la transformation que nous avons en vue. Puisque on veut intégrer d'abord par rapport a v et puis par rapport à u, on veut évidemment ajouter d'abord tous les éléments qui répondent à une même valeur de u, et puis continuer l'addition par systèmes d'éléments, chaque système répondant à une même valeur de u; mais les valeurs de cette quantité, pour les différents systèmes, sont différentes. Comme x et y sont fonctions de u et de v, en considérant tous les x et y qui se rapportent à une même valeur de u, on parcourra une courbe que je représente par BF. — x, y et v seront différents pour les différents points de cette courbe, mais u reste le même. Si l'on fait varier u infiniment peu, en le faisant croître de du, et puis si l'on cherche tous les points qui répondent à une même valeur $u + du$ de u, on trouvera une courbe CF infiniment peu différente de BF. Aux différents points de cette courbe répondront les différentes valeurs de x, y et de v.

Nous allons sommer d'abord tous les éléments qui se rapportent à la surface $BCEF$; pour cela, divisons la en éléments comme il suit. Prenons un point M, répondant à une certaine valeur de v, sur la courbe BF, et un point M', répondant à la même valeur de v, sur la courbe CE; puis marquons deux autres points M'' et M''' qui répondent tous deux à une même valeur $v + dv$ de v, et dont le premier se trouve sur la courbe BF, et le second sur la courbe CE. Nous pouvons considérer le quadrilatère $MM'M'''M''$ comme élément de la surface $ABCDEF$. Il n'est pas nécessaire qu'il soit égal à $dydx$; sa valeur n'entre pour rien dans le résultat du calcul.

En désignant $MM'M'''M''$ par ω, on peut remplacer $Vdydx$ par $V\omega$, et nous pouvons considérer V comme fonction de v et de u qui résulte de la substitution de ces variables à la place de x et y. Nous aurons

$$\int Vdydx = \int V\omega.$$

La dernière intégrale doit être prise d'abord relativement à toutes les valeurs de v qui répondent à la courbe BF, et puis relativement à toutes les différentes valeurs que u peut recevoir dans l'intérieur de la figure $ABCDEF$.

Il nous reste à trouver la snrface différentielle ω, ce qui est très facile; car les quatre côtes de cette surface, répondant aux coordonnées x, y; $x + \frac{dx}{du}du$, $y + \frac{dy}{du}du$, $x + \frac{dx}{dv}dv$, $y + \frac{dy}{dv}dv$, $x + \frac{dx}{du} + du + \frac{dx}{dv}dv$, $y + \frac{dy}{d\bar{u}}du + \frac{dy}{dv}dv$ on en conclut que ω est un parallélogramme, donc, en vertu d'un théorème de la géométrie élémentaire, on aura

$$\omega = i\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)dvdu$$

i designant ± 1, afin que ω soit toujours positif. Nous aurons

$$\int Vdydx = \int V\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)idvdu$$

résultat connu.

Voici l'énoncé du théorème de géométrie que nous avons cité: Désignant par x, y; $x + p$, $y + q$; $x + p'$, $y + q'$, les coordonnées de trois quelconques des

quatre angles d'un parallélogramme, rapportées à son plan, l'aire du parallélogramme sera $i(pq' - qp')$, la quantité $i = \pm 1$ doit avoir le signe qui rend $i(pq' - qp')$ positif.

§ 3. Il serait facile d'étendre les considérations précédentes aux intégrales triples et de retrouver les résultats connus. Mais ces mêmes considérations, à cause du théorème de géométrie, que nous y avons mêlé, ne s'appliqueront pas à la transformation des variables dans les intégrales relatives à plus de trois quantités; par cette raison et pour rendre compte des procédés généralement employés, nous allons transformer l'intégrale $\int V dy dx$ d'une autre manière.

Comme il s'agit d'abord de prendre la somme de tous les $V dy dx$ qui répondent à l'intérieur de la bande $BCEF$, je prendrai cette somme par le principe ordinaire, en intégrant par rapport à y depuis $y = PM$ jusqu'à $y = PN$, et puis par rapport à x depuis $x = OQ$ jusqu'à $x = OR$. Or, intégrer par rapport à y, entre les limites ci-dessus, revient à multiplier par $MN = dy$, en sorte qu'il ne restera qu'à intégrer par rapport à x; or on a $MN = dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv$ et, en même temps, on doit faire $0 = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv$, car il s'agit de passer du point M au point N. D'où, en éliminant dv, on trouve $dy = \frac{\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}\right) du}{\frac{dx}{dv}}$.

Ainsi le résultat de l'intégration par rapport à y sera

$$\frac{V\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}\right) du\, dv}{\frac{du}{dv}}.$$

Maintenant il faut intégrer par rapport à x; mais il convient mieux d'introduire v à la place de x, et prendre l'intégrale depuis v qui répond au point F, jusqu'à v relatif au point B. Or comme $dx = \frac{dx}{dv} dv$, car u reste invariable pour tous les points de la courbe FB, nous aurons

$$\int V\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}\right) dv du$$

pour la somme des éléments relatifs à la bande $BCEF$. Il ne restera qu'à intégrer la somme précédente relativement à u et entre les limites convenables, pour ajouter tous les éléments relatifs à la surface entière de $ABCDEF$.

La transformation qui précède peut être facilement affranchie des considérations de courbes, et étendue à un nombre quelconque d'intégrales. Au lieu de mener les lignes BF et CE, nous aurions pu dire qu'il fallait trouver la somme des éléments relatifs aux valeurs de u comprises entre u et $u + du$; on commencera à intégrer par rapport à une des variables x ou y, par exemple par rapport à y, laissant x constant; on prendra l'intégrale entre les limites y et $y + dy$, où $y + dy$ est relatif à la valeur extrême de u, c'est-à-dire $u + du$, mais, comme x est constant, on aura $\frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv = 0$, en sorte que dv est infiniment petit. Donc $dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv = \frac{\left(\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} - \frac{dy}{dv}\frac{dx}{du}\right) du}{\frac{dx}{dv}}$ etc. Nous avons préféré d'employer la considération géométrique pour plus de clarté, car nous avons destiné cette dissertation aux personnes peu versées dans l'analyse mathématique.

§ 4. Supposons qu'on demande ce que devient l'intégrale $\int \varphi(x, y)\, dydx$, quand on y remplace respectivement x et y par X et Y, X et Y étant fonctions de x et y. Il est visible que $\varphi(x, y)$ devient $\varphi(X, Y)$; et devienne ce qu'on voudra $dydx$, je puis toujours le remplacer par $dX\,dY$; donc notre intégrale sera remplacée par $\int \varphi(X, Y)\, dYdX$, pourvu que l'intégration relativement à X et Y soit faite entre les limites convenables. Mais, pour se débarasser de la recherche de ces limites, il n'y a qu'à transformer les variables X et Y en x et y, ce qui revient à remplacer $dXdY$ par $\left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\right) dxdy$ en sorte que l'intégrale $\int \varphi(x, y)\, dxdy$, par le changement de x en X et de y en Y, deviendra

$$\int \varphi(X, Y) \left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\right) dxdy,$$

les limites de x et y sont les mêmes, que dans $\int \varphi(x, y)\, dxdy$.

On peut tirer de la solution précédente beaucoup de résultats relativement à l'intégration des fonctions à deux variables; elle renferme aussi, comme cas particulier, la recherche de la variation d'une intégrale double. Pour ce dernier objet, il n'y a qu'à remplacer X et Y, respectivement par $x+\delta x$, $y+\delta y$ et retrancher $\int\varphi(x,y)\,dxdy$ du résultat; et si $\varphi(x,y)$ contenait une variable z, regardée comme fonction de x, y, et les différences $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$,.... de cette variable, il faudrait remplacer, dans la fonction $\varphi(X,Y)$, z par Z et $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$,... par $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$,...., ou par

$$\frac{\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dx}-\frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dy}}{\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}},\quad \frac{\frac{dX}{dx}\frac{dZ}{dy}-\frac{dX}{dy}\frac{dZ}{dx}}{\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}},\ldots..$$

Quant à l'élément $dxdy$ il est inutile de chercher ce qu'il devient quand x et y sont remplacées par X et Y, car je puis toujours considérer $dXdY$ comme élément différentiel après le changement; mais si l'on voulait poursuivre $dxdy$ pendant que x et y changent et deviennent X et Y, on trouverait qu'il se réduirait à $\left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}\right)dx\,dy$.

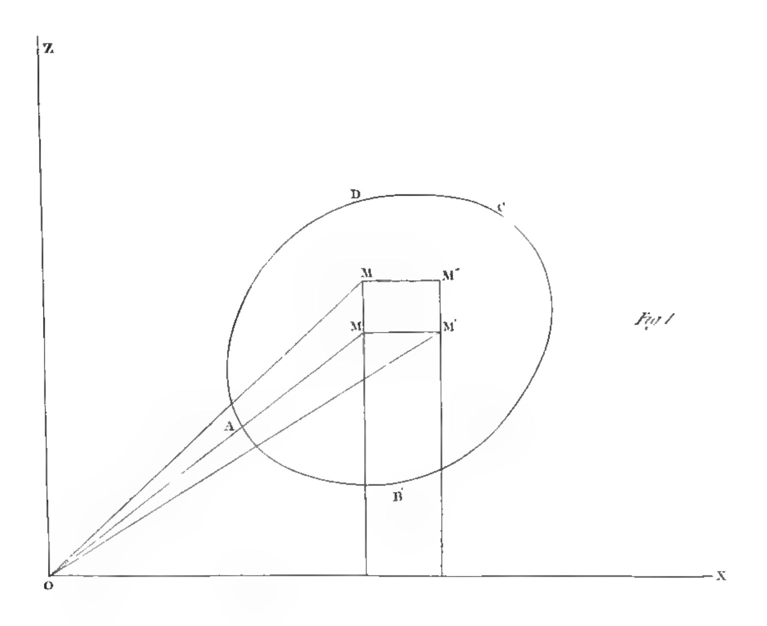


Fig. 1

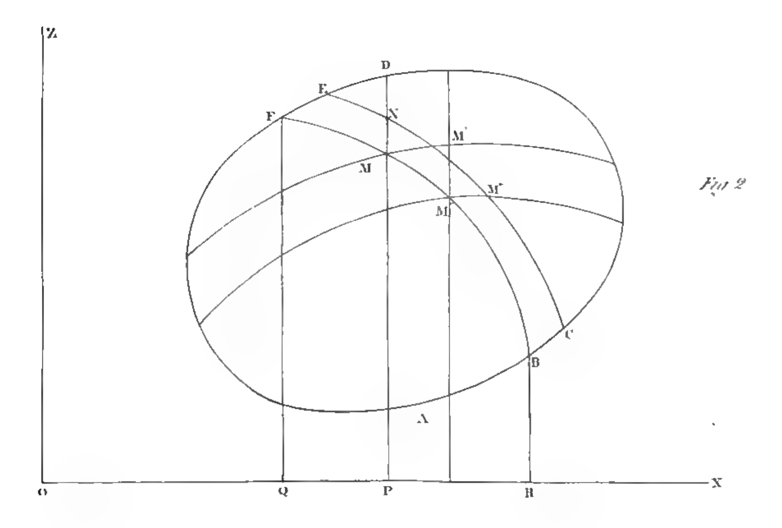


Fig. 2

MÉMOIRE

SUR L'OXIDATION DE LA SURFACE INTÉRIEURE DES TUYAUX DE FER FONDU DANS LES CONDUITES D'EAU, ET SUR LES TUYAUX DE FER COMPARÉS AUX TUYAUX DE BOIS;

PAR

M. PARROT.

(Lu le 18 décembre 1835.)

Un phénomène singulier s'est offert dans les tuyaux de fer des conduites d'eau de la ville de Grenoble. En décembre 1833, M. le maire de Grenoble publie dans la Bibliothèque universelle que, depuis 7 ans, ces conduites se trouvent tapissées de mamelons d'oxide de fer en telle quantité et grosseur, que leur produit n'égale plus la moitié du produit qu'elles fournissaient d'abord après leur établissement; ce qui cause un grand embarras à la ville de Grenoble. On assure en même temps que le même cas a lieu dans les conduites d'eau de plusieurs autres villes. Après avoir livré au public un rapport du comité des ingénieurs de Grenoble sur cet objet, le maire de la ville *conjure les savants qui ont le bien public à coeur, de proposer des moyens de remédier à l'inconvénient de l'oxidation des tuyaux de fer de fonte des conduites d'eau de Grenoble.*

Ce phénomène tient à la fois à la chimie, à la physique, à la mécanique et à la technologie, et est par conséquent d'un grand intérêt. Aussi l'académie des sciences de Paris s'en est-elle occupée deux fois. On y a lu des mémoires, des rapports, on y a discuté diverses opinions, mais sans arriver à un résultat quelconque.

Avant de connaître l'intérêt que l'académie de Paris a voué à cet objet, j'ai voulu répondre à l'appel du maire de Grenoble, et après en avoir instruit notre Académie, j'envoyai à ce digne magistrat un extrait de mon travail. Mais précisément dans ces entrefaites, je reçus le récit de ce qui avait eu lieu à l'académie de Paris à cet égard; ce qui m'engagea d'autant plus à faire partir ma lettre après y avoir fait une courte addition relative aux discussions de cette célèbre académie.

Je commencerai par présenter et discuter brièvement les opinions contenues dans le rapport des ingénieurs de Grénoble et ceux de l'académie de Paris. Puis je proposerai ma théorie de ces oxidations et les moyens d'empêcher l'oxide de fer de se former dans les conduites d'eau.

MM. les ingénieurs de Grenoble recherchent d'abord si cette oxidation ne proviendrait pas, soit de l'oxigène de l'air atmosphérique absorbé par l'eau avant son entrée dans la conduite, soit de la désoxidation de cette même eau dans l'intérieur de la conduite par le fer des tuyaux. Ils rejettent la première de ces hypothèses, parce qu'ils ont trouvé que l'air contenu dans l'eau de la conduite à sa sortie contient plus de 24 p. C. d'oxigène, proportion qui surpasse celle de l'air dans l'atmosphère libre. Mais précisément ce surplus aurait dû les engager à analyser l'air de la même eau à son entrée dans la conduite; ils eussent apparemment trouvé ce que MM. de Humboldt, Prévost et autres ont trouvé, il y a plus de 30 ans, c'est-à-dire que l'eau de pluie, de neige, de rivières contient en moyenne 28,7 p. C. d'oxigène. D'où l'on peut conclure que l'air absorbé par l'eau a perdu plus de 4 p. C. d'oxigène en traversant la conduite d'eau du rondeau sur toute sa longueur de 3200 mètres.

Ils rejetèrent la seconde hypothèse parce qu'ils n'ont trouvé dans l'eau, à sa sortie de la conduite aucune quantité sensible de gaz hydrogène; et en cela ils ont parfaitement raison. Mes anciennes expériences sur l'oxidation des métaux dans l'eau ont prouvé que cette oxidation ne produit point de gaz hydrogène.

Enfin, ils demandent si les phénomènes du galvanisme ne fourniraient pas les moyens d'arrêter cette funeste oxidation. Ils avaient apparemment en vue la grande expérience par laquelle le célèbre Davy a préservé de l'oxidation le cuivre dont on double les vaisseaux au moyen d'une surface de zink mise en contact avec le cuivre. Nous verrons bientôt ce que l'on peut attendre d'un moyen semblable. Le résultat ne sera pas pour l'affirmative.

M. Gérard lut à l'académie de Paris, en avril 1834, un mémoire sur la diminution qu'a éprouvée, de 1728 à 1833, le produit de la conduite d'eau de Grenoble. Les données sont que l'oxide rouge s'est formé en tubercules isolés de 10 à 24 millimètres de saillie, les intervalles étant restés intacts, et qu'un mètre d'un tuyau contient 453,8 grammes de cet oxide, et partant le total 1452 kilogrammes sur toute la longueur de 3200 mètres. M. Gérard examine ensuite l'hypothèse de la production de cet oxide par l'air absorbé, et conclut, comme MM. les ingénieurs de Grenoble, que cette hypothèse ne peut être la vraie, puisque l'eau, au sortir de la conduite, contient plus de gaz oxigène atmosphérique que l'air atmosphérique libre lui-même. L'on s'étonne que cet académicien ne se soit pas demandé d'où est venu ce surplus d'oxigène dans l'eau qui a passé par les tuyaux de fer de 3200 mètres, après avoir produit une si grande quantité d'oxide; ce qui l'eut conduit à demander l'analyse de l'eau de Grenoble avant son entrée dans la conduite, s'il ne s'était pas rappelé les expériences citées sur la proportion d'oxigène dans l'air absorbé par l'eau.

M. Gérard rejette également la décomposition de l'eau, comme cause de cette oxidation, par la même raison que MM. les ingénieurs de Grenoble, mais présume que le galvanisme, fruit du contact des viroles de plomb avec le fer de fonte, peut être la cause de cette oxidation. Mais puisque (comme il a été cité plus haut)

l'analyse de l'eau de Grenoble, à sa sortie de la conduite, n'y a découvert aucune trace de gaz hydrogène, cette opinion ne peut être fondée.

Enfin le même académicien pense que l'oxide contenu dans les tuyaux de Grenoble est en trop petite quantité pour produire la diminution d'écoulement observée, et que cette déperdition d'eau doit être attribuée à une voie secrète dans l'assemblage des tuyaux, causée apparemment par un défaut de solidité des fondements de la conduite. Il avait, par cette raison, réduit par le calcul la masse de l'oxide contenu dans la conduite (estimée à 1452 kilogrammes), à une couche également distribuée sur toute la surface intérieure de la conduite et trouvé que cette couche devrait être au moins 200 fois plus épaisse pour produire la diminution d'écoulement observée. Mais MM. Dulong et Ampère observèrent que cet oxide, disposé en mamelons de 10 à 24 millimètres de saillie, et séparés les uns des autres par des espaces libres, produit un ralentissement d'écoulement bien supérieur à celui que produit une surface unie.

M. Fournet prétendit que ces rugosités d'oxide ne proviennent pas d'une oxidation du fer des tuyaux, mais du fer préexistant dans l'eau avant que celle-ci entre dans la conduite, et allègue en preuve que l'on a vu de l'oxide de fer dans des conduites en bois. M. Becquerel confirma cette opinion par son propre témoignage, alléguant des observations récentes sur la présence d'oxide de fer dans des conduites en bois.

Je ne puis adhérer à cette opinion par les raisons suivantes: d'abord la préexistence du fer dans l'eau de Grenoble n'a pas été annoncée. Elle se serait annoncée d'elle-même aux ingénieurs, déjà sur les bords de la rivière ou du canal qui amène l'eau à la conduite; car l'on sait que toutes les sources ferrugineuses, à leur arrivée à l'air libre, se décomposent et produisent des dépôts d'oxide sur leurs bords. D'un autre côté, nous ne pouvons présumer la présence du fer dans l'eau que comme une solution d'un sel de fer, ou bien sous la forme d'oxide déjà formé et divisé en particules extrêmement déliées.

Dans le premier cas, il faudrait qu'il se fût fait une décomposition du sel dans les conduites de bois, ce qui n'est point admissible, le bois ayant, pour les acides, une affinité bien inférieure à celle du fer, et n'offrant par conséquent aucune cause de décomposition du sel. Donc l'oxide observé par M. Becquerel dans les conduites en bois doit y être arrivé déjà tout formé.

Passons à présent aux conduites de fer. Comme telles, elles ne décomposeront pas un sel de fer; ainsi l'oxide devrait leur être arrivé comme tel, et il se serait déposé mécaniquement, non en mamelons, mais en couches continues et en bien plus grande quantité sur la partie inférieure que sur la partie supérieure des tuyaux. Or, ce dernier caractère de ce dépôt ne peut guère avoir eu lieu aux conduites d'eau de Grenoble, puisque le comité des ingénieurs n'en a pas fait mention.

Enfin, nous prouverons bientôt, d'une manière irréfutable, que le métal des conduites de Grenoble a dû nécessairement s'oxider. Pourquoi donc chercher l'existence de cet oxide dans des causes qui ne sont nullement indiquées par les observations?

A une séance postérieure de l'académie de Paris, la question de l'oxidation des conduites de Grenoble fut rapportée une seconde fois à l'occasion d'un mémoire de M. Payen, sur lequel MM. Becquerel et Dumas firent un rapport. M. Payen paraît s'être attaché particulièrement à expliquer la formation des mamelons d'oxide. Ses expériences lui ont appris que:

a) Un cylindre de fer poli résiste long-tems à l'oxidation dans une eau alkalisée par une portion d'un alkali caustique égale en volume à $\frac{1}{1000}$ de l'eau. Mais cette propriété se perd, lorsque le liquide est en contact avec l'air atmosphérique qui lui abandonne son gaz acide carbonique. (Nous verrons ci-après que c'est l'air atmosphérique absorbé qui oxide, sans l'aide de l'acide carbonique.)

b) Lorsque l'eau contient 2 p. C. de carbonate de potasse, il se forme sur le cylindre de fer des concrétions coniques d'oxide de fer brun-verdâtre à leur base, et jaunes à leur pointe. L'oxidation commence là où des corps étrangers se trou-

vent par hasard, et dont le contact avec le métal peut produire des actions galvaniques. Le reste de la surface conserve son éclat.

c) Une solution saturée de muriate ou de carbonate de soude préserve le fer contre l'oxidation, même lorsqu'elle est en contact avec l'air atmosphérique. Mais cette protection cesse dès que cette solution est délayée avec une portion d'eau. (Cette observation, si elle se confirme, indiquerait qu'une solution saturée de ces sels est imperméable à l'air, ou du moins à l'oxigène de l'atmosphère, découverte qui pourrait devenir importante).

MM. les rapporteurs déclarèrent que cette explication de la formation des tubercules n'était point applicable aux conduites d'eau de Grenoble, l'analyse de cette eau n'ayant indiqué aucune réaction alcaline, et proposèrent un procédé pour empêcher l'oxidation des tuyaux de fer; voici leur idée.

Il existe, à la fabrique de porcelaine de Sèvres, un réservoir d'eau avec une conduite, l'un et l'autre en plomb et sur lesquels il se faisait un dépôt de calcaire carbonaté. M. Dumas appliqua, de distance en distance, des tuyaux latéraux qu'il ferma extérieurement par des bouchons d'un autre métal (le rapport ne nomme pas ce métal) dont le contact avec le plomb établit un procès galvanique. L'acide carbonique se combine avec le métal *le moins oxidable* et dépose à sa surface la chaux carbonatée que l'on enlève de tems en tems. MM. les rapporteurs pensent qu'un moyen analogue résoudrait le problême des conduites de Grenoble.

J'avoue ne pas comprendre ce mode d'action, si l'on n'admet pas un métal plus oxidable que le plomb. Si l'on avait employé à Sèvres le cuivre, par exemple, en guise de bouchon, ce métal, bien moins oxidable que le plomb, ne pourrait pas avoir été attaqué de préférence par l'acide; car nous voyons dans la grande expérience de Davy que c'est le zinc ou le fer (le métal le plus oxidable) qui se combine avec les acides, et le cuivre qui se couvre de couches des bases; ce qui a donné occasion à de petits animaux marins de s'attacher à la surface de tout le cuivre et de ralentir par là la marche du vaisseau *), inconvénient qu'il a éliminé

*) Nous aurons plus tard l'occasion de revenir sur ce sujet.

en suite, en diminuant la surface du métal protecteur jusqu'à $\frac{1}{121}$ du métal à protéger. Le fer a pu faire l'effet désiré, puisqu'il est plus oxidable que le plomb. Peut-être trouvera-t-on la solution de cette contradiction entre les expériences de M. Davy et celles de M. Dumas dans la nature des substances oxidantes.

Après avoir offert tout ce qui a été fait sur l'objet en question, ou du moins ce que j'ai pu en apprendre, je passe à mon propre travail. Peut-être ne me serais-je jamais engagé dans l'examen du problème de Grenoble, si je n'avais eu par devers moi mes anciennes expériences sur l'oxidation des métaux dans l'eau. Je les ai publiées dans le second tome de mon cours allemand de Physique théorique en 1811. Je les avais faites plusieurs années auparavant, en 1802, alors qu'on regardait généralement cette oxidation comme un effet de la décomposition de l'eau, décomposition qui en effet a lieu par quelques métaux sans l'intervention d'acides *). Je les ai répétées souvent depuis dans mes cours. Elles prouvent que plusieurs métaux usuels, et nommément le fer, qui ne décomposent pas l'eau, s'y oxident par l'oxigène de l'air atmosphérique absorbé par l'eau. Voici ces expériences.

J'ai fait bouillir fortement, pendant près d'un quart d'heure, une portion d'eau distillée dont je remplis 5 petites fioles que je plongeai immédiatement dans cette eau, pour l'avoir dans les fioles à la température de l'ébullition. J'avais fait préparer, de chacun des métaux suivants: cuivre, laiton, zinc, plomb, fer forgé, une paire de cylindres chacun d'environ 2 pouces de longueur et $\frac{1}{4}$ pouce de diamètre. Tous étaient également bien polis. Je plaçai un cylindre de chaque paire dans une de ces fioles à la température de 100° C., je fermai ces fioles hermétiquement et les retirai du vase d'eau bouillante.

Au bout de 4 semaines, le cuivre et le laiton n'avaient pas subi la moindre oxidation, et avaient par contre conservé tout leur poli. Le zinc avait conservé

*) Mon collègue, M. le professeur Grindel, ayant été témoin de ces expériences, m'en demanda une copie pour son journal de chimie et de pharmacie de 1808. Ce n'est qu'en 1810 que Guyton-Morveau publia une expérience de ce genre sur le plomb.

son luisant, mais chatoyait en vert de mer et violet sur toute sa surface. Le plomb avait obtenu une très légère teinte grise sans perdre tout son luisant. Le fer avait perdu un peu de son luisant, sans au reste se trouver chargé de la moindre couche d'oxide rouge. Ainsi le zinc, le plomb et le fer avaient subi un commencement d'oxidation. Mais, comme les petits phénomènes qui indiquaient ce commencement d'action chimique parurent tous dans les premières heures de l'expérience, sans s'accroître par la suite, il est très probable que cette oxidation naissante doit être attribuée à la chaleur de l'eau bouillante, capable apparemment d'occasionner un commencement de décomposition de l'eau par le métal, de même à une petite portion d'oxigène atmosphérique adhérente aux surfaces des métaux.

Les cinq autres cylindres furent mis dans des portions de la même eau distillée bouillante, mais dans des vases ouverts. Examinés aux mêmes termes que les précédents, ils fournirent les résultats suivants: le laiton était couvert d'une couche d'oxide brun et corrodé sur plusieurs points. Le cuivre n'avait subi aucune altération. Le zinc était couvert d'oxide gris (et à quelques points d'oxide blanc) en telle quantité, qu'une partie de l'oxide était repoussée dans l'eau autour du cylindre. Le plomb n'était que terni et oxidé fortement à deux points seulement. Le fer était fortement oxidé; l'oxide était rouge, dont une notable portion avait été repoussée dans l'eau.

Je conclus déjà alors de ces expériences, que les métaux en question ne décomposent pas l'eau aux températures moyennes, mais qu'ils décomposent l'air atmosphérique absorbé par l'eau et s'oxident fortement par l'oxigène de cet air.

L'idée me prit de voir si l'air atmosphérique absorbé par un autre liquide ferait le même effet. Je fixai deux cylindres de fer, au moyen d'un peu de cire, chacun dans un verre à part, que je remplis de mercure épuré. Je fermai l'un des deux hermétiquement et laissai l'autre ouvert. Dans le premier, le cylindre de fer ne subit pas la moindre altération. Dans le second il était couvert d'un oxide brun, mélange de deutoxide et de tritoxide de fer. Même un morceau

d'acier, qui à l'air libre ne s'était pas rouillé pendant plusieurs années, se rouilla lorsqu'il fut placé sous du mercure.

En général, le fer se rouille dans l'eau incomparablement plus vîte et plus fortement que dans l'air. Cela vient de ce que l'air atmosphérique absorbé contient plus de gaz oxigène que dans son état libre, et surtout par ce que cet oxigène y est dans un état de condensation énorme, et offre par là au métal une plus grande masse chimique. C'est à une condensation semblable, mais bien plus considérable de l'oxigène, que les acides doivent leur propriété si éminemment oxidante.

Cette grande oxidabilité du fer dans un liquide en contact avec l'air atmosphérique m'engagea à faire les expériences suivantes:

Je plaçai une plaque de tôle bien décapée et polie, de 26 lignes de diamètre sous une petite cloche très plate de verre, surmontée d'un tube de 4 lignes de diamètre intérieur, et fermé à sa partie supérieure. La cloche avec son tube était pleine d'eau distillée et renversée sur une assiette dont l'eau montait à $\frac{1}{4}$ de pouce au-dessus du niveau inférieur de la cloche qui reposait sur trois petits pieds pour ouvrir une communication libre entre l'eau de la cloche et celle de l'assiette, et parconséquent un passage à l'oxigène atmosphérique jusqu'à la plaque de tôle.

Au bout de deux jours la plaque se trouva, à sa partie supérieure, couverte de peroxide, dont une partie était dispersée autour de la plaque. La surface inférieure n'avait qu'une couche extrêmement mince d'oxide noir. La quantité d'oxide rouge se trouva être de 1,7 grain poids médic. de Nüremberg. Si l'on cherche d'abord le poids de l'oxigène qui a dû former cette quantité de tritoxide, puis celui de l'hydrogène qui eut dû se développer si cette oxidation avait été due à une décomposition de l'eau, le volume du gaz hydrogène eut été de 2 pouces cubes. Or l'expérience prouva qu'il ne se forma dans le tube de la cloche pas la plus petite bulle visible de gaz, et ces deux pouces cubes ne peuvent pas s'être combinés avec l'eau du récipient, dont le volume allait à peine à 20 pouces cubes, puisque, d'après les expériences de M. Henry, l'eau ne peut absorber que 0,0153 de son volume de gaz hydrogène.

Je pris un gros tube de verre d'un pouce de diamètre et de 3 pieds de longueur, partagé très exactement en 100 volumes égaux, fermé par un bout, et ayant à l'autre bout une fermeture à vis en fer. Je plaçai dans ce tube ½ once de grosse limaille de fer bien propre et bien mouillée avec de l'eau distillée, et fermai sur le champ la fermeture pour interdire toute communication à l'air extérieur. En suite, je secouai le tube de manière à étendre la limaille sur une partie considérable de la surface intérieure. Au bout de 4 jours j'ouvris le tube dans l'eau et observai, corrections faites pour la température et la hauteur du baromètre, une absorption de l'air enfermé égale à 0,21395 du volume total. Un bâton de phosphore introduit dans le résidu n'offrait aucune lueur dans l'obscurité. Ainsi ce peu de limaille de fer avait suffi pour décomposer l'air complètement, en lui enlevant tout son oxigène.

J'ajoute à ces expériences, qui sont vraisemblablement restées inconnues en France, l'observation du comité des ingénieurs, que la surface extérieure des tuyaux de Grenoble n'était pas sensiblement oxidée; ce qui provient de ce que l'air atmosphérique ne pénètre que très difficilement dans la terre battue jusqu'à 1 mètre de profondeur, et que son oxigène se trouve absorbé en grande partie par le humus de la surface.

L'ensemble de ces expériences doit, je pense, nous convaincre que l'oxidation des tuyaux de fer de Grenoble est due à l'air atmosphérique, dont l'oxigène et la petite quantité de gaz acide carbonique qu'il contient, absorbés par l'eau, se combine avec le fer. La forme de mamelons qu'offre l'oxide dans ces tuyaux n'est qu'un analogue de tant d'autres formations de ce genre, que l'on peut attribuer à l'électricité développée par le procès chimique, et à des circonstances particulières inhérentes à la surface.

On pourrait objecter, à la vérité, que la surface de l'eau dans ces expériences était en contact avec l'air atmosphérique, d'où elle recrutait son oxigène avec facilité, vû la mince épaisseur de la couche d'eau qui couvrait le métal, surtout dans l'expérience où la limaille de fer mouillée formait une substance eudiomé-

trique parfaite, tandis que l'eau, une fois entrée dans la conduite de Grenoble, se trouvait isolée dans les tuyaux.

Mais par contre l'eau qui remplissait la conduite du Rondeau était saturée d'air atmosphérique, et se renouvelait en entier dans 1 heure, 43 min., 33 sec.*) et apportait chaque fois son contingent d'air atmosphérique à 28,7 p. C. d'oxigène.

Il se présente ici un calcul à faire qui, si l'on avait des données sûres relativement aux conduites de Grenoble, nous instruirait à point nommé, si la quantité d'oxide produit répond à la quantité d'oxigène enlevé à l'air atmosphérique absorbé, et prouverait par là définitivement que l'oxidation observée s'opère uniquement par cet oxigène. Mais nous ne possédons pas ces données exactes; car il faudrait avoir déterminé la quantité d'air contenu dans l'eau à son entrée dans la conduite, et puis à sa sortie; puis il faudrait avoir analysé ces deux portions d'air, pour fixer la quantité d'oxigène perdu en route. Il faudrait également savoir au juste la quantité d'oxide formé sur toute la longueur de la conduite; car la quantité indiquée a été calculée sur celle qu'on a trouvée sur un seul tuyau, et nous ne savons pas si c'était le premier ou le dernier de la conduite; car le premier, c'est-à-dire celui d'entrée, doit contenir plus d'oxide que les suivants; car non seulement l'eau retient son oxigène atmosphérique d'autant plus fortement qu'elle en a déjà perdu une partie, mais aussi les couches d'eau les plus proches de la surface de fer fournissent les premiers leur oxigène aux premiers tuyaux, oxigène qui n'est recruté que lentement des couches plus proches du centre pour les tuyaux subséquents; et quoique le mouvement cause quelque mélange en ce que les couches plus proches de l'axe ont un peu plus de vitesse que celles qui sont proches de la circonférence, cependant les tuyaux subséquents doivent se trouver toujours en contact avec des couches moins riches en oxigène que les antécédents. Enfin, les rapports ne disent pas combien d'heures par jour l'écoulement dure.

Cependant, malgré tous ces défauts de données, nous voulons faire le calcul en question, qui à la vérité ne sera qu'une imparfaite approximation, mais nous éclairera cependant jusqu'à un certain point. Nous prenons donc comme données,

d'après ce qui a été dit plus haut, que l'eau de Grenoble en passant par la conduite de 3200 mètres a perdu $4\frac{1}{3}$ p. C. de son oxigène atmosphérique, que l'eau de rivière, et par conséquent aussi celle-là, contient $\frac{1}{36}$ de son volume d'air, que la masse d'oxide, formée dans la conduite entière pendant les $7\frac{1}{2}$ ans, équivaut à 1452 kilogrammes, et que l'écoulement a duré 12 heures par jour. Nous ajoutons qu'au commencement le produit de cette conduite était de $41\frac{3}{4}$ pieds cubes dans une minute, et que la tranche du tuyau avait 9 pouces de diamètre et une surface de 0,4415 pieds carrés; ce qui donne 94,55 pieds de vitesse par minute.

Ainsi, pour ce cas et cette vitesse, la masse d'eau qui a passé par la conduite du Rondeau équivaut à 205.476750 pieds cubes, qui contenaient à leur entrée 5.707690 pieds cubes d'air, dont $4\frac{1}{3}$ p. C. ou 247333 pieds cubes ont disparu. Cette masse d'oxigène a dû peser 2308 ℔ poids de troys, ce qui fait 1131 kilogrammes. Or, il faut 29,7 parties d'oxigène pour produire 100 parties de tritoxide de fer, donc ces 1131 kilogrammes d'oxigène ont dû produire 3809 kilogrammes de tritoxide. Mais au bout des $7\frac{1}{2}$ ans le produit a été diminué de 1431 jusqu'à 680 litres, ce qui donne pour produit moyen $1055\frac{1}{2}$. Ainsi le produit en oxide n'est pas réellement 3809, mais 2809 kilogrammes, ce qui fait presque le double des 1452 kilogrammes que l'on a évalués à Grenoble.

Si donc nos données étaient exactes, il s'en suivrait que non seulement la formation de l'oxide serait pleinement justifiée, mais qu'il se serait formé presque le double de l'oxide que le fer de la conduite a retenu, et que le reste s'en est allé avec l'eau. Nous sommes éloignés d'assurer qu'il en soit ainsi, les données étant trop peu certaines; mais il est au moins sûr que l'oxigène atmosphérique de l'eau est bien suffisant pour expliquer cette incommode oxidation, et qu'il est inutile d'avoir recours à d'autres moyens pour cet effet.

Mais abordons la question principale, la plus importante de toutes celles qui ont été agitées à ce sujet: la physique, la chimie, la mécanique nous offrent-elles un moyen sûr pour empêcher cette oxidation des tuyaux de fer dans les conduites d'eau?

La première idée qui s'offre à l'esprit, serait d'enlever à l'eau son oxigène atmosphérique. La physique nous offre à cet effet la pompe pneumatique, et il pourrait paraître que cet instrument, exécuté en grand et mu par une force proportionnée, remplirait le but. Mais si l'on considère combien il faut de tems et de force pour dilater $\frac{1}{2}$ pied cube d'air sec jusqu'à $\frac{1}{2}$ pouce de mercure, et que, dans ce cas-ci, l'air étant en contact perpétuel avec de l'eau, il se produirait une quantité de vapeur d'eau toujours croissante qu'il faudrait enlever avec l'air, l'on sentira que ce moyen n'est pas pratique, sans compter les frais de l'opération et des réservoirs nécessaires à cet effet.

La chimie semble également offrir un moyen très sûr d'enlever à l'eau son oxigène atmosphérique et le peu d'acide carbonique qui s'y trouve, moyen qui n'est sujet à aucun désavantage. Il consiste à mettre l'eau, avant qu'elle entre dans la conduite, en contact avec une très grande surface de fer, soit de fonte, soit de forge. De la limaille conviendrait mal, parce qu'elle se tasse, et que lorsque sa surface se trouverait oxidée, elle offrirait au passage de l'oxigène dans l'intérieur un obstacle difficile à surmonter. Par contre des copeaux de fer d'une espèce quelconque, un peu concassés, pour les réduire à un volume médiocre, qui offrirait encore d'assez grands interstices à l'eau et aux gaz absorbés pour pénétrer facilement à toutes les surfaces, seraient très propres à cet effet. Il s'agit donc d'appliquer le calcul à cette idée, pour s'assurer si elle est praticable ou non.

Nous avons déjà vu plus haut que l'eau commune contient environ $\frac{1}{36}$ de son volume d'air atmosphérique à 28,7 p. C. de gaz oxigène; ce qui fournit pour un pied cube d'eau 0,00789 pied cube de gaz oxigène, ou que 126 pieds cubes d'eau contiennent 1 pied cube de ce gaz, qui pèse 860 grains poids de Troys.

Le tritoxide de fer est composé de 27 parties d'oxigène et de 73 de fer. Ainsi il faudrait 2325 grains de fer pour saturer les 860 grains d'oxigène qui se trouvent dans l'air absorbé de 126 pieds cubes d'eau, ou 18,45 grains de fer pour purger de gaz oxigène un seul pied cube d'eau.

La conduite du Rondeau fournit 1431 litres d'eau par minute, que l'engorgement des tuyaux a réduits au bout de $7\frac{1}{2}$ ans à 680 litres. Ces 1431 litres font à très peu près $41\frac{3}{4}$ pieds cubes; donc la quantité de fer nécessaire serait de 770,3 grains par minute, ou d'environ 5 livres par heure, ou 60 ℔ par journée de 12 heures, ou de 21900 ℔ par an. Cette quantité de fer en copeaux se trouverait difficilement dans toutes les usines de France où l'on travaille le fer au tour ou au foret. Ajoutez à cette difficulté pour une seule conduite d'eau (le Rondeau de Grenoble) les frais d'achat et de transport, et il sera clair que cette idée, quelque juste qu'elle soit, n'est pas pratique. On pourrait en outre faire un calcul sur le tems pendant lequel ces eaux devraient être exposées aux copeaux de fer jusqu'à la perte totale de leur oxigène atmosphérique, d'où se déduirait la grandeur considérable des deux réservoirs nécessaires à cet effet, dont chacun devrait pouvoir être fermé hermétiquement.

Mais la physique et la chimie réunies, dans la théorie du galvanisme, n'offriraient-elles pas la solution du problème, comme l'ont cru quelques uns des savants qui ont traité ce sujet? Malheureusement cette théorie du galvanisme se trouve encore tiraillée entre deux partis, dont l'un tient aux idées de Volta, à la théorie du contact, et l'autre à mes idées, à la théorie chimique que j'ai publiée il y a 33 ans, et que MM. Nobili, De la Rive et d'autres ont arrachée il y a 5 ans à l'oubli où l'on avait affecté de la jeter, après l'avoir combattue pendant nombre d'années. Pour éviter le reproche d'introduire des subtilités de théorie dans une discussion qui a un but pratique si important, nous voulons nous en tenir uniquement à des expériences directes et décisives quant à ce but, sans au reste nous refuser, après coup, quelques observations théoriques que ces expériences nous fourniront.

Il s'agit de décider si en mettant un métal hétérogène en contact avec les tuyaux de fer d'une conduite d'eau, il est possible d'éliminer efficacement l'oxidation du fer des tuyaux. En partant de l'idée et des expériences de l'illustre H. Davy, il faudrait un métal plus oxidable que le fer, et parmi les métaux usuels

ou techniques, le zinc seul s'offre comme tel. C'est aussi par ce métal que Davy a réussi à empêcher l'oxidation du cuivre dont on double les vaisseaux. Le cuivre est de beaucoup moins oxidable que le zinc, et, d'après mes anciennes expériences, il ne l'est pas sensiblement dans l'eau imprégnée d'air atmosphérique. Le fer par contre n'est que très peu moins oxidable que le zinc dans l'eau. Il s'agit donc de savoir si le zinc, qui n'a qu'un petit excès d'oxidabilité sur le fer, pourra le protéger. Voici les expériences récentes que j'ai faites à cet égard.

J'ai fait faire cinq petits cylindres de fer, de 2 pouces de Paris de longueur et de 3 lignes de diamètre, que je nommerai N° 1, N° 2, N° 3, N° 4, N° 5. Le N° 1 s'étant trouvé d'un diamètre un peu moindre que les autres, je le destinai à opérer sans zinc. Les autres furent joints à des cylindres de zinc de même diamètre mais de diverses longueurs. N° 2 avait un cylindre de zinc d'un quart de sa longueur, N° 3 d'une demi longueur, N° 4 un de trois quarts et N° 5 de toute la longueur du cylindre de fer. Ainsi les surfaces de zinc exposées à l'oxidation, les bases libres y comprises, étaient dans les proportions 5 à 9, à 13, à 17. Les zincs étaient joints aux fers bout à bout, à vis, et avec une telle exactitude que l'eau ne pouvait se loger entre deux, ce dont je m'assurai après les expériences, n'ayant trouvé absolument aucune oxidation aux surfaces de contact. Je me trouvai par là dispensé de souder les deux métaux l'un à l'autre par un troisième métal. Je les fis polir sans employer aucune graisse, et avant de les employer, je les frottai soigneusement avec de la craie extrêmement fine pour enlever les traces du contact des doigts de l'ouvrier, et après cela je ne les touchai moi-même plus qu'avec une pincette pour les mettre en expérience, voulant éliminer toute cause accidentelle de résultats anomaux.

Je plaçai chacun dans un petit vase de verre horizontalement sur deux fils de lin fixés par chaque bout aux bords du vase, de sorte que les cylindres ne touchaient pas le fond. Puis je versai dans chaque vase de l'eau distillée non purgée d'air, et de la pureté de laquelle je m'assurai préalablement, jusqu'à ce qu'elle couvrît de 3 lignes le bord supérieur des cylindres. Pour arrêter la pous-

sière sans empêcher le contact de l'air atmosphérique, je couvris légèrement les vases d'une feuille de papier. Enfin, pour éloigner le soupçon (du reste nullement fondé) que le magnétisme des rayons solaires aurait quelque effet sur les oxidations qui auraient lieu, j'obscurcis la chambre, rendant par là l'expérience analogue au procès qui a lieu dans les tuyaux également soustraits à l'influence de la lumière. Toutes ces précautions étant prises, je pus conclure que les oxidations qui auraient lieu seraient dues uniquement à l'air atmosphérique aspiré par l'eau. Les observations se firent de 24 en 24 heures, et chaque fois je remboursais l'eau évaporée.

1er JOUR. Tous les cylindres de zinc étaient couverts sur toute leur surface d'oxide blanchâtre, mais à épaisseurs un peu inégales, en sorte qu'elles offraient comme des ondulations perpendiculaires à l'axe. Les surfaces de fer étaient aussi oxidées dans l'ordre suivant:

N° 1 était couvert, sur presque toute sa surface, d'une couche d'oxide rouge parsemée d'inégalités. Quelques taches irrégulières étaient exemptes d'oxide. Une très légère teinte d'oxide teignait déjà l'eau.

N° 2 avait une couche d'oxide rouge qui embrassait presque la moitié de son contour sur une longueur de 1″, 6‴. Elle commençait au bout du cylindre de fer, et laissait entr'elle et le bord du cylindre de zinc un espace vide de 6‴. Sa largeur était inégale, moindre du côté du zinc qu'au bout opposé. Le reste de la surface n'avait rien perdu de son luisant.

N° 3 avait une moindre couche d'oxide, qui était composée de deux lames contigues à la base opposée au zinc, et longues de 1″5″. Leur largeur moyenne était de 2‴, plus petite au bout qui vise au zinc.

N° 4 avait une lame d'oxide de 4‴ de largeur moyenne, et de 1″ ½‴ de longueur. Elle était plus large au bout opposé au zinc, comme les autres.

N° 5 avait deux lames d'oxide très étroites, l'une au côté supérieur, l'autre au côté inférieur du cylindre. La largeur moyenne de la supérieure était de 1‴ et la longueur de 8, 9‴. Les dimensions de l'inférieure

étaient 2‴ et 1″, 5‴. Elles se réunissaient à la base, où elles avaient le plus de largeur.

Partout où les fils de support touchaient le fer, il s'était formé de très fines houppes d'oxide rouge pendantes vers le bas. Cela n'avait pas lieu au zinc.

Les bases des cylindres étaient plus ou moins oxidées. Dans tous les vases on s'apercevait d'une très légère teinte orange provenante de l'oxide de fer.

2^d^ JOUR. L'oxide de zinc avait augmenté et formait une espèce de broderie qui n'avait plus la régularité de la veille; au contact des deux métaux il formait un ourlet. L'oxide de fer s'était également accru sur les cinq numéros et formait aussi une espèce de broderie de figures irrégulières. Sur les numéros 2, 3, 4, 5 il avait gagné un peu en largeur et très peu en longueur. Cet accroissement était bien moindre que la masse produite le jour précédent, apparemment parce que l'oxigène atmosphérique contenu le premier jour dans l'eau était épuisé, et que l'oxidation ne s'opérait plus que par le recrutement successif. La couleur orange de l'eau avait augmenté. La figure des surfaces couvertes d'oxide de fer était très irrégulière, comme le premier jour, et continua les jours suivants.

3me JOUR. L'oxide de zinc avait augmenté en épaisseur, et il me parut s'étendre sur les surfaces du fer non oxidé. L'oxide de fer avait augmenté sur tous les cylindres en étendue sur la longueur et la largeur.

4me JOUR. Je mesurai de nouveau les longueurs des surfaces de fer oxidées et trouvai sur N° 2, N° 3, N° 4, N° 5
1″, $6\frac{2}{3}$‴, 1″, 7‴, 1″, 4‴, 1″, $6\frac{1}{2}$‴.

Les largeurs avaient de même sensiblement augmenté. Sur le N° 2 elle s'étend sur la moitié du pourtour du côté du zinc, et l'enveloppe entièrement du côté opposé sur une longueur de 4‴. Sur le N° 3, elle couvre la moitié du contour sur plus de la moitié de la longueur du cylindre et à quelques points sur tout le contour. Sur le N° 4, elle s'étend un peu plus qu'à la moitié du contour, assez regulièrement. Sur le N° 5, les deux lames d'oxide s'étaient jointes, et enveloppaient, au bout opposé au zinc, la moitié du contour du cylindre. En

outre il s'était formé, du coté du zinc, une petite tache d'oxide isolée à $1\frac{1}{2}$ ligne de la pointe du reste de l'oxide. Cette tache avait $2'''$ de longueur et $3\frac{1}{2}'''$ de largeur.

L'oxidation du N° 1 avait augmenté comme tous les jours précédents, et il s'était précipité beaucoup d'oxide au fond du vase. Dans les autres Nos. de même.

L'oxidation du zinc avait également augmenté, et l'on s'apercevait facilement qu'il s'en était précipité au fond des vases. Aujourd'hui l'extension de l'oxide de zinc, sa progression sur la partie nue du fer, était très sensible. Sur le N° 5 elle couvrait toute cette partie complètement; même proche du bout opposé au cylindre de zinc, il s'était formé une petite concrétion circulaire aux dépens d'une petite surface ronde qui avait moins de cet oxide que le reste de la surface, et qui était bien terminée par la couche plus épaisse qui couvrait le reste. Ces couches d'oxide de zinc étaient sur tous les cylindres plus intenses près du zinc que plus loin de lui.

5me JOUR. Je mesurai de nouveau les longueurs des surfaces d'oxide rouge.
Sur N° 2, N° 3, N° 4, N° 5
$1'', 7\frac{1}{2}'''$, $1'', 8'''$, $1'', 4\frac{9}{10}'''$, $1'', 6\frac{8}{10}'''$.

Les largeurs avaient augmenté de nouveau. L'expansion de l'oxide de zinc sur le fer non oxidé de même, surtout au N° 5. L'oxidation du zinc avait également augmenté. Il s'en était précipité, vers le fond, dans tous les verres qui contenaient du zinc.

6me JOUR. Je mesurai de nouveau les longueurs des surfaces couvertes d'oxide de fer, et j'observai.
Sur N° 2, N° 3, N° 4, N° 5
$1'', 8\frac{1}{4}'''$, $1'', 8\frac{1}{2}$ $1''. 5\frac{1}{10}'''$, $1'', 7\frac{1}{10}'''$.

Les largeurs avaient aussi reçu un petit accroissement. L'oxide de zinc couvrait toutes les parties non oxidées du fer, et ces enveloppes étaient devenues plus épaisses. Partout la précipitation des deux oxides, au fond du vase, avait augmenté.

J'essayai ce jour là de taxer approximativement les proportions des surfaces couvertes d'oxide de fer, et trouvai que sur le N° 2 cette surface faisait environ $\frac{2}{3}$ de la surface totale du fer, et sur les autres Nos. toujours moins à peu près en proportion inverse des longueurs des cylindres de zinc.

7me et 8me JOUR. Point d'observations.

9me JOUR. Je mesurai de nouveau les longueurs des surfaces d'oxide de fer.

Sur N° 2,	N° 3,	N° 4,	N° 5
1″, 10¼‴,	1″, 9 9/10,	1″, 7 6/10‴,	1″, 8‴.

10me, 11me, 12me JOUR. Point d'observations.

13me JOUR. L'oxide de fer avait atteint sur N° 2 le bord du cylindre de zinc; ce qui m'engagea à mesurer les distances de l'extrémité de l'oxide de fer au bord du zink, et je trouvai:

Sur N° 2,	N° 3,	N° 4,	N° 5
0, 0‴,	0, 5‴,	4, 2‴,	3, 25‴.

Les dépôts d'oxide au fond des vases avaient considérablement augmenté, celui de N° 2 ressemblait à une masse muqueuse, rougeâtre, demi transparente qui se laissait manier dans l'eau sans s'y mêler ou se déchirer. Les largeurs des surfaces d'oxide de fer avaient si fort augmenté, que sur les N° 2 et 3 il n'y avait presque plus de surface nue et sur N° 4 peu, sur N° 5 la surface nue faisait encore environ $\frac{2}{3}$ de toute la surface du fer.

Pour se faire une idée juste des allongements progressifs de l'oxide de fer sur son métal, nous mettons ici les distances de la pointe de cet oxide au point de contact du zinc et du fer.

	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5
1er jour . . .	0″ 6, 0‴	0″ 7,0‴	0″ 11,5	1″ 3, 1
4me – . . .	0 5,3	0 5,0	0 8,0	0 5, 5.
5me – . . .	0 4,7	0 4,0	0 7,1	0 5, 2
6me – . . .	0 3,7	0 3,5	0 6,9	0 4, 9
9me – . . .	0 1,8	0 2,1	0 4,4	0 4, 0
13me – . . .	0 0,0	0 5,0	0 4,2	0 3,25.

Au 7me jour, je retirai le cylindre de fer N° 1 hors de son vase. Je le lavai dans son eau avec beaucoup de soin au moyen d'un pinceau pour obtenir tout l'oxide qui s'était formé, dans l'intention de le peser. La plus grande partie n'adhérait que faiblement, les premiers dépôts plus fortement. Ce cylindre de fer, ainsi lavé et essuyé offrait une surface matte (à l'exception de quelques petites taches qui étaient restées luisantes) sur laquelle étaient peintes diverses figures d'une couleur noir brun (vraisemblablement du deutoxide avec un peu de tritoxide fortement adhérents au fer) dont quelques unes chatoient en orange et bleu à peu-près comme les cercles colorés, mais sans transparence.

L'oxide produit par ce cylindre, y compris celui qui s'était détaché et précipité dans l'eau (pesé à une balance de la plus grande exactitude) pesait 22,5 milligrammes. Le cylindre pesait alors 1,822 grammes. Sa longueur était de 1 pouce 11,8 lignes, son diamètre de 2,8 lignes.

Le but de ces expériences étant de savoir si, au moyen d'un procès galvanique produit par l'addition d'un métal hétérogène (par ex. le zinc) on peut empêcher l'oxidation du fer par l'oxigène atmosphérique contenu dans l'eau, nous tirons de ces expériences les conclusions suivantes:

L'oxidation du zinc avec le fer ralentit l'oxidation du fer par l'oxigène atmosphérique.

Il la ralentit d'autant plus que le cylindre de zinc est plus long.

Lorsque le zinc a la longueur totale du fer, il n'arrête pas totalement l'oxidation du fer, qui se manifeste très visiblement déjà dans le courant de la première journée.

L'oxidation du fer commence aux points les plus éloignés du zinc.

Elle augmente de jour en jour, non seulement en masse, mais aussi en étendue linéaire, de sorte que l'oxide s'approche toujours d'avantage du zinc et tellement qu'au 13me jour l'oxide de fer avait atteint le zinc sur le N° 2, où la longueur du zinc était égale à celle du fer.

Cet accroissement de l'oxide n'est pas régulier, de même que la figure des surfaces oxidées.

Il est donc certain que, même si l'on employait une surface de zinc égale à la surface de fer, l'on ne pourrait que diminuer l'oxidation de celle-ci, mais pas à beaucoup près l'empêcher entièrement, et cela que pour quelques jours. Au bout du 1[er] jour la surface oxidée était de 43 lignes carrées; et comme la surface totale est de 227 lignes carrées, il en résulte qu'alors la surface oxidée peut s'évaluer à 0,19 de la surface totale. Si par contre l'on n'employait une surface de zinc que d'un quart de celle du fer, à la fin du 1[er] jour la surface de fer oxidée serait 0,375, et au bout de 6 jours 0,66 de la surface totale.

A l'aspect de ces conclusions si peu favorables, on doit encore se demander si le métal protecteur doit être placé dans les tuyaux de fer même, ou à leur surface extérieure. Car nommément dans la conduite du Rondeau la surface extérieure du fer ne s'oxide pas sensiblement, parce que l'oxigène atmosphérique ne pénètre qu'avec une très grande difficulté à la profondeur de 3 pieds qui est celle de la conduite au-dessous de la surface du sol.

Mais il s'agit encore de savoir si cette oxidation, observée dans nos expériences, peut expliquer, relativement à la quantité, celle qui a lieu dans les conduites de Grenoble.

Prenons d'abord la quantité d'oxide produite sur le cylindre de fer qui n'était pas affecté de zinc. Nous l'avons trouvée équivalente à 22,5 grammes. La surface sur laquelle cet oxide s'était produit avait $1''11,8'''$ de longueur et $2,8'''$ de diamètre. Donc sa surface, y compris la base nue, était $=$ 221,56 lignes carrées.

La surface intérieure des tuyaux de Grenoble sur une longueur de 12 pouces et un diamètre de 9 pouces est égale à 48900 lignes carrées. Notre expérience ayant duré 5 jours et 14 heures, il eut dû se former dans ce tems, si nous avions employé une aussi grande surface, près de 5 grammes d'oxide, et sur une longueur d'un mètre de la conduite d'eau 15,4 grammes. Ainsi au bout de 7 ans et demi la production d'oxide sur 1 mètre de longueur de la conduite du Ron-

deau eût été de 7176 grammes pour 12 heures par jour. Or les ingénieurs de Grenoble n'ont trouvé que 453,8 grammes; ce qui ne fait pas $\frac{2}{16}$ de ces 3588 grammes.

Cette grande différence entre le calcul d'après notre expérience et les observations faites à la conduite du Rondeau, est probablement dûe à trois causes. La première est que, dans notre expérience, l'oxigène atmosphérique contenu dans l'eau se renouvelle continuellement, mais pas dans l'eau de la conduite aussi longtems qu'elle se trouve dans cette conduite; ce qui faisait moins de 2 heures d'abord après la construction. La seconde est que, vraisemblablement, l'oxidation dans les tuyaux de Grenoble n'est pas précisément proportionnelle au tems et aux longueurs, mais de plus en plus faible; l'oxigène atmosphérique s'épuisant à mesure que l'eau avance dans les tuyaux. Au reste, cet épuisement est lent, puisque l'eau, après avoir traversé la longueur de 3200 m. son oxigène atmosphérique se monte encore à 24 p. C. Le troisième est que peut-être le mouvement de l'eau dans la conduite du Rondeau emporte une grande partie de l'oxide formé. Cette dernière cause pourrait facilement se vérifier sur les lieux.

Pour m'assurer si les conclusions tirées des expériences décrites sont fondées, j'ai répété ces expériences en substituant du cuivre au zinc, de sorte que les longueurs variables du cylindre de cuivre étaient pour N° 1, 0; pour N° 2, $\frac{1}{4}$; pour N° 3, $\frac{1}{2}$; pour N° 4, $\frac{3}{4}$ et pour N° 5, 1 de la longueur du cylindre de fer. Ces expériences ont duré 20 jours et ont fourni les résultats suivants:

L'oxidation s'établit dès le premier jour également sur les numéros 1, 2, 3, 4. Le seul N° 5 offrit une oxidation beaucoup moindre.

Au 9me jour les 4 premiers numéros étaient entièrement couverts d'oxide, le N° 5 seulement le 11me jour.

L'oxidation commença sur les Nos. 2, 3, 4, 5 à la limite (au contact) du fer et du cuivre.

L'oxide rouge de fer forma, à ce point, un bourrelet qui s'appuyait en partie sur le cuivre.

Le cuivre n'a pas offert la moindre trace d'oxidation; il a gardé pendant ces 20 jours tout son luisant, et à l'exception du petit bourrelet au point de contact, il n'était couvert nulle part d'oxide de fer.

Les cylindres de fer ayant été soigneusement lavés, je trouvai à leur partie inférieure du deutoxide de fer, et tous étaient plus fortement rongés que ceux des expériences précédentes.

Il suit de ces observations, que le contact du cuivre n'a pas diminué l'oxidation du fer, tandis que le zinc a causé une dimiuution sensible. Le N° 5 de ces dernières expériences paraît indiquer le contraire; mais il est probable que le fer de ce N° avait été moins soigneusement nettoyé avec de la craie que les autres. Du reste nous voyons ici la marche de l'oxidation suivre une direction et une accumulation contraire à celle des expériences précédentes. Là, l'oxidation commence au bout libre du fer, et l'oxide s'y accumule en plus grande quantité. Ici l'oxidation commence à la limite des deux métaux, et l'oxide s'y accumule en plus grande quantité. Par contre l'oxide de zinc forma un bourrelet au point de contact.

Cette opposition d'effets entre le zinc et le cuivre, relativement à l'oxidation du fer, prouve que ces deux métaux jouent des rôles très différents. Le cuivre n'étant pas susceptible d'oxidation dans ce procès, il ne peut avoir aucune influence sur l'oxidation du fer. Mais le zinc, susceptible d'une oxidation plus vigoureuse que le fer, a de l'influence sur celle du fer; car, dans la théorie chimique de l'électricité, l'oxidation dévéloppant sur chaque métal oxidable $+$ et $-E$, celle-ci sur le métal, celle-là dans le liquide, ces deux E, se trouvant en face l'un de l'autre, se repoussent mutuellement, empêchent réciproquement leur développement, et diminuent l'oxidation de part et d'autre qui ne peut avoir lieu qu'en tant que les deux E peuvent se dégager librement. Ainsi dans l'eau salée, qui agit chimiquement avec une bien plus grande énergie sur le zinc que sur le cuivre, il est possible que l'oxidation d'une petite surface de zinc dégage une telle quantité d'E, que celle d'une très grande surface de cuivre, que l'oxidation de ce métal tend à

dégager, ne puisse se dégager. C'est ainsi que nous voyons l'action chimique de l'acide sur un métal annullée, ou au moins très considérablement affaiblie par une forte pression qui empêche le dégagement des gaz sans lequel l'oxidation ne peut avoir lieu. C'est ainsi qu'une forte compression empêche la congélation de l'eau, parce que la vapeur d'eau qui doit nécessairement se former pour l'acte de la congélation ne se forme pas sous cette pression.

L'oxidation du fer en contact avec du cuivre commence par le bout du fer qui touche le cuivre, parce que celui-ci, n'étant pas sujet à l'oxidation, ne dégage aucune *E*, mais sert à neutraliser le + *E* et le — *E* en les attirant tous deux sur soi. L'oxide s'accumule là, par la raison que l'oxidation a le plus d'énergie à ce point, et parce que l'*E* qui passe dans le cuivre y amène les parcelles d'oxide à mesure qu'elles se forment. Lorsque le fer est en contact avec le zinc, c'est l'oxide de ce métal qui s'accumule autour du contact, par la même raison. La pile de Volta nous offre le même phénomène lorsqu'on mène de ses pôles deux conducteurs métalliques oxidables, tels que des pointes de cuivre ou de laiton.

La pointe + *E* s'oxide dans la décomposition de l'eau par l'oxigène à l'état naissant, tandis que l'autre ne s'oxide pas. Mais le courant de + *E*, se précipitant sur la pointe — *E*, entraîne des particules d'oxide qu'il dépose à cette pointe — *E*.

D'après ces considérations, je crois devoir conclure que le galvanisme ne nous offre pas de moyens d'empêcher l'oxidation des tuyaux de fer. Pourra-t-il empêcher l'oxide de se former en mamelons qui retardent si puissamment l'écoulement de l'eau? La solution de cette question supposerait la connaissance de la manière dont ces mamelons se forment, que j'avoue n'avoir nullement *). Les figures irrégulières qu'affecte l'oxidation sur mes petits cylindres ne me fournissent aucune analogie applicable à ce phénomène. Au reste, la formation des mamelons

*) Depuis que ce mémoire a été écrit, l'on a trouvé que la formation des mamelons dépend de la nature du fer, ayant observé qu'une autre fonte ne les produit pas. Au reste cette découverte, très utile pour la pratique, n'est pas encore la solution du problème.

n'est qu'un question de théorie, qu'il serait intéressant de pouvoir résoudre. Le vrai problème pratique est de préserver les tuyaux de Grenoble, tels qu'ils sont, de toute oxidation et de tout autre sujet au même accident.

L'idée la plus simple, celle qui se présente la première à l'esprit, est celle d'un vernis, dont on couvrirait la surface intérieure des tuyaux de fer. Mais ce vernis ne résisterait, quel qu'il fût, qu'un court espace de tems au frottement de l'eau, du fin sable et autres substances très déliées qui se trouvent toujours dans les eaux de sources et de rivières, surtout dans les tems où l'affluence exaltée de l'eau charie plus de ces substances étrangères. Et si même l'eau ne chariait aucune de ces substances étrangères, le carbonate de chaux pénétrerait le vernis, son acide carbonique oxiderait le métal, et l'oxide chasserait le vernis. C'est ainsi que, dans la formation du moiré métallique, l'acide s'introduit sous la couche d'étain du fer blanc et oxide le fer, et que l'oxide soulève les paillettes pour produire à l'aide du vernis ces reflets variés de lumière que l'on a pris faussement pour l'effet d'une cristallisation (V. mon mémoire sur les végétations métalliques). L'on objectera peut-être que le procès du moiré métallique suppose de petites crevasses causées par un échauffement successif de différents points de la plaque. Mais, ne doit-on pas admettre que les différences de température auxquelles les tuyaux de conduite sont assujettis, et vû la différence de dilatabilité du métal et du vernis, ne causeront pas des milliers de crevasses dans celui-ci?

Ainsi, il faut encore protéger le vernis contre l'action mécanique et chimique de l'eau. Que l'on introduise pour cet effet dans le tuyau vernis une doublure en bois qui la touche partout aussi parfaitement que possible. Ce sera un cylindre d'un diamètre extérieur égal au diamètre intérieur du tuyau de fonte et d'une épaisseur d'un quart de pouce. Si la conduite avait originairement 9″ de diamètre, elle n'aura à la vérité plus que $8\frac{1}{2}$ pouces de diamètre, et son produit aura diminué d'environ $\frac{1}{9}$ de ce qu'il était sans cette doublure. Mais il vaut mieux souffrir une petite perte constante et connue, que de s'exposer à une perte toujours croissante.

L'on construira pour chaque tuyau sa doublure propre en perçant des poutres petit à petit jusqu'au diamètre requis, et en les plaçant sur un moule cylindrique de bois de même diamètre que le trou percé, pour enlever ensuite sur un tour le superflu de l'épaisseur du bois. Le point principal, auquel on doit faire attention, c'est que les premiers forages se fassent bien en ligne droite, afin que la doublure puisse obtenir la même épaisseur. L'appareil à cet effet est trop facile à imaginer pour qu'il soit nécessaire d'en fournir une description.

Ces doublures se gonfleront par l'eau et se presseront par là avec force contre les parois des tuyaux de façon à y trouver une assiette assurée. Elles auront la longueur du tuyau et en sus l'épaisseur des viroles de plomb et de cuirs gras, que l'on comprime entre les joints des deux tuyaux. Avant d'assembler les tuyaux, l'on mettra sur le bord des doublures une mince couche de mortier hydraulique, qui, comprimée entre les deux doublures, fermera parfaitement la jointure et ne laissera à l'eau aucun accès au vernis ni au métal.

Telles sont les propositions que j'ai communiquées à M. le maire de Grenoble pour conserver les tuyaux de la conduite de cette ville.

Mais pourquoi des tuyaux de fer? Par ce que nous vivons dans le siècle de fer, où tout doit être de fer, les chemins et les coeurs des fabricants pour les endurcir à l'aspect de la misère de leurs ouvriers. L'homme n'est-il donc qu'un animal à la mode?

Considérons les avantages des tuyaux en bois comparés à ceux de fonte de fer. Ils ne sont sujets ni à la rouille ni à la pourriture lorsqu'on les place à une certaine profondeur dans un terrain saturé d'eau, comme le prouvent surtout les pilotis qui portent nos maisons, nos ponts, tous nos édifices. Les pilotis du pont de Tajan sur le Danube sont pétrifiés, ceux du dôme de Strasbourg le sont également. Si par contre l'on a des exemples de tuyaux de bois qui ont succombé à la pourriture, c'est qu'ils n'étaient pas dans un terrain saturé d'eau ou trop près de la surface, ce qui permettait à l'air atmosphérique d'y pénétrer.

Le bois ne s'étend par la chaleur que d'une très petite quantité sur sa longueur, et l'on peut admettre que le terrain se dilate en même proportion; et si

même la différence était sensible, la manière si simple, par laquelle on réunit deux tuyaux de bois obvie à cet inconvénient, en ce qu'elle permet aux tuyaux de bois de s'allonger et de se raccourcir sans produire une voie d'eau aux joints. Les tuyaux de fer par contre, qui se dilatent, d'après les moindres données, de 0,0011 de leur longueur par une élévation de température de 80° R., s'allongeront de 5 pouces par 10° R. sur une longueur de 3000 pieds, qui est moindre qu'une verste; ce qui force à employer des moyens toujours gênants et peu sûrs pour éviter les suites de ces dilatations.

La seule objection de quelque valeur que l'on puisse faire contre les tuyaux en bois, est que, pour de très grandes conduites, l'on ne trouverait pas des bois qui pussent fournir des tuyaux de grands diamètres et conserver encore une épaisseur capable de résister à de grandes pressions.

Mais pourquoi ne vouloir que des tuyaux cylindriques d'une seule pièce? Il est facile de les composer de plusieurs douves comme les tonneaux, ainsi que la figure ci-jointe l'indique.

Soit *AB* le diamètre d'un tuyau qui devrait avoir 15 pouces, l'épaisseur *AC* du bois = 2,7 pouces. Si l'on a des poutres de 12″ en carré, chacune pourra fournir deux segments comme *BE*, dont cinq formeront le tuyau entier. Pour les tenir assemblés l'on employera des cercles de fer *DDD* de 2 pouces plus grands que le tuyau, en sorte que, entre le tuyau et le cercle de fer, il reste un espace libre de 1 pouce de largeur. Des coins *ac*, *ac*, *ac* de bois dur, comme de chêne, de frêne ou de bon bouleau, placés comme la figure l'indique, serviront à comprimer les douves l'une contre l'autre de manière à interdire tout passage à l'eau. Les cercles seront enduits sur tous les points de leur surface d'une triple couche d'huile dessicative. *a* et *c* sont deux coins égaux de bois dur qui, pressés comme il a été dit entre les douves et le cercle de fer, compriment les douves l'une contre l'autre. Mais afin que la marche forcée de ces coins n'enlève pas le vernis de l'intérieur des cercles, l'on placera d'abord le coin qui touche le cercle de fer là, où il restera, et fera marcher à coups de marteau l'autre coin qui touche le

bois. Si l'on a employé du bois médiocrement sec, il ne faudra pas enfoncer les coins avec beaucoup de force; mais lorsqu'un tuyau sera terminé, on le jettera à l'eau et le gonflement qui en résultera donnera au tout la tension nécessaire. Pour une pression de 80 à 100 pieds d'eau, pour un diamètre intérieur du tuyau = 15″, les cercles auront plus que la force nécessaire si on leur donne $1\frac{1}{4}$ pouce de largeur et $\frac{3}{4}$ pouce d'épaisseur, dans la supposition que les cercles seront placés à 3′ l'un de l'autre. La seule incertitude qui reste est de savoir si l'épaisseur des tuyaux, que nous avons supposée être de 2,7 pouces sera suffisante pour cette distance de 3 pieds. Des essais avec un ou deux tuyaux décideront la question, comme en général des travaux d'aussi grande importance ne doivent pas se calculer sur des données générales de résistance, mais sur des expériences directes avec les matériaux donnés, les matériaux de même nom étant souvent de nature très différente.

Quant au mode de jonction de deux tuyaux, l'on s'en tiendra au mode ordinaire qui consiste à enfoncer une virole de métal dans les têtes qui doivent se joindre. Seulement on prendra les précautions suivantes: ces viroles seront en cuivre de $1\frac{1}{4}$ ligne d'épaisseur et aiguisées à leurs extrêmités. Elles auront 8″ de longueur et entreront de $3\frac{1}{2}$ pouces dans chaque tuyau. Pour n'être pas obligé de les faire entrer avec trop de force, on leur creusera leur gite circulaire *FFF* avec une scie de même courbure et de quelques pouces de longueur, qui fixée à un levier, tournera autour du centre du tuyau. Cette voie n'aura qu'une ligne de largeur, afin que les viroles n'y entrent pas très facilement. C'est ainsi, que ces viroles pourront céder au besoin aux dilatations et contractions que les tuyaux pourraient subir sur leur longueur par le changement de température.

Pour assurer cet effet l'on soudera au milieu de la longueur de la virole, qui aura une surface libre d'un pouce entre les deux bouts des tuyaux, un bourrelet circulaire de $\frac{1}{2}$ pouce de largeur et $\frac{1}{4}$ pouce d'épaisseur. L'on percera en outre à chaque moitié de la virole trois trous *ii*, *ii*, *ii* de $\frac{3}{4}$ pouce de diamètre et à moitié des $3\frac{1}{2}$ pouces qui entrent dans le bois. Cela étant fait, on assemblera les deux

tuyaux, ayant soin de placer de chaque côté du bourrelet deux demi-cercles de fil de fer de $\frac{1}{4}$ pouce d'épaisseur, afin que la virole entre à une profondeur égale dans chaque tuyau; après quoi l'on retire les demi-cercles de fil de fer.

Cela étant fait, on perce dans l'épaisseur du bois des trous de 3 lignes de diamètre, de sorte que leur profondeur ne s'étende que jusqu'à $\frac{3}{4}$ de pouce de la surface intérieur du tuyau. Ces trous doivent répondre aux centres des trois trous percés dans la virole. Cela étant fait, on enfonce dans ces trous de 3 lignes de petits boulons de cuivre 00, 00, 00.

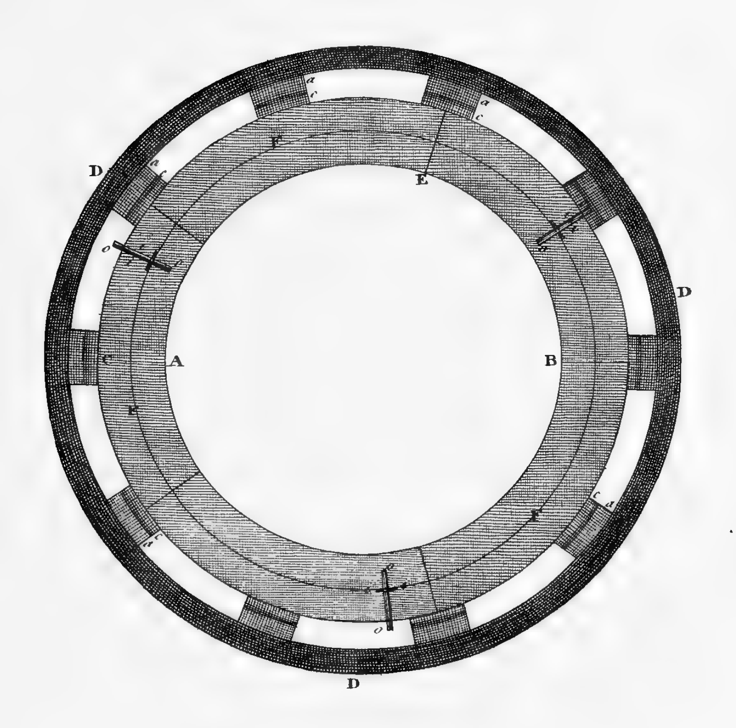
Ainsi, dans la supposition que chaque tuyau ait 21 pieds de longueur, et que sa dilatation ou contraction pour 10° R. de température allât à 0,2 ligne, il est clair que les tuyaux auront tout le jeu nécessaire pour ces dilatations et contractions.

L'on conçoit que l'on pourra construire aussi facilement de plus grands tuyaux en les composant de 6, 7, 8 douves, et de plus petits en les composant de 4 ou 3 douves, jusqu'à ce que l'on arrive à des diamètres qui puissent s'exécuter par le simple forage.

Si quelqu'un doutait qu'il fût possible de rabotter les douves avec l'exactitude nécessaire, j'alléguerais des futs de colonne ioniques, que j'ai vu construire de 10 fuseaux sur un diamètre de 20 pouces, avec une telle exactitude, que, tous les fuseaux étant collés, on trouvait difficilement les lignes des jointures; et ces colonnes n'avaient nullement été comprimées par des cercles de fer.

Si l'on fait un dévis approximatif pour de gros tuyaux, comme de 15″ de diamètre intérieur, l'on trouvera que, quoique les tuyaux en bois comptent plus de main d'oeuvre que les tuyaux en fonte de fer, leur prix sera au moins $\frac{1}{6}$ moindre que celui de ceux de fer. Quant aux tuyaux qui pourront se forer, il est clair que leur prix ne montera pas à la moitié de ceux de fer de même diamètre intérieur.

Ces avantages pécuniaires, joints à ceux que nous avons signalés plus haut, feront, il faut l'espérer, revenir du préjugé que l'on paraît avoir conçu en faveur des tuyaux de fer de fonte.


D
D
D
A
B
C
E
F
F
F
a
c
o


1
2 pieds de Paris

UEBER DIE LEITUNGSFAEHIGKEIT DES GOLDES, BLEI'S, UND ZINNES FUER DIE ELECTRICITAET BEI VERSCHIEDENEN TEMPERATUREN.

ALS ZUSATZ ZU DER IN DIESEN MEMOIREN, SCIENCES MATHEM., PHYS. ET NAT. T. II PAG. 631 ENTHALTENEN ABHANDLUNG UEBER DIE LEITUNGSFAEHIGKEIT 5 ANDERER METALLE.

VON

E. LENZ.

(Gelesen den 8. April 1836.)

Am 7ten Juni 1833 hatte ich die Ehre der Conferenz eine Abhandlung vorzulegen über die Leitungsfähigkeit für Electricität bei verschiedenen Temperaturen, in welcher ich die darauf Bezug habenden Formeln für 5 Metalle, nämlich: Silber, Kupfer, Messing, Eisen und Platin aus Versuchen herleitete; ich erlaube mir heute diesen meinen damaligen Aufsatz zu vervollständigen durch eine ähnliche Bestimmung für 3 andre Metalle, nämlich für Gold, Zinn und Blei.

Das Verfahren bei diesen Versuchen war dem in der früheren Abhandlung näher auseinandergesetzten vollkommen ähnlich bis auf einen Punkt. Damals nämlich richtete ich die 4 Beobachtungen bei jeder Temperatur so ein, dass 2

bei steigender, 2 bei sinkender Temperatur gemacht wurden; ich glaubte auf diese Weise den Fehler möglichst zu beseitigen, der dadurch entstehen muss, dass der Drath und das Thermometer unmöglich ganz zu gleichen Zeiten gleiche Wärmegrade annehmen können und in der That glaube ich, dass durch dieses Verfahren keine bedeutenden Fehler aus dieser Ursache in den von mir erhaltenen Resultaten geblieben sein können; indessen war das zu vorliegenden Versuchen angewandte Verfahren noch mehr geeignet dieselben zu beseitigen. Dieses bestand nämlich darin, dass ich das Oel, in welchem die Dräthe erwärmt wurden, vermittelst einer Berzeliusschen Lampe nahezu auf die beabsichtigte Temperatur brachte, dann aber durch Heben und Senken des Dochtes die Flamme so modificirte, dass sie eben nur im Stande war das Oel bei dieser Temperatur zu erhalten, ohne sie zu erhöhen. Dieses war bei einiger Uebung keineswegs schwer zu erreichen und es gelang mir immer eine Viertelstunde hindurch, während welcher die 4 Ablenkungen der Nadel beobachtet wurden, eine bis auf ein Fünftheil des Grades constante Temperatur zu erhalten.

Indem ich mich nun des besseren Verständnisses wegen auf meine frühere Abhandlung beziehe, entlehne ich aus derselben die Formel

$$\gamma = \frac{\lambda.\,\sin.\,\frac{1}{2}b}{2\,L.\,\cos.\,\frac{1}{4}(a+b).\sin.\,\frac{1}{4}(a-b)} \qquad (1)$$

in welcher γ die Leitungsfähigkeit des untersuchten Draths bedeutet, a den Ablenkungswinkel, wenn der Drath *nicht* zwischen den Multiplicator und die electromotorische Spirale, b aber denselben Winkel wenn der Drath dazwischengebracht war, λ die Länge des Draths bei dem Durchmesser irgend eines als normal angenommenen Draths (bei diesem Versuche war es ein Kupferdrath durch No. 11 gezogen), L die Länge des Multiplicatordraths, der electromotorischen Spirale und sonst nöthiger Hülfsdräthe, alle auf denselben Normaldurchmesser reducirt.

Das Erste war nun, die Grösse L für den Multiplicator und die electromotorische Spirale, die bei allen Versuchen dieselben blieben, zu bestimmen. Dieses geschah durch Bestimmung der Ablenkung der Multiplicatornadel beim Ab-

reissen des Ankers mit der electromotorischen Spirale 1) wenn sie allein den Kreis schloss und 2) wenn eine bestimmte Länge des Normaldraths (bei mir 100 Fuss) dazwischengebracht wurde. — Zwei solche Versuche sind in den folgenden Tabellen enthalten, zu deren besserem Verstehen ich wiederum auf meine frühere Abhandlung verweisen muss:

Versuch 1.

	1	2	3	4	
Ohne den Normaldrath, am Anfang d. Versuchsreihe	63°,5	65°,6	66°,0	68, 1	65°48′
Mit dem Normaldrath von 100 Fuss	10, 1	10, 0	10, 6	10, 7	10 21
Ohne den Normaldrath, am Ende d. Versuchsreihe	63, 5	65, 2	66, 4	67, 9	65 45

folglich im Mittel ohne Normaldrath Ablenkung = 65°46′,5 = *a*

— — — mit demselben — = 10 21,0 = *b*

Versuch 2.

	1	2	3	4	
Ohne den Normaldrath, am Anfang d. Versuchsreihe	62°,5	65°,6	64°,9	67°,9	65°12′
Mit dem Normaldrath von 100 Fuss	10, 0	9, 9	10, 4	10, 7	10 15
Ohne den Normaldrath, am Ende d. Versuchsreihe	61, 9	65, 5	65, 6	67, 7	65 10,5

folglich im Mittel ohne Normaldrath Ablenkung = 65°11′,2 = *a*

— — — mit demselben — = 10°15,0 = *b*

Bedient man sich zur Reducirung auf den Normaldrath der Formel

$$L = \frac{60 \sin. \frac{1}{2} b}{\cos. \frac{1}{2}(a+b) . \sin. \frac{1}{2}(a-b)}$$

*

so ergiebt sich aus der ersten Versuchsreihe $L = 19{,}925$

— — — 2ten — $= 19{,}880$

im Mittel . 19,9025

bei den nachfolgenden Rechnungen wurde die Zahl 19,9 zu Grunde gelegt. Allein gewöhnlich erforderte es der Apparat, dass noch ein Paar Hülfsdräthe von unbedeutender Länge in den Kreis gebracht wurden; ihre Länge ward durch ganz ähnliche Versuche bestimmt und die Grösse zu 19,9 addirt gab das vollständige L in obiger Formel (1).

λ wurde bei dem Zinn- und Bleidrath unmittelbar durch ihre Länge in Fussen gegeben, da diese Dräthe mit dem Normaldrath genau denselben Durchmesser hatten; beim Golddrath ward das Verhältniss des Durchmessers desselben zu dem des Normaldraths dadurch bestimmt, dass gleiche Längen beider abgewogen und deren spez. Gewichte bestimmt wurden, wie solches weiter unten gezeigt werden wird.

Ich bemerke hier noch, dass der Multiplicator- und electromotorische Drath genau dieselben waren, wie bei den Versuchen in der früheren Abhandlung; dass sie eine weit geringere Ablenkung (um circa 10°) geben, rührt daher, dass der Hufeisenmagnet sehr an Kraft abgenommen hatte durch wiederholtes Auseinandernehmen, Reinigen, etc. Ich hätte ihm leicht durch neues Streichen die frühere Kraft wiedergeben können, allein es lag mir weniger daran einen starken, als einen Magneten von constanter Kraft zu haben, welche letztere Eigenschaft meinem Magnet in hohem Grade zukam, indem ein Abreissen von mehreren 100 Malen seine Kraft kaum merklich schwächte. Ich würde des Umstandes gar nicht erwähnt haben, da die Genauigkeit der Versuche ganz und gar nicht davon abhängt, wenn es nicht auffallen möchte, dass die Ablenkung bei den Versuchen mit dem Zinndrathe unter denselben Umständen grösser war als bei den nachfolgenden Versuchen mit dem Blei- und Golddrathe; erstere Versuche waren nämlich noch vor der obenerwähnten Schwächung des Magneten angestellt worden.

Ich gehe jetzt zu den Versuchen selbst über, bei deren Auseinandersetzung ich durchaus dieselbe Ordnung befolgen werde, wie in der früheren Abhandlung; nur die Einheit des Leitungswiderstandes ist hier nicht der Multiplicatordrath nebst der electromotorischen Spirale, sondern 1 englisch. Fuss des obigen Normaldrathes (No. 11) von Kupfer, gegen den jener = 19,9 ist.

Versuche mit dem Zinndrath.

Länge des Draths od. $\lambda = 9', 67$ engl. Länge des Hülfsdraths = 0,8

also $L = 19', 9 + 0', 8 = 20', 7$

Temperatur des electromotorischen, des Multiplicatordraths und des Hülfsdraths = 15° R.

Ohne zwischengebrachten Zinndrath erhielt ich

	Ablenkungen.					
	1	2	3	4	Mittel	
Beim Beginn d. Reihe =	76, 7	75, 3	76, 7	77, 6	76,56	folg. $a = 76°.6',3$
Am Ende der Reihe =	75, 7	74, 5	75, 6	76, 8	75,65	

Therm. Reaum.	Ablenkungen.				
	1	2	3	4	Mittel.
15,90	28,6	28,7	28,8	28,1	28,800
38,35	27,6	26,6	26,6	27,1	26,875
54,25	25,8	25,3	25,4	25,5	25,500
70,15	24,0	24,3	24,6	24,6	24,375
89,47	22,7	22,8	22,9	23,3	22,925
105,35	21,9	21,6	21,8	22,2	21,875
126,40	20,8	20,6	21,0	21,0	20,850
144,70	19,4	19,6	19,7	19,8	19,625

Therm. Reaum.	Ablenkungen.				
	1	2	3	4	Mittel.
162,40	18,7	18,4	18,4	19,3	18,700
162,60	18,6	18,2	18,7	18,8	18,575
145,85	19,4	19,3	19,6	19,7	19,500
125,80	20,8	20,1	20,8	20,6	20,575
109,02	21,8	21,2	21,5	21,0	21,375
90,02	23,2	22,2	23,1	22,9	22,875
70,75	24,4	24,5	24,5	24,5	24,475
50,20	25,5	25,1	25,2	25,6	25,350
33,97	26,6	26,3	26,5	26,9	26,575
20,40	27,3	27,2	28,1	28,2	27,700

Aus den Versuchen ohne Zwischenbringung des Zinndraths sieht man, dass die Kraft des Magneten während dieser Versuchsreihe etwas abgenommen hatte (von 76°, 56 bis 75°, 65). Allein da die Versuche erst bei steigender, dann wieder bei sinkender Temperatur gemacht wurden, so müssen, wenn man die nahezu bei gleicher Temperatur beobachteten Ablenkungen zu einem Mittel vereinigt (wie z. B. die erste und letzte, zweite und vorletzte Beobachtung etc.) und wenn man voraussetzt, dass die Schwächung des Magneten der Zeit proportional geschah, was sehr wahrscheinlich ist, die auf diese Weise erhaltenen Mittel von der Schwächung des Magneten fast ganz unabhängig sein. Deshalb habe ich die Beobachtungen obiger Tabelle auf die eben angegebene Weise zu 2en combinirt und dadurch die nachfolgende Tabelle erhalten, in der γ die nach der Formel (1) berechneten Leitungsfähigkeiten bedeutet.

Therm. Reaum	b	γ	Therm. Reaum.	b	γ
18,2	28° 15′,0	0,30618	107,2	21° 37′,5	0,20437
36,2	26 43,5	0,28420	126,2	20 42,8	0,19235
52,3	25 25,5	0,25937	145,5	19 33,8	0,17776
70,5	24 25,5	0,24407	162,5	18 38,3	0,16645
89,8	22 54,0	0,22192			

Um die Abnahme der Leitungsfähigkeit mit steigender Temperatur durch eine Formel auszudrücken, bediene ich mich wie früher der nachfolgenden:

$$\gamma_n = x + y\,n + z\,n^2 \qquad (2)$$

wo γ_n die Leitungsfähigkeit für die Temperatur n bedeutet; x, y, z sind aus den Versuchen zu bestimmende Coefficienten. Setzen wir statt γ_n, n, n^2 die in der obigen Versuchstabelle enthaltenen Resultate, so erhalten wir 9 Gleichungen und durch Abziehen jeder nächstfolgenden von der vorhergehenden folgende 8 für die Bestimmung von y und z

$$0 = 0{,}02918 + 18{,}0 . y + 979{,}3 . z$$
$$0 = 0{,}02483 + 16{,}1 . y + 1424{,}8 . z$$
$$0 = 0{,}01530 + 18{,}2 . y + 2235{,}0 . z$$
$$0 = 0{,}01215 + 19{,}3 . y + 3093{,}3 . z$$
$$0 = 0{,}01755 + 17{,}4 . y + 3427{,}9 . z$$
$$0 = 0{,}01202 + 19{,}0 . y + 4431{,}5 . z$$
$$0 = 0{,}01459 + 19{,}1 . y + 5189{,}5 . z$$
$$0 = 0{,}01131 + 17{,}2 . y + 5293{,}5 . z$$

Hieraus ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$y = -0{,}00133929 \qquad z = +0{,}00000238896$$

Setze ich diese Werthe in die allgemeine Gleichung

$$\gamma_n = x + y\,n + z\,n^2$$
$$\text{oder } x = \gamma_n - (y\,n + z\,n^2)$$

so erhalte ich 9 Werthe von x, deren Mittel mir giebt

$$x = 0{,}32326$$

folglich wird die Leitungsfähigkeit des Zinns für verschiedne Temperaturen n, bezogen auf die des Kupfers bei der Temperatur $= 15°$, ausgedrückt durch die Formel:

$$\gamma_n = 0{,}32326 - 0{,}00133929\,n + 0{,}00002468896 . n^2$$

Setze ich statt n und n^2 die Temperaturen unserer Versuchstabelle, so erhalte ich folgende berechnete γ_n und folgende Abweichungen von den beobachteten:

γ_n		Differenzen.
Beobachtet.	Berechnet.	
0,30618	0,29970	+ 0,00648
0,28420	0,27809	+ 0,00616
0,25937	0,26002	— 0,00065
0,24407	0,24121	+ 0,00286
0,22192	0,22305	— 0,00113
0,20437	0,20828	— 0,00391
0,19235	0,19386	— 0,00151
0,17776	0,18119	— 0,00343
0,16645	0,17133	— 0,00488

Versuche mit dem Bleidrath.

Länge des Bleidraths $\lambda = 9{,}29$

$$L = 19{,}9 + 1{,}5 = 21{,}4$$

Temperatur der übrigen Dräthe von Kupfer (ausser dem Bleidrath) = 15°,0 R.

Ohne zwischengebrachten Bleidrath

	Ablenkungen.				Mittel.	
	1	2	3	4		
Beim Beginn d. Reihe =	63, 5	65, 4	66, 2	68, 0	65°.46',2	folg. a = 65°.46,2
Am Ende der Reihe =	62, 5	66, 2	65, 7	68, 7	65 .46,2	

Nach Zwischenbringung des Bleidraths erhielt ich folgende Ablenknngen:

Therm. Reaum.	Ablenkungen der Nadel.					γ
	1	2	3	4	Mittel.	
14,8	15,2	15,3	16,0	16,1	15°37′,5	0,14497
39,7	13,8	14,8	14,4	14,5	14 15,0	0,12853
47,2	13,2	13,5	14,2	14,5	13 51,0	0,12392
65,8	13,0	12,8	13,5	13,2	13 7,5	0,11572
80,3	12,2	12,2	12,5	12,8	12 25,5	0,10807
101,0	11,5	11,4	12,2	11,9	11 45,0	0,10085
116,8	10,9	11,0	11,2	11,5	11 9,0	0,09460
154,3	9,8	9,8	10,2	10,3	10 1,5	0,08324
191,2	8,7	8,0	9,4	9,4	9 7,5	0,07450
225,5	8,1	8,15	8,6	8,9	8 21,7	0,06732

Auch hier ist die 2te, 4te, 6te und jede gerade Zahl von Beobachtungen, bei aufsteigender, jede ungerade aber bei absteigender Temperatur angestellt worden, obgleich der Magnet gar keine Schwächung erlitten hatte.

Für die Gleichungen, aus welchen y und z der Formel (2) gefunden werden sollen, erhalten wir folgende 9

$$0 = 0{,}01644 + 24{,}9 \cdot y + 1357{,}1 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00461 + 7{,}5 \cdot y + 651{,}7 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00820 + 18{,}6 \cdot y + 2101{,}9 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00765 + 14{,}5 \cdot y + 2118{,}5 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00722 + 20{,}7 \cdot y + 3752{,}8 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00625 + 15{,}8 \cdot y + 3440{,}7 \cdot z$$
$$0 = 0{,}01136 + 37{,}5 \cdot y + 10167{,}3 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00874 + 36{,}9 \cdot y + 12748{,}9 \cdot z$$
$$0 = 0{,}00718 + 34{,}3 \cdot y + 14293{,}1 \cdot z$$

Hieraus erhalten wir

$$y = -0{,}00063757$$
$$z = +0{,}00000112775$$

und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (2)

$$x = 0{,}15326$$

folglich wird unser Formel für den Bleidrath

$$\gamma_n = 0{,}15326 - 0{,}00063757 . n + 0{,}00000112775 . n^2$$

Sieht man hier statt n und n^2 successiv die Temperaturen, bei welchen beobachtet wurde, so erhalten wir folgende Vergleichung der beobachteten und berechneten Leitungsfähigkeiten

γ_n		Differenzen.
Beobachtet.	Berechnet.	
0,14497	0,14407	+ 0,00090
0,12853	0,12973	— 0,00120
0,12392	0,12668	— 0,00276
0,11572	0,11619	— 0,00047
0,10807	0,10933	— 0,00126
0,10085	0,10037	+ 0,00048
0,09460	0,09418	+ 0,00046
0,08324	0,08173	+ 0,00152
0,07450	0,07258	+ 0,00192
0,06732	0,06683	+ 0,00049

Versuche mit dem Golddrath.

Der Golddrath war bedeutend dünner als die bisher angewandten Dräthe N°. 11 (beiläufig halb so dick); seine Länge musste daher erst auf den Normaldurchmesser reducirt werden, damit sie durch γ dividirt, den Leitungswiderstand ausdrücke. Zu dem Ende wog ich eine bestimmte Länge desselben von 50″, 95 engl. ab und bestimmte zugleich mit Sorgfalt sein spezifisches Gewicht; ich fand sein absolutes Gewicht = 3,8845 Grmmes, sein specifisches = 19,418, welches beweist

dass das Gold ziemlich rein war. In der That hatte ich es als *feines* Gold von dem Goldscheider erhalten; es enthielt aber nach einer qualitativen chemischen Analyse etwas Silber. — Zugleich wog ich von dem Normalkupferdrath ein Stück von 36″ ab und bestimmte sein spezifisches Gewicht; sein absolutes Gewicht war = 4,606 Grmmes, sein spezifisches = 8,8168.

Ist nun die Dicke des Golddraths = $2r'$, die des Kupferdraths = $2r$; die Länge des Golddraths = l', die auf den Durchmesser des Kupferdrath oder $2r$ reducirte Länge des Golddraths, bei der er eben so gut leiten würde = λ, so haben wir nach dem bekannten Satze für die Leitungsfähigkeit der Dräthe, die reducirte Länge des Golddraths

$$\lambda = \frac{r^2}{r'^2}\, l$$

Ist nun l die Länge des gewogenen Kupferdraths, δ sein spezifisches Gewicht, p sein Gewicht in Grammes; q das Gewicht eines Kubikzoll destillirten Wassers beim Maximum das Dichtigkeit in Grammes und bezeichnet man die entsprechende Werthe fürs Gold mit l', δ', p', so hat man

$$r^2 = \frac{p}{l\delta\pi q} \text{ und } r'^2 = \frac{p'^2}{l'\delta'\pi q}$$

$$\text{folg. } \frac{r^2}{r'^2} = \frac{p\,l'\delta'}{p'l\delta} = \frac{\lambda}{l}$$

$$\text{folg. } \lambda = l \cdot \frac{p\,l'\delta'}{p'\,l\,\delta}$$

setzt man in diesen Ausdruck die obigen Werthe vom p, l, δ für Kupfer und Gold, für l aber die Länge des Golddraths, der zu den Versuchen über die Leitungsfähigkeit diente = 51″,65, so ergiebt sich

$$\lambda = 190'',9 = 15',91 \text{ engl.}$$

hier ergab sich $L = 19',9 + 1',58 = 21',48$;

mit diesen Werthen ist γ berechnet worden. Die Temperatur des Kupferdraths des Multiplicators und der electromotorischen Spirale = 15,1.

Die Versuche geben folgende Tabelle der Abweichungen der Multiplicatornadel:

Ohne zwischengebrachten Golddrath

	Abweichungen der Nadel				Mittel.	
	1	2	3	4		
Beim Beginn d. Reihe =	60, 4	57, 2	62, 8	60, 5	60° 15',5	folg. $a = 60° 7',5$
Am Ende der Reihe =	60, 5	57, 1	62, 3	60, 2	60 " 1,5	

Nach Zwischenbringung des Golddraths erhielt ich folgende Ablenkungen:

Therm. Reaum.	Abweichungen der Nadel					γ
	1	2	3	4	Mittel.	
15,6	29°,5	29,4	31,1	30,9	30° 14',2	0,80438
46,1	28,6	28,3	29,9	30,3	29 " 16,5	0,75373
64,5	28,2	28,0	29,5	29,3	28 " 45,0	0,72750
82,1	27,7	27,4	28,8	29,3	28 " 24,0	0,71059
98,6	27,7	27,0	28,9	28,3	27 " 58,5	0,69039
117,8	27,0	26,8	28,1	28,3	27 " 33,0	0,67078
138,2	26,5	26,0	27,7	27,2	26 " 51,0	0,63975
155,7	26,0	25,6	26,7	27,3	26 " 24,0	0,62033
172,1	25,5	25,5	26,9	26,7	26 " 9,0	0,60986
191,4	24,9	24,8	26,3	26,3	25 " 34,5	0,58613
207,9	24,8	24,6	25,5	25,9	25 " 12,0	0,57123
226,5	24,3	24,2	25,6	25,7	24 " 57,7	0,56184

Hieraus ergeben sich für die Bestimmung von y und z folgende 11 Gleichungen:

$$0 = 0,05065 + 30,5 . y + 1781,9 . z$$
$$0 = 0,02623 + 18,4 . y + 2035,1 . z$$
$$0 = 0,01691 + 17,6 . y + 2580,1 . z$$
$$0 = 0,02020 + 16,5 . y + 2981,6 . z$$

$$0 = 0{,}01961 + 19{,}2 . y + 4155{,}0 . z$$
$$0 = 0{,}03103 + 20{,}4 . y + 5222{,}5 . z$$
$$0 = 0{,}01942 + 17{,}5 . y + 5153{,}5 . z$$
$$0 = 0{,}01047 + 16{,}4 . y + 5375{,}0 . z$$
$$0 = 0{,}02373 + 19{,}3 . y + 7015{,}0 . z$$
$$0 = 0{,}01490 + 16{,}5 . y + 6589{,}0 . z$$
$$0 = 0{,}00939 + 18{,}6 . y + 8081{,}0 . z$$

die Behandlung derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate giebt

$$y = -0{,}0017851$$
$$z = +0{,}00000255666$$

woraus folgt

$$x = 0{,}83646$$

wir haben also für die Leitungsfähigkeit des Golddraths die Formel

$$\gamma_n = 0{,}83646 - 0{,}0017851 . n + 0{,}0000025666 . n^2$$

Setzen wir in dieselbe statt n die beobachteten Temperaturen, so erhalten wir die nachfolgende Vergleichstabelle der berechneten und beobachteten Leitungsfähigkeiten:

Berechnetes γ	Beobachtetes γ	Differenz
0,80924	0,80458	— 0,00486
0,75960	0,75373	— 0,00587
0,73195	0,72750	— 0,00445
0,70713	0,71059	+ 0,00346
0,68530	0,69039	+ 0,00509
0.66165	0,67078	+ 0,00913
0,63859	0,63978	+ 0,00116
0,62050	0,62033	— 0,00017
0,60498	0,60986	+ 0,00488
0,58845	0,58613	— 0,00232
0,57584	0,57123	— 0,00461
0,56329	0,56184	— 0,00145

Auf diese Weise hätten wir nun die Formeln für unsere 3 Dräthe entwickelt, allein sie sind so unmittelbar weder unter einander noch auch mit den frühern für die übrigen Metalle erhaltenen Resultaten vergleichbar, da sie sich, streng genommen, nicht auf ein und dieselbe Einheit beziehen, jede nämlich auf die Leitungsfähigkeit des Kupfers bei der Temperatur, die die Kupferdräthe gerade hatten oder die die Luft in dem Zimmer hatte, in welchem beobachtet wurde. Diese Temperatur habe ich im Anfang eines jeden Versuchs angeführt, sie war

bei den Versuchen mit dem Zinndrath = 15,0 R.
— — — — — Bleidrath = 15,0 R.
— — — — — Golddrath = 15,1 R,

Der kleine Unterschied der letzten Temperatur ist wohl zu vernachlässigen und wir können annehmen, dass alle Beobachtungen bei 15° R. angestellt wurden. In meiner frühern Abhandlung hatte ich sämmtliche Leitungsfähigkeiten auf die des Kupfers bei 0° = 100 bezogen. Ich werde mich hier daher desselben Verfahrens bedienen. Das Verhältniss der Leitungsfähigkeit des Kupfers bei 0° zu dem bei 15° ist aber noch der frühern Formel fürs Kupfer = 100: 95,393. Man hat also unsere obigen Formeln nur mit 95,393 zu multipliciren, so hat man die Formel auf diese neue Einheit bezogen. Die nachfolgende Tafel enthält unsere Formel in dieser neuen Gestalt, wobei ich, der leichtern Uebersicht wegen, auch die früheren Formeln hinzugezogen und sämmtliche Metalle nach der Leitungsfähigkeit geordnet habe

für Silber $\gamma_n = 136,250 - 0,49838.n + 0,00080378.n^2$
Logarithm. d. Coefficient 9,69756 6,90514

für Kupfer $\gamma_n = 100,000 - 0,31368.n + 0,00043679.n^2$
Logarithmen 9,49648 6,64027

für Gold $\gamma_n = 79,792 - 0,170284.n + 0,00024389.n^2$
Logarithmen 9,23117 6,38718

für Zinn $\gamma_n = 30,837 - 0,127726.n + 0,00023733\,n^2$
Logarithmen 9,10638 6,37535

für Messing $\gamma_n = 29{,}332 - 0{,}051685.n + 0{,}000061316.n^2$

Logarithmen 8,71336 5,78757

für Eisen $\gamma_n = 17{,}741 - 0{,}083736.n + 0{,}00015020.n^2$

Logarithmen 8,92291 6,17667

für Blei $\gamma_n = 14{,}620 - 0{,}060819.n + 0{,}000107578$

Logarithmen 8,78404 6,03172

für Platin $\gamma_n = 14{,}165 - 0{,}038899.n + 0{,}00006586.n^2$

Logarithmen 8,58994 5,81862

Um die Schwächung der Leitungsfähigkeit durch die Wärme bei den verschiedenen Metallen noch besser übersehen zu können, werde ich hier die Leitungsfähigkeit derselben bei 0°, bei 100° und 200°, aus den Formeln berechnet, zusammenstellen.

	Leitungsfähigkeit für Electricität bei:		
	0°	100°	200°
Silber . . .	136,25	94,45	68,72
Kupfer. . .	100,00	73,00	54,82
Gold . . .	79,79	65,20	54,49
Zinn . . .	30,84	20,44	14,78
Messing . .	29,33	24,78	21,45
Eisen . . .	17,74	10,87	7,00
Blei	14,62	9,61	6,76
Platin . . .	14,16	10,93	9,02

Aus vorstehender Tabelle ersieht man nun recht augenscheinlich, wie stark der Einfluss der Wärme auf die Fähigkeit der Metalle ist, die Electricität zu leiten, und 2tens wie ungleich dieser Einfluss bei den verschiedenen Metallen ist. So haben zum Beispiel bei 100° die letzten 5 Metalle ihre gegenseitige Stelle in der Ordnung der Leitungsfähigkeiten schon ganz geändert; das Blei ist das am schlechtesten leitende Metall geworden, das Platin ist sogar über das Eisen hinaufgerückt; das Messing leitet besser wie Zinn, welches bei 0° in dieser Hinsicht

über ihm steht. Bei 200 Grad ist die Reihenfolge zwar dieselbe geblieben als bei 100°, indessen sind sich hier Kupfer und Gold fast ganz gleich geworden, so dass bei noch höherer Temperatur das Gold das besser leitende Metall werden muss.

Bei diesem bedeutenden Einfluss der Temperatur auf die Leitungsfähigkeit der Metalldräthe und bei dem nicht weniger bedeutendem Einwirken jeder, wenn auch unbeträchtlichen, Legirung mit anderen Metallen, das durch Versuche anderer Physiker nachgewiesen worden ist, kann es denn auch ganz und gar nicht wundern, wenn die Angaben der Leitungsfähigkeit der Metalle bei verschiedenen Physikern von einander abweichen. Besonders wird dieses nothwendig der Fall sein zwischen Versuchen wie die meinigen und denen, die durch Glühen verschiedener Metalldräthe durch ein und dieselbe Säule vorgenommen wurden; man erhält hier eigentlich nur die Leitungsfähigkeit der Metalle bei der Glühhitze, die von der bei minderen Temperaturen sehr verschieden ist, wie wir so eben uns überzeugten.

In meiner früheren Abhandlung habe ich mir erlaubt die erhaltenen Formeln über die Grenzen der Beobachtungen auszudehnen, wo sich denn ergab, dass sämmtliche Metalle ein Minimum der Leitungsfähigkeit bei einer hohen Temperatur haben, über welches hinaus dieselbe wieder wächst, in der dort mitgetheilten Tabelle dieser Minima haben sich aber Druckfehler eingeschlichen, daher ich sie hier in corrigirter Gestalt wiederhole und auch die 3 zuletzt in dieser Hinsicht bestimmten Metalle beifüge.

Silber	Minim.	=	59,00	bei	310,05	Reaum.
Kupfer	—	=	43,70	—	359,00	—
Gold	—	=	50,06	—	349,10	—
Zinn	—	=	13,64	—	269, 2	—
Messing	—	=	18,46	—	421,50	—
Eisen	—	=	6,01	—	278,80	—
Blei	—	=	6,02	—	282, 6	—
Platin	—	=	8,41	—	295, 3	—

Das Dasein eines Minimum der Leitungsfähigkeit, das für das Platin schon bei circa 300° eintreten müsste, also auf jeden Fall vor der Rothglühhitze, widerspricht der Erfahrung Davy's, nach welcher ein durch den galvanischen Strom ins Rothglühen versetzter Platindrath durch anderweitiges Erhitzen einer Stelle desselben bis zum Weissglühen an seinen übrigen Theilen weniger glüht als früher. Hiernach scheint im Gegensatz zu der Folgerung aus meinen Formeln der Schluss sich zu ergeben, dass die weissglühende Drathstelle den Strom schlechter leite als früher und dieser daher so geschwächt würde, das er nicht mehr im Stande sei das frühere Glühen zu unterhalten. Da eine empyrische Formel nicht über die Grenzen der Werthe, für welche sie bestimmt wurde, ausgedehnt werden darf, so denke ich keinesweges die Erfahrung eines Davy durch Obiges zu widerlegen, ich glaubte jedoch diese Folgerungen meiner Formeln hervorheben zu müssen; vielleicht gelingt es einem späteren Beobachter diesen Punkt vollständig aufzuklären. Ich habe zwar einen Versuch dazu gemacht (vergl. Poggendorfs Annal. d. Phys. Bd. 34 pag. 436), der in der That für meine Folgerung zu sprechen schien, allein die Unfähigkeit höhere Temperaturen mit Genauigkeit zu bestimmen, sind hier ein schwer zu beseitigendes Hinderniss, so dass ich den fraglichen Punkt als für noch nicht entschieden ansehen muss.

О
ПРИЛОЖЕНІИ АНАЛИЗА ВѢРОЯТНОСТЕЙ
КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЮ ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Разсужденіе I[е].

(съ чертежами.)

В. БУНЯКОВСКАГО.

(Читано 9 Декабря 1836 г.)

Для опредѣленія посредствомъ Анализа Вѣроятностей величины трансцендентнаго числа, стараются выразить вѣроятность появленія какого либо событія, зависящаго отъ безчисленнаго множества случаевъ чрезъ то̀ трансцендентное число, которое имѣютъ въ виду. Потомъ производятъ значительное число испытаній, выбирая наудачу случаи, отъ которыхъ событіе зависитъ, и замѣчаютъ какъ число появленій событія, такъ и число всѣхъ испытаній. Отношеніе перваго къ послѣднему изобразитъ, по извѣстной теоремѣ *Якова Бернулли*, приближенную величину вѣроятности сказаннаго событія. Уравнивъ сіе отношеніе найденному *a priori* выраженію вѣроятности, получится

*

уравненіе, изъ котораго легко будетъ опредѣлить искомое трансцендентное число.

Задача, которой предложимъ здѣсь рѣшеніе, состоитъ въ опредѣленіи отношенія окружности къ діаметру; хотя въ этомъ родѣ вопросъ нашъ и есть одинъ изъ простѣйшихъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ онъ сложнѣе всѣхъ тѣхъ, которые были рѣшены доселѣ. Вотъ въ чемъ онъ состоитъ:

Положимъ, что дана опредѣленной или неопредѣленной величины плоскость, покрытая системою соприкосновенныхъ между собою равносторонних треугольниковъ; на эту плоскость бросаютъ, на удачу, весьма тонкій цилиндръ извѣстной длины. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что цилиндръ упадетъ по крайней мѣрѣ на одну изъ сторонъ, начерченныхъ на плоскости треугольниковъ?

Замѣтимъ, что искомая вѣроятность, для цѣлой системы треугольниковъ, будетъ одинакова съ вѣроятностію, относящеюся къ одному изъ составныхъ треугольниковъ; по этому достаточно опредѣлить послѣднюю, и слѣдовательно принять въ соображеніе одинъ изъ треугольниковъ плоскости. Для опредѣленія вѣроятности, что цилиндръ, падая центромъ своимъ внутри разсматриваемаго треугольника, пересѣчетъ одну или двѣ изъ его сторонъ, надлежитъ поступать слѣдующимъ образомъ: изъ каждой внутренней точки треугольника, принимаемой за центръ цилиндра, радіусомъ равнымъ полу-длинѣ цилиндра, описываемъ цѣлую окружность; опредѣляемъ потомъ, какъ великъ уголъ, при которомъ цилиндръ будетъ пересѣкать стороны треугольника. Отношеніе найденнаго такимъ образомъ угла къ 360°, очевидно равно отношенію числа случаевъ встрѣчи, къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ, и слѣдовательно изображаетъ вѣроятность встрѣчи, когда центръ цилиндра будетъ падать въ разсматри-

ваемую точку внутри треугольника. Пусть будетъ $\frac{\varphi}{2\pi}$ эта вѣроятность. Обозначимъ характеристикою S сумму, относящуюся ко всѣмъ точкамъ треугольника. Очевидно, что $\frac{\varphi}{S2\pi}$ изобразитъ вѣроятность, что центръ цилиндра упадетъ въ назначенную напередъ точку, и что самый цилиндръ встрѣтитъ по крайней мѣрѣ одну изъ сторонъ треугольника, а выраженіе $\frac{S\varphi}{S2\pi}$ изобразитъ искомую вѣроятность. Умноживъ какъ числителя такъ и знаменателя послѣдней дроби на элементъ площади $dxdy$, и замѣнивъ суммовой знакъ S двойнымъ интеграломъ, получимъ

$$\frac{\iint\varphi\,dx\,dy}{\iint 2\pi\,dx\,dy} = \frac{\iint\varphi\,dx\,dy}{2\pi\iint dx\,dy}.$$

Если, для краткости, означимъ чрезъ A^2 площадь треугольника, то найдемъ слѣдующее выраженіе для вѣроятности встрѣчи цилиндра съ дѣленіями:

$$(1) \qquad \frac{\iint\varphi dxdy}{2\pi A^2}$$

И такъ, для рѣшенія нашего вопроса, надлежитъ опредѣлить числитель предыдущей дроби. По причинѣ разнообразія обстоятельствъ, представляющихся въ различныхъ частяхъ треугольника, мы должны разложить его на нѣсколько частныхъ фигуръ. Пусть будетъ ABC (черт. 1) треугольникъ о которомъ идетъ рѣчь, L каждая изъ его сторонъ, а $2r$ длина даннаго цилиндра. На перпендикулярномъ разстояніи, равномъ r, отъ каждой стороны треугольника, и внутри его, проводимъ три параллельныя линіи; такимъ образомъ составятся: 1°. Равносторонній треугольникъ abc, котораго площадь назовемъ Ω. 2°. Три трапеціи $abKK''$, $acKM''$, $bcMM'$; пусть будетъ ϖ площадь каждой изъ нихъ. 3°. Три ромба $AaKK'$, $BbMK''$, $CcMM''$, и площадь каждаго изъ нихъ ω. Слѣдовательно, площадь треугольника ABC, равная $\frac{\sqrt{(3)}}{4}L^2$, будетъ также $= \Omega + 3\,\varpi + 3\,\omega$.

Замѣтимъ, что такое разложеніе треугольника справедливо только въ томъ случаѣ, когда r менѣе радіуса круга, вписаннаго въ треугольникѣ ABC. Слѣдовательно, мы предполагаемъ $r < \frac{L}{2\sqrt{3}}$. Впрочемъ, можно не исключать случай $r = \frac{L}{2\sqrt{3}}$; тогда надобно только принять $\Omega = 0$.

Прежде нежели займемся рѣшеніемъ вопроса, выпишемъ для удобности нѣкоторыя величины, въ которыхъ будемъ имѣть надобность. Вотъ онѣ (по чертежу 1му):

$$\overline{AB} = L,\ \overline{ab} = L - 2\sqrt{(3)}.\, r,\ \overline{bH} = r$$

$$\overline{bM} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = l,\ \overline{MH} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2} l,\ \textit{уголъ}(ABC) = 60°,$$

$$Sin.\, 30° = Cos.\, 60° = \tfrac{1}{2},\ Sin.\, 60° = Cos.\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть будетъ P числитель дроби (1); отношеніе $\frac{P}{2\pi.\frac{\sqrt{3}}{4}L^2} = \frac{2P}{\sqrt{3}.\pi L^2}$ изобразитъ вѣроятность встрѣчи цилиндра по крайней мѣрѣ съ одною изъ сторонъ треугольника.

Приступимъ теперь къ опредѣленію величины P, и замѣтимъ сперва, что пока центръ цилиндра находится внутри треугольника Ω, то самый цилиндръ не можетъ падать ни на одну изъ сторонъ AB, BC, CA. Слѣдовательно, для площади Ω не будетъ случаевъ встрѣчи. Изобразимъ чрезъ m число случаевъ, въ которыхъ цилиндръ, падая центромъ своимъ внутри площади ϖ, пересѣчетъ которую нибудь изъ сторонъ AB, BC, CA, а чрезъ n то же самое въ разсужденіи каждой изъ площадей ω. Получимъ $P = 3m + 3n$, и слѣдовательно, искомая вѣроятность, которую изобразимъ чрезъ z, опредѣлится формулою

$$z = \frac{2\sqrt{(3)}(m+n)}{\pi L^2}. \qquad (2)$$

Вопросъ состоитъ теперь въ опредѣленіи величинъ m и n. Займемся сначала первою изъ нихъ. Пусть будетъ $ECDF$ (черт. 2) трапеція ϖ; разложимъ ее на прямоугольникъ $ABCD$ и два прямоугольные треугольника ACE и BDF. Пусть будетъ μ число случаевъ встрѣчи, когда центръ цилиндра находится внутри прямоугольника, а λ то же самое въ отношенія къ каждому изъ двухъ треугольниковъ. Слѣдовательно

$$(3) \qquad m = \mu + 2\lambda.$$

Чтобы найти μ, возьмемъ внутри прямоугольника $ABCD$ какую ни есть точку M, и изобразимъ ея прямоугольныя координаты AP и PM чрезъ x и y. Положимъ, что центръ цилиндра $2r$ падаетъ въ эту точку, и что цилиндръ обращаясь около нея, описываетъ концами своими цѣлую окружность; пусть будетъ φ уголъ, составляемый осью цилиндра съ перпендикуляромъ MP въ то мгновеніе, когда цилиндръ коснется однимъ концомъ линіи AB въ точкѣ k. Уголъ 2φ изобразитъ часть окружности, описываемую каждымъ концомъ цилиндра, при которой сей послѣдній будетъ падать на сторону AB. И такъ, 4φ есть величина угла, при которомъ произойдетъ встрѣча цилиндра съ стороною AB, предполагая центръ его въ точкѣ M, а двойной интегралъ $4\int\int\varphi\,dx\,dy$, взятый между надлежащими предѣлами, выражаетъ величину, которую мы изобразили выше чрезъ μ.

Для опредѣленія этого интеграла, замѣтимъ что $y = r\,Cos.\,\varphi$, и слѣдовательно $dy = -r\,Sin\varphi.\,d\varphi$; предѣлы относительно φ очевидно будутъ $\frac{\pi}{2}$ и о, а въ разсужденіи x, о и $AB = L - 2\sqrt{(3)}.r$. И такъ, получимъ

$$(4) \qquad \mu = 4r\int_0^{L-2\sqrt{3}.r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\,Sin\varphi.dx\,d\varphi = 4r\,(L - 2\sqrt{3}.r).$$

Величина λ опредѣляется подобнымъ образомъ: только верхній предѣлъ относительно y будетъ перемѣнный. Означимъ чрезъ $x =$

EP, $y = PM$ (черт. 3) координаты точки M, въ которой предполагаемъ центръ цилиндра, и изобразимъ чрезъ 2φ уголъ, составляемый крайними положеніями цилиндра, такъ что $\overline{Mk} = \overline{Ml} = r$. Очевидно, что величина λ выразится двойнымъ интеграломъ $4\int\int\varphi\, dx\, dy$, взятымъ между предѣлами, которые объемлютъ весь треугольникъ ACE; слѣдовательно, предѣлы въ разсужденіи перемѣнной y будутъ o и $\sqrt{3}.x$, ибо уравненіе прямой EC, по причинѣ угла CEA равнаго 60°, есть $y = \sqrt{(3)}.x$; относительно же абсциссы x, интрегралъ долженъ быть взятъ отъ $x = o$, до $x = EA = \frac{r}{\sqrt{3}}$; и такъ

$$\lambda = 4\int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}}\int_0^{\sqrt{3}.x}\varphi\, dx\, dy.$$

Но такъ какъ $y = r\, Cos\varphi$, то $\varphi = arc\, Cos\frac{y}{r}$, почему

$$\lambda = 4\int_0^{\frac{r}{\sqrt{3}}}\int_0^{\sqrt{3}.x} arc\, Cos\frac{y}{r}\, dx\, dy = \frac{4r^2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right).$$

Слѣдовательно, въ силу формулъ (3) и (4), получимъ

$$(5) \qquad m = 4\, r\, L - \frac{16r^2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}.$$

Опредѣленіе величины n нѣсколько сложнѣе предыдущей m. Увеличимъ для удобности размѣры ромба ω. Пусть будетъ $ABCD$ (черт. 4) этотъ ромбъ. Изъ точки A, радіусомъ полу-цилиндра r (по построенію, равнымъ высотѣ ромба), описываемъ круговую дугу dcb. Очевидно, что пока центръ цилиндра будетъ находиться внутри сектора $Abcd$, то цилиндръ, при всѣхъ положеніяхъ своихъ, непремѣнно упадетъ или на одну изъ сторонъ AB, AD, или даже на обѣ. Слѣдовательно можно принять, что число соединеній, относящихся къ сему случаю, будетъ равняться цѣлой окружности, помноженной на площадь сектора; это произведеніе равно $\frac{\pi^2 r^2}{5}$. Если изобразимъ

чрезъ p интегралъ $\int\int \varphi dx dy$, распространенный на все протяженіе оставшейся отъ ромба фигуры $dDCBbc$, то очевидно получимъ

$$(6) \qquad n = \frac{\pi^2 r^2}{3} + p,$$

и вопросъ приведется такимъ образомъ къ опредѣленію величины p. На сей конецъ, изъ какой ни есть точки M, взятой внутри фигуры $dDCBbc$, радіусомъ r, описываемъ часть окружности, которая пересѣчетъ стороны AB и AD, или ихъ продолженія, въ нѣкоторыхъ точкахъ 1, 2, 3, 4. Ясно, что обращая цилиндръ около разсматриваемой точки M, онъ будетъ встрѣчать обѣ стороны AB и AD, или только одну изъ нихъ, когда будетъ находиться внутри угловъ $(1M2)$ и $(3M4)$, именно: обѣ стороны въ пространствѣ угла $(4ME)$ и равнаго ему и противуположнаго вершиною $(1ME')$, а одну только, когда будетъ заключаться въ углахъ $(E'M2)$, $(4MF')$, $(3ME)$, $(FM1)$; внѣ сихъ угловъ встрѣча невозможна. Отсюда легко заключить, что встрѣча непремѣнно произойдетъ при обращеніи цилиндра внутри угла $(FM2)$ и противуположнаго ему вершиною $(F'M3)$, то есть, въ пространствѣ удвоеннаго угла $(FM2)$. Внѣ сихъ предѣловъ, цилиндръ не можетъ падать на стороны AB, AD ромба. Положимъ $(FM2) = \vartheta$, и опредѣлимъ этомъ уголъ. Изъ точки M опустимъ перпендикуляры Mh и Mj на стороны AB и AD робма; пусть будетъ уголъ $(1M2) = 2\varphi$, а $(3M4) = 2\varphi'$. Такъ какъ уголъ $\vartheta = 180° - (2M3)$, а уголъ (hMj), по свойству ромба, равняется 120°, то найдется $\vartheta = 60° + \varphi + \varphi' = \frac{\pi}{3} + \varphi + \varphi'$. Пусть будутъ AX, AY координатныя оси, и $AP = x$, $PM = y$; элементъ площади будетъ $Sin. 60°. dx\, dy = \alpha dx\, dy$, разумѣя подъ α ирраціональное число $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Слѣдовательно получимъ

$$p = 2\alpha \int\int \left(\frac{\pi}{3} + \varphi + \varphi'\right) dx\, dy.$$

Если выразимъ φ и φ' посредствомъ y и x, и разложимъ послѣдній интегралъ на два другихъ, одинъ, относительно фигуры $DdcbbʹD$, а другой, относительно параллелограмма $bBb'C$, то первый интегралъ должно будетъ взять отъ $y =$ ординатѣ круга PN, до $y =$ постоянной линіи AD, и отъ $x = o$, до $x = r$; второй, отъ $y = o$, до $y =$ постоянной линіи AD, и отъ $x = r$, до $x = AB$. Изобразимъ чрезъ y' ординату PN круга, и замѣтимъ что линія $AB = AD = \frac{2r}{\sqrt{3}} = l$; и какъ сверхъ того имѣемъ

$$x = l \operatorname{Cos} \varphi', \qquad y = l \operatorname{Cos} \varphi,$$

и слѣдовательно

$$\varphi' = \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{x}{l}, \qquad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{y}{l},$$

то и получимъ

$$p = 2\alpha \int_0^r \int_{y'}^l \left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{y}{l} + \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{x}{l}\right) dx\, dy$$
$$+ 2\alpha \int_r^l \int_0^l \left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{y}{l} + \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{x}{l}\right) dx\, dy.$$

Пусть будетъ для краткости I_1 первый, а I_2 второй изъ интеграловъ, входящихъ въ величину p; найдется

$$p = 2\alpha I_1 + 2\alpha I_2.$$

Интегрируя относительно перемѣнной y, получимъ

$$I_1 = \int_0^r \left[\frac{\pi}{3}(l - y') + \sqrt{l^2 - y'^2} + l.\operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{x}{l} - y' \left(\operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{y'}{l} + \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{x}{l}\right)\right] dx$$

$$I_2 = \int_r^l \left[\frac{\pi}{3} l + l + l.\operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{x}{l}\right] dx.$$

Интегралъ I_1 заключаетъ въ себѣ сверхъ перемѣнной x еще ординату y' круга; но такъ какъ уравненіе сего послѣдняго есть $x^2 + y'^2 + xy' = r^2$, то и получимъ $y' = \frac{\sqrt{4r^2 - 3x^2} - x}{2}$, а также $x = \frac{\sqrt{4r^2 - 3y'^2} - y'}{2}$, откуда выводимъ $\sqrt{4r^2 - y'^2} = 2x + y'$ или $\sqrt{l^2 - y'^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + y')$. Замѣтивъ сверхъ того, что $\int_0^r y' dx = \frac{\pi r^2}{6a}$, найдемъ

$$(7)\quad \begin{cases} \int_0^r \frac{\pi}{3}(l-y')\,dx = \frac{\pi}{3}lr - \frac{\pi^2 r^2}{18a} \\ \int_0^r \sqrt{l^2-y'^2}.dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^r (2x+y')\,dx = \frac{r^2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi r^2}{6a\sqrt{3}} \\ \int_0^r l.\,arc\,Cos\frac{x}{l}.dx = l\,(l-\sqrt{l^2-r^2} + r.arc\,Cos\frac{r}{l}). \end{cases}$$

Для опредѣленія послѣдняго интеграла входящаго въ величину I_1, именно

$$\int_0^r y'\,(arc\,Cos\frac{y'}{l} + arc\,Cos\frac{x}{l})\,dx,$$

замѣтимъ, что сумма $arc\,Cos\frac{y'}{l} + arc\,Cos\frac{x}{l} = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. Очень легко доказать это равенство посредствомъ анализа; но еще легче простымъ геометрическимъ построеніемъ. Дѣйствительно, мы видѣли выше что вообще

$$x = l\,Cos\varphi',\quad y = l\,Cos\varphi;$$

слѣдовательно и для круга будетъ также

$$x = l\,Cos\varphi',\quad y' = l\,Cos\varphi,$$

откуда

$$arc\,Cos\frac{x}{l} = \varphi',\quad arc\,Cos\frac{y'}{l} = \varphi;$$

и такъ

$$arc\,Cos\frac{y'}{l} + arc\,Cos\frac{x}{l} = \varphi + \varphi'.$$

Но ясно, что когда центръ цилиндра будетъ находиться въ какой ни есть точкѣ M круговой дуги dcb (черт. 5), то по причинѣ MA равнаго r, углы φ и φ' будутъ смежные, то есть, $(hMA) = \varphi$, $(AMj) = \varphi'$, почему $(hMj) = \varphi + \varphi'$; но, съ другой стороны, очевидно что уголъ $(hMj) = 120^\circ$; слѣдовательно

$$arc\,Cos\frac{y'}{l} + arc\,Cos\frac{x}{l} = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}.$$

И такъ

$$(8)\quad \int_0^r y'\,(arc\,Cos\frac{y'}{l} + arc\,Cos\frac{x}{l})\,dx = \frac{2\pi}{3}\int_0^r y'\,dx = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi r^2}{6a} = \frac{\pi^2 r^2}{9a}.$$

Соединяя интегралы (7) и (8), и замѣняя величину l равною ей $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, а α числомъ $\frac{\sqrt{3}}{2}$, найдемъ по сокращеніи

$$2\alpha I_1 = r^2\left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\pi - \tfrac{1}{3}\pi^2\right].$$

Что касается до интеграла I_2, то получаемъ безъ всякаго затрудненія

$$2\alpha I_2 = r^2\left[2(\sqrt{3} - 1) + \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} - 1\right)\pi\right].$$

Слѣдовательно, по формулѣ $p = 2\alpha I_1 + 2\alpha I_2$, найдется

$$p = r^2\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{5}{3\sqrt{3}}\pi - \tfrac{1}{3}\pi^2\right),$$

и наконецъ, по уравненію (6),

$$n = r^2\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{5}{3\sqrt{3}}\pi\right).$$

Если подставимъ теперь въ уравненіе (2) величину m, опредѣляемую формулою (5) и найденное сей-часъ значеніе для n, то найдемъ окончательно:

$$(9) \qquad z = \frac{8\sqrt{3}.rL - r^2(16 + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi)}{\pi L^2}.$$

Вотъ выраженіе вѣроятности, что цилиндръ, брошенный наудачу на плоскость, раздѣленную на равносторонніе треугольники упадетъ по крайней мѣрѣ на одну изъ ихъ сторонъ; очевидно, что противная вѣроятность будетъ $1-z$. Напримѣръ, еслибы для длины цилиндра приняли наибольшую величину $\frac{L}{\sqrt{3}}$, объ которой упомянуто выше, то нашли бы

$$z = \frac{16 - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi}{6\pi} = \text{около } \frac{33}{38}$$

а слѣдовательно противная вѣроятность $= \frac{5}{38}$.

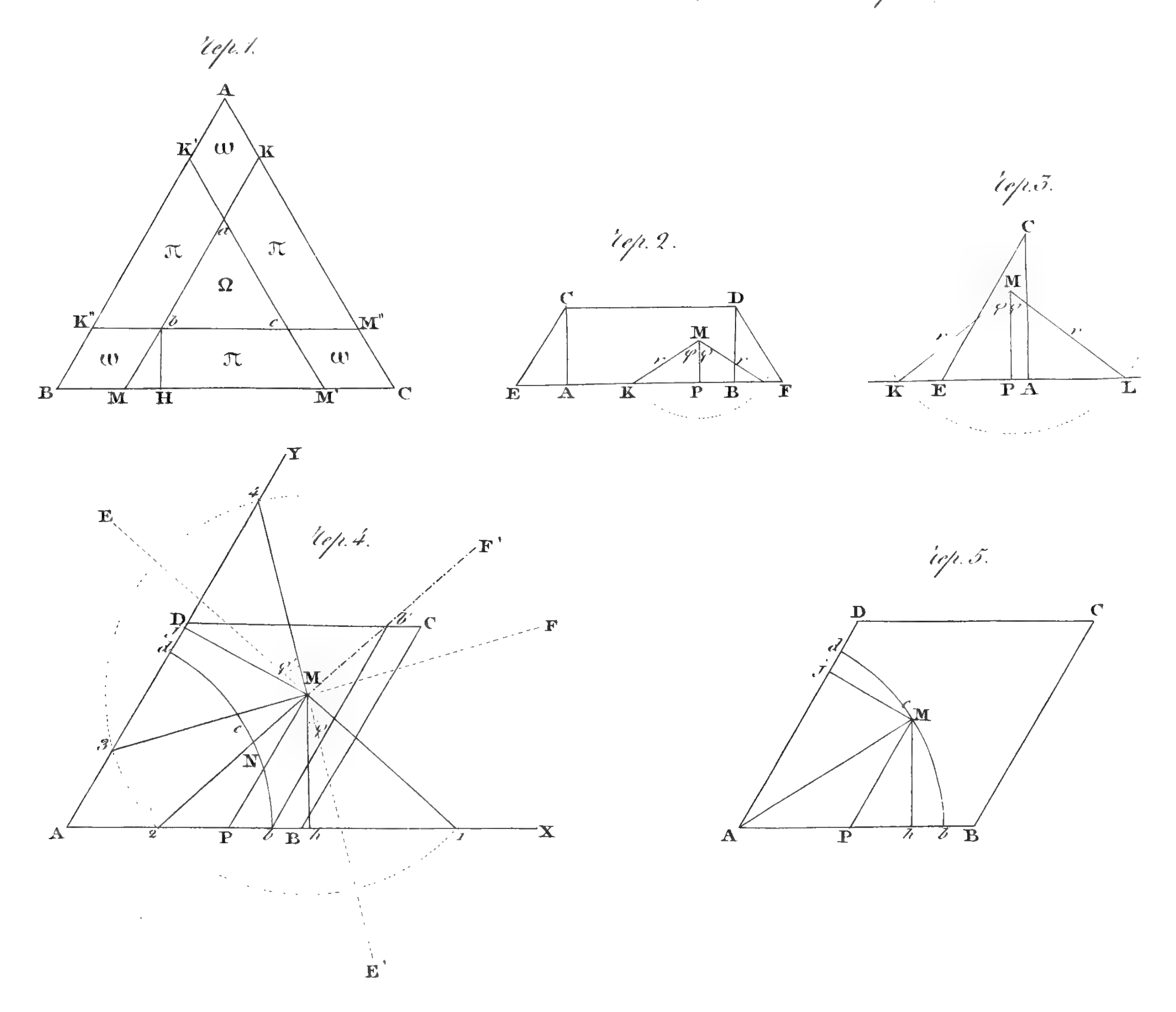
Въ началѣ нашего Разсужденія мы сказали, что излагаемый въ немъ способъ приводитъ къ опредѣленію приближенныхъ значеній

трансцендентныхъ чиселъ. Дѣйствительно, выведенную выше формулу (9) можно употребить для нахожденія по приближенію величины π, то есть, отношенія окружности круга къ его діаметру. Для этого, стоитъ только начертить на плоскости соприкосновенные между собою равносторонніе треугольники, и, наудачу, бросать на нее тонкій цилиндръ. Повторивъ это дѣйствіе значительное число разъ (напримѣръ, 100000), и отмѣтивъ сколько разъ цилиндръ падалъ по крайней мѣрѣ на одно изъ начерченныхъ дѣленій, послѣднее число, раздѣленное на 100000, по теоремѣ Якова Бернулли, будетъ весьма приблизительно изображать вѣроятность z. Уравнивъ это отношеніе второй части формулы (9), получимъ уравненіе, изъ котораго легко уже вывести величину π посредствомъ стороны L треугольника и длины $2r$ цилиндра, которыя предполагаются извѣстными. Впрочемъ не должно терять изъ виду, что формула (9) выведена при условіи $r<\frac{L}{2\sqrt{3}}$.

Мы намѣрены еще возвратиться къ сему роду вопросовъ, довольно любопытнымъ, и часто представляющимъ не малыя затрудненія. По этой причинѣ предлагаемое нынѣ Разсужденіе отмѣчено у насъ *первымъ*.

Mémoires VI. Série T. III.

Буняковскаго, Опред. трансц. чисель помощію анал. вѣроятн.



NOTICE

SUR LES AURORES BORÉALES

Par M. PARROT.

(Lu le 23 décembre 1836.)

La dernière grande aurore boréale, qui a eu lieu le $\frac{6}{18}$ octobre de cette année, ayant de nouveau fixé l'attention de l'Académie et la mienne sur ce genre de météores aussi brillants qu'énigmatiques, je pense qu'il ne sera pas inutile de rappeler le travail que j'ai fait relativement à ce phénomène dans le dessein d'arriver petit-à-petit à son explication. Car l'expérience a prouvé que, lorsqu'il s'agit de phénomènes atmosphériques si variés et si peu à portée d'expériences et d'observations directes de notre part, le tems seul peut ammener, par des observations et des expériences successives, l'explication complette désirée.

Mes *Principes de la Physique de la Terre*, publiés en allemand en 1815, contiennent déja l'esquisse d'une hypothèse que j'ai travaillée, depuis, plus en détail à l'occasion des nombreuses observations de M. le Baron de Wrangel sur les aurores boréales, observations que ce savant et intrépide voyageur a faites vers le 69e degré de latitude-nord, conjointement avec son collègue M. d'Anjou, sur les bords

de la mer glaciale qui baigne la Sibérie orientale depuis l'embouchure de la Léna jusqu'au cap Yakan, sur une étendue de 46 degrés de longitude. Elles se trouvent annexées aux observations de Physique du Baron Wrangel faites pendant un séjour de deux ans dans cette contrée, observations que ce célèbre voyageur m'avait prié de rédiger, les préparatifs qu'il faisait alors pour un autre voyage ne lui laissant pas le temps de se charger lui-même de cette rédaction. Après dix ans écoulés, j'ai cru nécessaire de faire une révision de mon hypothèse pour appliquer à ce genre de phénomènes les nouvelles découvertes qui ont eu lieu dans cet espace de temps. C'est le bût de cette notice.

On sait que les physiciens ont eu successivement des opinions très variées sur la nature des aurores boréales. Depuis Mairan, qui les regardait comme une phosphorescence de l'atmosphère solaire dans l'atmosphère terrestre, jusqu'à nos jours, l'on a prétendu qu'elles sont un phénomène électrique, un simple phénomène d'optique, un effet du magnétisme terrestre, une inflammation de substances qui émanent de la surface de la terre. Cette dernière opinion est la plus ancienne parce que c'est celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit et aux sens de l'observateur. Mais Muschenbroeck est le dernier physicien qui s'en soit déclaré le partisan; l'excellent Gehler paraît même (dans son dictionnaire de physique) s'étonner de la persévérence de ce savant à soutenir cette idée. Ainsi l'astronomie, l'optique, l'électricité, le magnétisme de la terre ont été interpellés tour à tour pour repousser le témoignage de nos sens et éloigner l'idée la plus naturelle, celle de l'inflammation. Nous voulons de toute force être savants, très savants, plus savants qu'il ne faut.

Au reste, cette continuelle recherche de nouvelles explications de l'aurore boréale est à quelques égards excusable, parce que, du temps de Muschenbroeck, la physique n'était pas encore en état d'assigner avec quelque vraisemblance quelle matière se rassemblait à de si grandes hauteurs près des pôles, et pas ailleurs, pour produire ces énormes inflammations dans les hautes régions de l'atmosphère.

On parlait de soufre et de salpètre sublimés; encore un peu de charbon et l'on avait la poudre à canon toute faite.

Le vénérable doyen des physiciens d'aujourd'hui, l'illustre Biot, a cru devoir, pour atteindre le but, réunir dans son hypothèse l'optique, l'électricité, le magnétisme et même les volcans, n'oubliant ou n'excluant que l'inflammation. Aujourd'hui le magnétisme parait être le seul Saint auquel on se soit voué pour expliquer le phénomène des aurores boréales. Pour documenter l'efficacité de sa protection, l'on allègue les arguments suivants:

1°. Les aurores boréales se rangent dans le méridien magnétique.

De quel méridien magnétique? Du lieu qu'occupe le centre de l'aurore boréale? Il faudrait, pour connaître ce méridien, avoir déterminé la position géographique, ou du moins la longitude de ce centre; ce qui n'a jamais eu lieu. Et quand on l'aurait fait, chaque point sur la terre ou au dessus est toujours dans un méridien magnétique.

Est-ce du méridien de l'observateur? — Mais que fait l'observateur au phénomène? Sa personne ou son observation a-t-elle quelque influence sur le météore? Et si dix observateurs sont placés à différentes longitudes, auquel des dix l'aurore boréale obéira-t elle pour se placer sur son méridien magnétique?

Est-il bien vrai que les aurores boréales ont toujours leur siège apparent dans le méridien magnétique du lieu de l'observateur? Nombre d'exemples prouvent le contraire. Entre autres, la superbe aurore boréale que j'ai observée à Dorpat le 22 octobre 1804 se trouvait à plusieurs degrés à l'est du méridien terrestre, tandis que l'aiguille aimantée déclinait à l'ouest, et Wrangel dit que généralement il a observé que le milieu du segment se trouvait dans les limites des deux premiers rhombes à l'est, et que la déclinaison était de $11\frac{3}{4}^{\circ}$ à l'est. Ainsi, la position du milieu du segment variait, dans ses différentes positions, jusqu'à $11\frac{1}{4}^{\circ}$ de chaque côté du méridien magnétique. Peut on considérer de pareilles variations comme nulles?

II°. Les aurores boréales affectent l'aiguille aimantée, la font dévier, lui

impriment des oscillations abnormes; d'où l'on conclut encore que le magnétisme terrestre produit les aurores boréales.

En vertu de la même logique je dirai: Les variations de la pression de l'atmosphère font osciller la colonne de mercure dans le baromètre; donc la colonne de mercure dans le tube de Torricelli est la cause des variations de la pression de l'atmosphère.

En vain récriminera-t-on qu'il n'existe d'autre cause que les corps magnétisés ou susceptibles de magnétisme qui affectent l'aiguille aimantée. N'oublions pas l'électricité que des milliers d'expériences prouvent être la source du magnétisme. Si donc les aurores boréales produisaient de l'électricité et par là les effets de l'aimant, pourrait-on dire que le magnétisme est la cause des aurores boréales, puisque lui-même en serait un produit? Or, nous savons depuis longtemps que les procès chimiques et nommément l'inflammation, le plus violent de tous, produisent de l'électricité. Donc, en admettant que le procès de l'aurore boréale est une inflammation, nous avons dans ce principe celui de l'influence de l'aurore boréale sur l'aiguille aimantée. On observe tous les jours que la position du soleil relativement à un lieu quelconque influe également sur l'aiguille aimantée de ce lieu, et ma théorie chimique de l'électricité explique tout naturellement ce phénomène en l'attribuant aux effets chimiques que le soleil opère dans l'atmosphère et à la surface de la terre, effets qui ont pour résultat l'électricité atmosphérique dont l'existence est parfaitement constatée, qui à son tour se change en phénomène magnétique par une cause qui nous est encore inconnue dans l'atmosohère, d'autant plus que nous ne l'avons pas encore découverte dans nos expériences en petit.

Comme nous venons de prouver la possibilité d'un procès magnétique opéré par la combustion du gas inflammable de l'aurore boréale, il s'ensuit que, si l'on admettait que les colonnes de gas obtiennent par là une polarisation quelconque, le magnétisme terrestre pourrait avoir une influence sur leur position en même

temps que le magnétisme de la grande masse en aurait une sur le magnétisme terrestre et par conséquent sur nos aiguilles aimantées.

Si je voulois pousser les objections contre l'hypothèse de la cause magnétique des aurores boréales aussi loin que possible, je citerais les expériences de M. Kupffer à l'Elbrouz sur la différence de la force du magnétisme terrestre à différentes hauteurs, et il me serait facile de prouver qu'à la hauteur de 20 à 30 milles géographiques au dessus de la surface de la terre, cette force s'évanouit.

Lorsque je publiai, il y a 10 ans, les observations physiques de M. Wrangel, les idées sur l'électro-magnétisme me paraissaient encore trop neuves pour hazarder d'en faire usage en faveur de mon hypothèse des aurores boréales. Aujourd'hui j'ai cru pouvoir le faire en toute sûreté. Je vais à présent donner une esquisse très concise de mon hypothèse et l'appuyer de nouvelles expériences généralement connues.

Le principe de cette hypothèse est que l'aurore boréale est l'inflammation du gas hydrogène carboné qui s'élève continuellement de tous les points de la surface du globe où végètent des plantes, où vivent des animaux, ainsi de l'océan comme des continents. Ce gas, qui peut être modifié par quelques circonstances, mais pour le type duquel on peut prendre celui qui naît dans les marais et a une pesanteur spécifique égale à 0,67 de l'air atmosphérique, ce gas, dis-je, s'élève en vertu de sa légèreté dans l'atmosphère, se mêlant à celle-ci en proportions apparemment variables, dont le mélange est cependant toujours plus léger que l'air atmosphérique. En s'élevant dans les régions basses de l'atmosphère, il doit obéir aux courans de tous les vents qui y règnent jusqu'à ce qu'il ait atteint la région où les procès atmosphériques cessent, où il n'existe plus d'autre mouvement que le courant des pôles à l'équateur et de l'équateur aux pôles. Son voyage se termine donc à une très grande hauteur au dessus des régions polaires.

Wollaston ayant observé très judicieusement que notre atmosphère ne peu

pas s'étendre à l'infini mais qu'elle doit avoir une limite qui est celle où l'attraction des molécules du gas atmosphérique entre elles fait équilibre à l'expansibilité affaiblée par la basse température qui règne dans les hautes régions, nous devons également admettre une limite semblable pour le gas hydrogène carboné, qui au reste est (*) différente de celle des gas atmosphériques.

Il suit de cette première exposition que la hauteur des aurores boréales au dessus de la surface de la terre doit être très grande, et cette haute position se justifie par l'observation que l'on voit des aurores boréales du 45[e] degré de latitude. L'on a même estimé la hauteur de quelques-unes à 200 et 300 lieues; et quoique ces estimations doivent paraître outrées, l'on ne peut nier que leur hauteur n'aille à 40 et 50 lieues et même plus.

Une autre conclusion immédiate est que, la matière de l'aurore boréale n'étant autre chose qu'un gas enflammé, la transparence de ce météore, généralement observée, est complètement expliquée.

L'on conçoit que ce gas, charrié çà et là d'abord après son développement à la surface de la terre, ensuite entraîné vers l'équateur et enfin de là aux pôles, ait besoin d'un temps considérable pour parcourir ces distances. On conçoit également que, les procès chimiques qui le produisent cessant partout au temps où la température à la surface de la terre est à zéro, la plus grande affluence de ce gas autour des pôles doit avoir lieu à la fin de l'automne et pendant l'hiver; ce qui est constaté par la plupart des observations et nommément par celles de M. Wrangel; ce qui explique la plus grande fréquence des aurores boréales pendant ces deux saisons.

Remontons à présent à la naissance de ce gas. Je dis qu'il est produit par la décomposition des plantes et des animaux après leur mort, c. à. d. par leur pourriture. La chaleur et l'humidité ont une grande influence sur ce pro-

---

(*) Très vraisemblablement si l'on se ressouvient des expériences par lesquelles mon fils a prouvé que l'adhésion des molécules est différente pour différents gas.

cès. Les plantes desséchées sur un sol élevé et sec pourrissent lentement, mais dans un terrain humide promptement; de là, en partie, l'insalubrité des marais. De grandes surfaces couvertes de forêts livrent beaucoup plus de ce gas que celles dont nos moissons enlèvent la végétation avant que nos céréales aient eu le temps d'être détruites par la putréfaction. Des contrées entières couvertes d'un sable éternel et d'autres d'une neige éternelle n'ont ni plantes ni animaux qui puissent produire ce gas, tandis que des contrées non moins étendues sont marécageuses et fournissent des quantités copieuses de plantes et d'animaux à la décomposition putride. L'océan n'offre pas une moindre inégalité à cet égard. Les contrées où la profondeur s'étend à plusieurs milliers de toises ne sont habitées que par des mollusques nageantes et des infusoires de toute espèce, tandis que, vers les côtes et les bas-fonds, la mer fourmille en outre de tant d'espèces de coquillages, de testacées et de poissons qui y trouvent leur tombeau.

Ainsi l'on doit admettre que les produits de tant de putréfactions ne doivent pas former une exhalaison uniforme, mais que le gas hydrogène carboné, qui en résulte, doit s'élever en colonnes séparées par d'autres d'air atmosphérique qui ne contiennent que peu ou point de ce gas. Les vents, qui règnent dans les régions inférieures de l'atmosphère, ne peuvent pas détruire cette distribution; ils ne peuvent que couper les colonnes et leur donner des inclinaisons très variées. Au terme de leur course, au dessus des pôles, elles s'accumulent, formant une masse d'une étendue prodigieuse, à laquelle aboutissent, de tous côtés et très irrégulièrement, des colonnes plus ou moins longues et plus ou moins inclinées; l'on doit même s'attendre à ce qu'il s'y trouve des masses aussi larges que longues qui, à cette grande distance, nous paraîtront être sphériques.

Le phénomène de l'inflammation nous offre la réalité de tant de possibilités. Nous voyons, sous la figure du segment, le profil d'une partie de la masse principale qui a dû prendre la forme d'une coupole surbaissée. Les colonnes brillantes sont distribuées sur ses bords et sa surface sous des inclinaisons extrêmement variées, et leurs mouvements vibratoires s'expliquent par les effets mécaniques de cet

énorme incendie. S'il arrive à ce foyer de feu une colonne de gas longue de 20 à 30 degrés du méridien sans interruption, son inflammation s'étendra jusque dans nos contrées, et comme le bout qui est le plus proche de notre latitude est aussi celui qui est le plus proche de la terre, il arrivera le cas que les habitants des pays nommés septentrionaux pourront entendre le bruit de cette gigantesque fusée.

La combustion du gaz hydrogène carboné doit produire de l'eau et de l'acide carbonique. Cette eau se manifeste, d'après le témoignage du Baron Wrangel par des nuages qui se forment auprès de l'aurore boréale et s'y trouvent souvent encore le lendemain. Elle se manifeste encore en formant des halos autour de la lune observés également par ce célèbre voyageur.

Cette formation se confirme encore par le passage suivant extrait de *l'Institut* N°. 190, 28 déc. 1836 p. 444.

„M. Bonycastle, qui a passé sa vie à l'observation des aurores boréales, (à „Kingston, Haut-Canada, sur le lac Ontario à 44° de latitude) a observé que, „quand l'aurore boréale prend une forme brillante, cette lumière ne reste pas „un moment tranquille; il s'y opère des changements continuels; il en émane „fréquemment des jets de lumière blanche qui s'élèvent quelquefois jusqu'au delà „du zénith et sillonnent le ciel de leurs traits argentés. Outre ces mouvements „de lumière, *on voit s'élever et tomber des masses obscures de vapeurs qui sem„blent naître incessamment et ne sont pas des nuages permanents.* On les remarque „toutes les fois qu'il se forme quelque trait ou arc lumineux; elles accompagnent „généralement le commencement de chaque changement de scène et ne contri„buent pas peu à augmenter la majesté aussi bien que l'éclat du spectacle.

Comment pourrait-on expliquer le fait si bien attesté de la formation de nuages à de si énormes hauteurs, sans admettre qu'elle a sa source dans une inflammation d'hydrogène et que, par conséquent, le phénomène de l'aurore boréale est une inflammation?

L'acide carbonique (comme gas transparent) ne peut pas s'offrir à la vue

comme la vapeur vésiculaire ou comme un nuage de petits cristaux; ainsi le témoignage de nos yeux ne peut pas en démontrer la formation par le procès de l'aurore boréale. Mais il est bien démontré que l'inflammation du gas hydrogène carboné produit nécessairement cet acide gazeux et ne serait-ce pas en grande partie, celui qui se forme dans les régions de l'aurore boréale, qui en s'abaissant par sa pesanteur spécifique, se trouve dans l'atmosphère des montagnes éternellement couvertes de neige?

L'exposé de cette hypothèse si simple, si conforme à toutes les observations qui ont quelque généralité, doit suffire pour lui donner plusieurs degrés de vraisemblance. Mais il lui manquait jusqu'à présent une confirmation puisée dans l'expérience. J'avais prouvé en quelque sorte a priori que le gas hydrogène carboné doit se former à la surface de la terre, s'élever dans les plus hautes régions de l'atmosphère et s'accumuler aux pôles. Mais l'on pouvait exiger que l'existence et l'élévation de ce gas se trahit en quelque sorte par sa présence dans l'air atmosphérique. Cette question n'avait point été résolue par l'eudiométrie, sur tout en employant le gas hydrogène pour décomposer l'air atmosphérique. Le phosphore, substance eudiométrique plus sensible que l'hydrogène, n'y avait pas suffi non plus; ce qui me força à admettre que le gas hydrogène carboné ne se monte pas à 0,0005 du volume de l'air, qui est la limite du pouvoir de mon eudiomètre à phosphore.

M. Boussaingault vient de lever cette difficulté en prouvant, il y a deux ans, par des expériences directes, la présence de ce gas dans l'air atmosphérique.

Il a trouvé à Paris environ	0,0001	d'hydrogène tantôt plus, tantôt moins.
A Lyon	0,0005	et le lendemain également
à Lyon	0,0003 .	

Dans les régions tropiques marécageuses la portion s'est trouvée beaucoup plus considérable. Depuis, M. Matteucci a également trouvé de l'hydrogène dans l'air et surtout dans celui de la maremma.

Quant au carbone, les expériences de Saussure en avaient déja fait présumer

l'existence dans l'air atmosphérique. Mais M. Boussaingault a changé cette vraisemblance en certitude en trouvant dans l'atmosphère de Lyon 0,00012 en poids de ce gas, ou 0,00022 en volume, si l'on considère ce carbone comme combiné en forme gaseuse à l'hydrogène.

Les grandes différences dans les résultats obtenus dans les mêmes lieux en différents temps pourraient faire naître des doutes sur l'exactitude des expériences. Mais si l'on considère ce que nous venons de dire de la formation des colonnes de gas hydrogène carboné qui doivent exister séparées l'une de l'autre par des colonnes d'air presque pur, et que les contrées marécageuses ont livré des produits supérieurs à ceux des autres contrées, le doute doit cesser et l'on reconnaîtra que M. Boussaingault ne pouvait guères obtenir dans différents jours des résultats égaux, les vents faisant marcher les colonnes çà et là en les remplaçant par des colonnes d'air presque pur.

Ainsi il est démontré qu'il doit se former à la surface du globe terrestre une quantité immense de gas hydrogène carboné qui doit s'élever aux régions supérieures de l'atmosphère, et le passage de ce gas est prouvé par sa présence dans l'air atmosphérique.

L'inflammation s'opère, dans mon hypothèse, par les étoiles volantes dont Benzenberg et Brandes et d'autres observateurs en ont observé plusieurs dont la hauteur allait à plus de 30 milles d'Allemagne. Ne trouvant dans toutes nos connaissances sur le globe terrestre aucune cause qui pût produire une inflammation quelconque dans des régions désertes, où tous les agents chimiques telluriques nous abandonnent, j'ai eu recours à un agent cosmique qui chaque jour se renouvelle irrégulièrement des centaines, des milliers de fois. C'était en quelque sorte une prédiction forcée, inspirée par le besoin, que je ne pouvois appuyer d'aucune observation directe avant le voyage de M. Wrangel à la mer glaciale, qui assure avoir vu plusieurs fois naître des colonnes luisantes par la passage d'étoiles volantes dans la sphère des aurons boréales. Voici les propres expressions de son journal:

„Wenn Stern-Schnuppen im Bezirke der Nordlichte erscheinen, so ent-„zünden sich an dieser Stelle wo der Sternschnuppen durchging, sogleich Feuer-„säulen die dann vom Entstehungs-Orte sich seitwärts (mit dem Winde) bewe-„gen und es entstehen an ihrer Stelle andere Säulen und Strahlen-Bündel. Dass „demnach Sternschnuppen am Entzünden der Säulen im Nordlichte Theil nehmen, „ist oft von mir beobachtet worden.

Si donc l'observation prouve indubitablement que les étoiles volantes allument de nouvelles colonnes à côté de celles qui existent déjà, il n'y a aucune raison de douter que l'inflammation des premières colonnes ne puisse provenir de la même cause.

Ce passage prouve en outre que la région des aurores boréales est en même temps celle des étoiles volantes et comme les observations, pour déterminer leur hauteur, sont plus faciles et plus sûres pour les premières à raison de la plus grande durée de leur apparition, de bonnes observations trigonométriques exécutées simultanément et répétées à des distances considérables et sous diverses longitudes nous instruiraient en même temps de la hauteur de la région des aurores boréales et des étoiles volantes et peut-être de la hauteur totale de l'atmosphère.

L'on s'étonnera peut-être que les physiciens n'aient pas inventé et admis plus tôt une hypothèse aussi simple que celle qui vient d'être décrite. Mais je crois en trouver la cause dans le désir, je dirais presque l'avidité des physiciens, de forcer les grands phénomènes de la nature à se soumettre au joug d'une loi mathématique comme les phénomènes de l'astronomie. C'est ainsi que l'on s'efforce inutilement de trouver une loi pour les phénomènes de la déclinaison, de l'inclinaison et de la force magnétique de l'aiguille aimantée. Le magnétisme de la terre nous offre trop de variétés considérables dans ses phénomènes, soit relativement à l'espace, soit relativement au temps. Quelque loi que l'on ait supposée, quelque hypothèse que l'on ait imaginée, depuis plus d'un siècle, dans ce but, l'on trouve partout de si nombreuses et fortes anomalies que l'on a

dû jusqu'à présent avouer que le problème est encore bien loin d'être résolu. Il en est de même de l'aurore boréale. En général, si nous observons les grands phénomènes dans notre atmosphère comme partout ailleurs, nous trouverons que la nature n'a pas assujetti ses oeuvres à la loi de la régularité et de la symmétrie, quoiqu'elle agisse constamment par des lois primordiales immuables. Le ciel étoilé ne nous offre nulle part une ordonnance symmétrique; les planètes ne se meuvent ni dans des cercles ni dans des ellipses parfaites, ni dans la même écliptique; les comètes se meuvent dans toutes les directions imaginables autour du soleil, les étoiles volantes nous apparaissent tantôt comme des corps isolés, tantôt en essaims de plusieurs milliers; la terre elle-même n'est pas un ellipsoïde régulier mais affecté de bosses et de creux, sans parler des inégalités qu'offrent les montagnes et leur distribution. Et si nous pénétrons dans l'écorce de la terre, nous y trouvons des strates tantôt parallèles à l'horison, tantôt inclinés avec une telle variété que l'on est tenté de croire que le cahos seul a pu présider à leur arrangement. Les phénomènes météorologiques sont devenus un proverbe relativement à leur inconstance. Même la température de la surface de la terre, qui paraît devoir se soumettre à une loi mathématique plus que tout autre phénomène atmosphérique, s'y soustrait par des écarts énormes continuellement répétés. Il est donc clair que la nature rejette la loi de la symmétrie, soit pour les espaces, soit pour les temps; pourquoi donc vouloir la contrarier? Sa loi est la variété qui constitue la loi du beau, et offre à l'esprit scrutateur de l'homme infiniment plus d'objets d'examen que ne le pourrait une régularité constante.

On sait depuis long-temps qu'un gas inflammable mêlé à de l'air atmosphérique en quantité minime, telle que quelques dix-millièmes, ne peut nullement s'y inflammer, parce que lorsqu'on met ce mélange en contact avec un corps inflammé ou avec l'étincelle électrique, la chaleur qui se dégage des premiers atomes enflammés est tellement affaiblie par la masse de l'autre gas, auquel elle se communique, qu'elle ne peut plus suffire à enflammer les portions voisines. Si donc l'inflammation des masses de gas inflammable, qui forme les aurores bo-

réales, doit se propager, il faut que la plus grande partie de l'air atmosphérique en soit séparée.

Depuis que nous savons que les gas peuvent être rendus liquides par le poids soutenu de la pression de quelques atmosphères et que les gas mêlés par l'affinité chimique, tels que l'acide carbonique, se liquéfient plus facilement que ceux qui ne sont mêlés que par l'affinité physique, tels que l'air atmosphérique, qui n'a point encore pu être liquéfié, le problème de cette séparation du gas hydrogène carboné de l'air atmosphérique est facile à résoudre. Le froid énorme qui doit régner à des hauteurs de 20 à 30 ou 40 milles géographiques et dont nous ne pouvons pas atteindre la 10ème partie dans nos expériences, doit pouvoir lui seul faire cette opération sans le secours de la condensation, de sorte que, pendant que cette opération se fait, les gas oxigène et azote de l'air atmosphérique s'élèvent au dessus de cette région jusqu'à ce qu'ils aient atteint une hauteur et une température qui produise leur liquéfaction, si elle est possible.

Ainsi les colonnes de notre gas inflammable doivent en s'élevant se dépouiller petit à petit de l'air atmosphérique qui les enveloppe de molécule à molécule, de sorte que les parties de ces colonnes les plus élevées en sont entièrement libérées et ne peuvent brûler qu'à leur surface où elles sont en contact avec l'air ambiant comme cela a lieu à la flamme de nos lampes et bougies, ou à celle des volcans, tandis que les parties moins élevées, ou d'autres colonnes qui les suivent, en auront encore retenu une partie suffisante pour produire une inflammation dans leur intérieur, assez énergique pour se propager sur toute la longueur de la colonne.

M. Poisson, dans sa *théorie mathématique de la chaleur,* a admis le principe que l'air atmosphérique doit subir à sa limite supérieure une liquéfaction sous l'influence du froid énorme (*) qui doit avoir lieu dans cette région du

*) M. Poisson vient de nous livrer une nouvelle explication du phénomène de l'accroissement de la température de la terre avec la profondeur, jointe à celle de la température de la terre en

ciel; et rien ne s'oppose à cette hypothèse que l'impossibilité où l'on a été jusqu'à aujourd'hui de la produire dans nos petits appareils. La liquéfaction du gas hydrogène carboné n'est pas sujette à cette objection.

MM. de la Rive et Poggendorff (*Annalen der Physik und Chemie* 1836, N°. 9, p. 80) ont attaqué l'opinion de M. Poisson. M. de la Rive dit qu'en effet, si l'atmosphère doit avoir une limite supérieure, elle doit prendre la forme d'une espèce de liquide, mais que l'idée de ce liquide n'est qu'une définition mathématique sans réalité, parce qu'il manque à ce liquide l'adhésion de ses molécules que l'on ne peut pas supposer dans les fluides élastiques. Je ne veux pas copier ici tout l'article du journal cité qui contient ces objections, mais présenter aphoristiquement ma manière d'envisager la chose, qui lève toutes ces difficultés apparentes.

1) L'adhésion moléculaire des gas, niée par M. de la Rive et passée sous silence dans l'opinion de M. Poggendorf, est démontrée, depuis 1814, par les expériences de mon fils à l'occasion de la description de son gasomètre. Personne alors ne s'est élevé soit contre les expériences, soit contre la thèse, malgré la grande importance de l'objet.

2) L'idée d'un liquide, telle que M. Poisson la présente, n'est autre chose que celle que Wollaston a admise, lorsqu'il parle de la limite de notre at-

---

général. Les fondements de son hypothèse sont que la terre n'a aucune chaleur propre; que celle qu'elle a, lui vient du soleil et des autres astres; que si l'on tire une ligne droite de la terre dans une direction quelconque, cette droite tombe enfin quelque part sur un autre soleil; que notre soleil, de même que tous les autres, communique de la chaleur aux corps environnants en quantité égale à toutes les distances. Il calcule que celle que la terre reçoit de son soleil à Paris, où la température moyenne est 10,822° C., se monte à 23,948°. Si donc on la soustrait de la température moyenne, la température de Paris serait = — 13°. D'où il suit que l'influence des autres astres y élève la température depuis le zéro absolu (limite que nous ne connaissons pas) jusqu'à — 13°. Comment concilier ce resultat avec l'opinion citée du célèbre mathématicien?

mosphère et pose cette limite là où l'adhésion moléculaire égale ou surpasse la force expansible du gas.

3) Cette idée de Wollaston est une vraie définition du liquide, à laquelle il faut simplement ajouter la pesanteur que ce célèbre physicien supposait naturellement. Ainsi, nous aurons une définition complette et juste du liquide en disant que c'est une aggrégation de matière pesante, douée d'une attraction moléculaire et d'une force expansible moindre que l'attraction moléculaire.

4) Le gas est une aggrégation de matière pesante, douée d'une force expansible et d'une attraction moléculaire moindre que la force expansible.

5) La nature soumet ces deux genres de fluides à deux influences, la pression de l'atmosphère et la température. La première coopère avec l'attraction moléculaire, la seconde avec l'expansibilité. Nous pouvons diminuer, au moyen de la pompe pneumatique, la pression atmosphérique jusqu'à environ $\frac{1}{1000}$, et nous opérons par là une vaporisation plus abondante des liquides. En augmentant la pression, nous diminuons l'évaporation et même la formation des gas par des opérations chimiques, comme je l'ai prouvé par des expériences directes citées dans ma *Physique de la Terre*. En augmentant la température, nous augmentons l'expansibilité; et en la diminuant, nous affaiblissons l'expansibilité. Ces deux influences, que l'on peut varier à l'infini, expliquent les variations infinies des phénomènes des fluides des deux genres relativement à leur changement de forme.

6) Dans ces principes, les gas à la surface du globe terrestre sont des fluides dont l'attraction moléculaire, est, sous les températures naturelles depuis environ — 40° jusqu'à + 30° R., inférieure à la force d'expansion. Il est donc nécessaire d'admettre que, même dans le cas de la suppression de la pression atmosphérique (qui a lieu aux limites de l'atmosphère), un froid d'une certaine intensité puisse vaincre l'expansibilité et rendre à l'attraction moléculaire le pouvoir de changer un gas en un liquide.

7) Si tous les gas étaient liquéfiables à une même température, alors le phénomène de l'aurore boréale serait impossible, parce que le gas atmosphé-

rique et le gas inflammable liquéfiés se trouveraient tous deux mêlés dans la même proportion que près de la surface de la terre. Mais, comme l'expérience a prouvé que la liquéfaction des gas composés chimiquement est plus facile que celle des gas simples ou du gas atmosphérique, où les gas oxigène et azote ne se trouvent réunis que par l'affinité physique, *) il s'ensuit que le gas atmosphérique conserve son élasticité sous de plus grands froids et forme aux confins de l'atmosphère terrestre une couche gaseuse au dessus du gas inflammable liquéfié, couche qui peut se terminer par une couche liquide.

8) L'on pourrait supposer que les gas liquéfiés dans la région supérieure de l'atmosphère se trouveraient condensés par le froid jusqu'à devenir solides. Mais ce serait une erreur. Car ces liquides ne peuvent plus s'élever à une plus grande hauteur où règnerait un plus grand froid, puisque leur force expansible est coërcée. Si dans nos expériences faites ici bas, on est parvenu à solidifier l'acide carbonique, ce n'est qu'au moyen d'une pression de plusieurs atmosphères ajoutée à la basse température (pression qui n'existe nullement près des confins de l'atmosphère) que l'on y est parvenu. L'eau qui est gaseuse ou vaporisée à 100° C. et liquide jusqu'au zéro de nos thermomètres, se solidifie au dessous de ce zéro. D'où il suit que celle qui se forme par l'inflammation aux hauteurs de l'aurore boréale doit se former en cristaux, mais non le gas inflammable, aussi long-temps qu'il ne s'élève pas au dessus de la hauteur à laquelle il a été liquéfié, et nous venons de voir que cela ne peut pas avoir lieu.

Un pas important dans l'explication des aurores boréales est la distinction entre l'aurore boréale proprement dite (le segment lumineux, permanent, avec ses colonnes de plus ou moins longue durée et mobiles) et les inflammations brusques et rapides en forme de fusées qui, s'éloignant jusqu'à 20, 30 degrés

*) L'affinité chimique est, selon moi, cette force naturelle qui produit le mélange spontané de deux ou plusieurs substances, mélange qui a d'autres propriétés chimiques que ses composans. L'affinité physique est celle qui produit le mélange spontané de deux ou plusieurs substances, mélange qui conserve les propriétés de ses composans.

méridiens et plus, atteignent quelquefois, comme il a été dit plus haut, le zénith de l'observateur et y forment, quoique rarement, le superbe phénomène de la couronne. Ces fusées ne sont autre chose que le gas hydrogène carboné encore mêlé à une portion d'air atmosphérique, et qui n'ont par conséquent pas encore atteint la hauteur nécessaire pour consommer, par l'intensité du froid, la séparation totale des deux gas. Nous ne connaissons pas encore cette hauteur et ne pouvons pas déterminer la distance absolue qui a lieu entre l'observateur et le bout de la fusée qui se trouve près de son zénith, mais l'on conçoit qu'elle peut-être assez petite pour que l'observateur entende le bruit que doit faire une inflammation si rapide des masses immenses de gas qui forment ces colonnes, fait avéré par plusieurs physiciens et nié par d'autres qui n'avaient pas eu l'occasion de l'entendre.

Je n'entrerai pas dans les détails ultérieurs de mon hypothèse sur les autres phénomènes qu'offrent les aurores boréales et nommément sur les couronnes, n'ayant en ce moment rien de précis à ajouter à ce que j'ai déja publié à l'occasion des observations de M. Wrangel, mais je terminerai cette notice par une réflexion qui se présente naturellement à l'esprit de l'homme sensible.

Il est donc bien démontré, abstraction faite de toute hypothèse, qu'il s'exhale à la surface du globe terrestre une quantité immense de gas hydrogène carboné qui s'élève jusque près des confins de notre atmosphère. D'où il suit naturellement que, depuis tant de milliers d'années que le procès de putréfaction a continuellement lieu, l'atmosphère entière en serait tellement infectée que le procès de la vie des animaux et même des plantes serait arrêté depuis long-temps. L'acide carbonique, produit surtout de la vie animale et végétale, retenu par la pesanteur spécifique dans la région la plus basse de l'atmosphère et dont l'accumulation serait mortelle à tous les animaux et surtout à l'homme, est absorbé chaque jour par l'acte de la végétation qui en purifie l'air au point de n'en laissée qu'environ $\frac{1}{10000}$, et nous admirons avec raison les lois de la nature à qui nous devons cet insigne bienfait. Par contre, le gas hydrogène, que la végéta-

tion ne peut absorber, est forcé par sa légèreté de s'élever dans les régions les plus éloignées du théâtre de la vie pour ne pas en arrêter le cours. Mais les siècles ayant accumulé ce gas infeste au point d'en remplir toute l'atmosphère jusqu'au séjour des plantes et des animaux, tout ce qui a vie serait mort depuis long-temps. La nature dût donc établir dans les plus hautes régions de notre atmosphère un procès qui détruisit ce gas à mesure qu'il se formait. Des myriades d'étoiles volantes, circulant dans l'espace du système solaire et enflammées au contact de notre atmosphère, sont les mèches qui allument ces feux brillants des aurores boréales et consument en hiver le gas inflammable produit en été, servant en même temps à éclairer les longues nuits des pauvres habitants des cercles polaires. Cette inflammation change ce gas en eau et en acide carbonique, dont la première descend en forme de glaçons infiniment petits jusques à la terre à qui elle est rendue, et l'autre redescend aussi, mais plus lentement, pour rendre à la végétation la nourriture qui lui avait été enlevée.

Il est peu de phénomènes qui invitent si fortment et avec tant d'attraits à l'admiration de la divine Providence dans l'économie de la nature physique que ce phénomène de l'aurore boréale, qui ne paraît au premier coup-d'oeil que comme une belle illumination, mais qui, bien connue dans ses causes et dans ses effets, nous dévoile clairement l'intelligence admirable et la bonté infinie du Créateur qui a attaché à ce phénomène si agréable à l'oeil et si surprenant la conservation de tous les êtres vivans; tant il est vrai que chaque nouvelle découverte nous rammène invinciblement à l'adoration de l'Etre suprême.

NOUVELLES EXPÉRIENCES

EN FAVEUR

DE LA THÉORIE CHIMIQUE

DE

L'ÉLECTRICITÉ,

PAR

M. PARROT.

(Lu le 16 juin 1837.)

Les physiciens auront peut-être trouvé singulier que l'auteur de la théorie chimique de l'électricité n'ait pris aucune part aux discussions excitées en faveur de cette théorie par les expériences de M. De la Rive, excepté pour revendiquer son droit de priorité qui date de 1801, et pour réfuter plusieurs objections spécieuses que M. Marianini publia en 1830 dans les *Annales de Chimie et de Physique*. La raison de ce silence est toute simple: je voyais la cause de ma théorie en de trop bonnes mains pour craindre sa chûte, et lorsque M. M. Becquerel et Faraday parurent dans cette lutte, je regardai mon *immiscion* directe dans cette lutte d'autant plus superflue, et le triomphe comme complet.

Cependant l'Allemagne et l'Italie n'ont point encore cédé. Beaucoup de physiciens de ces deux nations tiennent encore à l'hypothèse de Volta, quoiqu'ils fassent quelques concessions à la chimie. Cela m'a engagé à publier les expériences suivantes dont j'espère quelque fruit à cet égard. Cependant, je n'eusse pas eu l'idée d'entrer si tard en lice, si un travail sur les végétations métalliques, dont je m'occupe depuis long-temps, ne m'eût fourni ces expériences sans que je les aie cherchées directement pour mon but actuel. Originairement, frappé par le phénomène que, lorsqu'on plonge simplement un morceau de zink dans une solution d'acétate de plomb, ou lorsqu'on effectue la décomposition de ce sel par la pile voltaïque, le métal désoxidé forme des feuilles qui augmentent petit à petit de grandeur et sert par conséquent de conducteur aux électricités, je voulus donner une direction déterminée à ces désoxidations, et en même temps prolonger le temps de l'opération pour en observer le procès avec plus de commodité et de sûreté. Les végétations métalliques sont devenues, dans mes expériences, un excellent électroscope au moyen de l'appareil que j'ai nommé autrefois *instrument d'affinité*, parce que je l'imaginai, il y a au moins 30 ans, pour explorer les lois de la marche spontanée de deux liquides qui ont de l'affinité l'un pour l'autre et se touchent par une surface quelconque.

Cet instrument sert à superposer les deux liquides l'un à l'autre avec le moins de mouvement mécanique possible, et est composé d'un vase cylindrique de verre, du fond duquel part un tube recourbé qui s'élève en dehors perpendiculairement jusque un peu au-dessus du bord du vase, et est surmonté par un petit entonnoir à robinet. Une lentille, d'environ $\frac{1}{2}$ pouce de diamètre, posée au fond du vase sur l'orifice du tube, ferme cet orifice imparfaitement, de sorte que la liqueur (la plus pesante) versée dans l'entonnoir et s'écoulant lentement au moyen du robinet très peu ouvert, trouve à la surface inférieure de la lentille un obstacle qui l'empêche de monter verticalement en la forçant en même temps de s'épancher horizontalement de manière à couvrir immédiatement le fond du vase. — On remplit d'abord de la liqueur plus pesante l'entonnoir et tout le

tube jusqu'à la surface inférieure de la lentille, et pas plus loin ; ce qui peut (après quelque exercice) se faire sans qu'il reste aucune bulle d'air dans cette liqueur. Puis on verse au moyen d'un petit entonnoir à orifice très étroit la liqueur plus légère en quantité requise. Après que celle-ci s'est mise en repos, l'on ouvre tant soit peu le robinet du tuyau pour produire l'écoulement très lent, nécessaire au commencement et que l'on accélère petit à petit à mesure que la liqueur monte.

La marche spontanée des substances dissoutes dans un des liquides, ou proprement les deux réciproquement, commence avec l'emplissage, et l'imprégnation mutuelle se fait très lentement en vertu du repos mécanique des masses liquides. Dans les deux instruments de ce genre que j'ai employés le vase cylindrique avait en hauteur 3″, 10‴ et en diamètre 1″, $11\frac{3}{4}$‴.

I^e et IIe expérience.

Dans ces deux expériences simultanées, j'ai employé un volume de solution saturée d'acétate de plomb affaibli par 60 volumes d'eau distillée. A cette liqueur fut superposée une couche d'eau distillée de 10‴ de hauteur, dont la surface se trouvait à 2‴ du bord du vase. Le but de cette couche d'eau pure est uniquement de ralentir l'action chimique de l'acétate sur les métaux qui seront plongés dans cette couche ; de nombreuses expériences m'ayant appris que l'on obtient les résultats les plus décisifs et les plus parfaits par cette retardation.

Les métaux employés étaient un cylindre de zink et un cylindre d'étain chacun de 1″, 11‴ de longueur et $2\frac{1}{2}$‴ de diamètre. Au milieu de chacun, était fortement vissé, à angles droits, un fil de cuivre de $\frac{3}{4}$‴ de diamètre et d'une longueur qui dépassait de 2″, $\frac{1}{2}$‴ la surface du cylindre. La vis entrait à 2‴ de profondeur de sorte qu'elle n'atteignait pas la surface opposée du cylindre. J'ai eu soin que, soit en polissant la surface des cylindres, soit en forant l'écrou des vis, de même qu'en taillant les vis elles-mêmes, il ne soit employé ni huile ni autre graisse, afin d'obtenir un contact parfait entre les cylindres et leurs fils

respectifs, et au moment de faire usage de ces petits appareils, je les ai frottés avec de la poudre sèche et très fine de craie.

Dans l'un des appareils (A), je plaçai le cylindre de zink, et dans l'autre (B), le cylindre d'étain, tous deux horizontalement avec leurs fils de cuivre en position verticale. L'axe des cylindres était à 8‴ au-dessous du bord du vase, et devait par conséquent se trouver à 6‴ au-dessous de la surface de l'eau. De même, le bord inférieur des cylindres devait se trouver à $2\frac{3}{4}$‴ de la *limite* entre les deux liqueurs et la pointe inférieure des fils de cuivre à $12\frac{1}{2}$‴ du fond du vase, et dépasser la *limite* de $20\frac{1}{2}$‴. Dans les expériences suivantes analogues, l'on a observé les mêmes proportions.

Les deux appareils étant ainsi préparés, j'effectuai de la manière décrite l'emplissage, qui dura pour chacun environ 6 minutes.

Je vais décrire en détail les résultats de ces deux expériences d'après mon journal, pour donner une idée juste de la marche des phénomènes, et épargner pour la suite des répétitions.

APPAREIL A. ZINK.	APPAREIL B. ETAIN.
Le 6 *mars* le matin à VII, 11. L'emplissage était terminé.	A VI. 55. L'emplissage était terminé.
A VII. 16. On voit déjà à la loupe quelques points brillants de plomb métallique sur le fil de cuivre. Rien sur le zink	A VII. 16. Rien, ni sur le fil de cuivre ni sur l'étain.
A VII. 20. On voit déjà à vue simple ces points brillants. Rien sur le zink.	A VII. 20. Rien.
A IX. 20. Toute la longueur du fil de cuivre était parsemée de ces points brillants jusqu'à 4‴ du zink. De là vers le haut se trouve une ceinture de mousse grise, très légère. (Cette modification de végétation sera décrite plus bas). Rien sur le zink.	A IX. 20. Rien.

A.

A XI. 40. Les points luisants sont devenus de fines paillettes faciles à distinguer à la vue simple.

A la partie supérieure du fil de cuivre, immédiatement sous la mousse, ce sont déjà de petites feuilles distinctement dentelées (folia serrata).

La mousse a également augmenté en volume.

Le zink ne montre pas encore une oxidation bien sensible; seulement son luisant est un peu terni, et il porte une petite houppe de mousse grise à $4'''$ de distance du fil de cuivre.

A V. 55. Les feuilles sont partout sensibles et leur caractère dentelé. Celles du haut ont déjà $1'''$ de longueur. Elles composent ensemble une touffe épaisse qui cacherait totalement le fil de cuivre, si elles n'étaient pas placées perpendiculairement à son axe. Au sommet de cette touffe la mousse s'est considérablement accrue.

Au cylindre de zink pendent deux rideaux de mousse très déliée, de chaque côté un, dont la hauteur, près du fil de cuivre, est $= 0$ et à chaque bout environ $4'''$. Au moment de l'observation, je vois l'extrémité à droite de l'un de ces rideaux tomber, ébranlée par la marche militaire du grenadier desservant.

B.

A IX. 40. Rien.

A V. 55. Rien.

A.

Le 7 mars. Le matin à VI. 15. La végétation a fortement augmenté. Toutes les feuilles ont un caractère bien prononcé. La plus grosse touffe est à la moitié de la hauteur du fil de cuivre et a $3\frac{1}{2}'''$ de diamètre, à la pointe seulement $2'''$.

Le zink a ses deux petits rideaux de mousse comme hier, mais ses parcelles tombent souvent par les secousses du plancher; on les voit au fond du vase.

Le 8 mars. Le matin à VIII. 15. La végétation sur le fil de cuivre a considérablement augmenté. Elle dépasse de $8'''$ la pointe du cuivre en jetant ses feuilles vers le bas. La touffe inférieure a $7'''$ de plus grand diamètre et $5\frac{1}{2}'''$ de plus petit. La touffe du milieu (hier la plus grosse) a $5\frac{1}{2}'''$ de diamètre, de même que toute la partie supérieure. Le tout a une forme de massue.

Sur le *zink* la mousse tombe et se renouvelle comme hier, de sorte que les rideaux

B.

Le 7 mars, à VI. 15. Le fil de cuivre était couvert d'une poudre blanche infiniment fine qui ne faisait que ternir sa couleur. L'étain était parsemé sur toute sa surface supérieure et latérale de très petites taches blanches.

Ces précipitations blanches me paraissant ne pouvoir être autre chose que des oxides produits par l'action de l'air, je couvris hermétiquement l'appareil d'une plaque de verre, après avoir inutilement tâché d'enlever la poudre du fil de cuivre avec un pinceau; ce qui bouleversa un peu les liquides et aurait dû accélérer la décomposition de l'acétate, si elle avait eu lieu dans cet appareil.

Le 8 mars, à VIII. 15. Sur le fil de cuivre point de nouveau précipité blanc, et sur l'étain aucune augmentation des petites taches blanches.

Aucune végétation.

A.	B.
gardent à peu près les mêmes dimensions. Le reste de la surface du zink est couvert d'une menue couche de mousse.	
Le 9 *mars*. Le matin à VII. La végétation sur le fil de cuivre avait atteint le fond du vase. Sur son extérieur il s'est formé une végétation en forme de mousse d'une finesse extrême vers le haut, et gagnant en masse vers le bas. Elle est ramifiée, les rameaux rectilignes partant à angles droits de la côte qui occupe le milieu. Ces rameaux sont eux-mêmes subramifiés en ce qu'ils ont sur toute leur longueur des rameaux encore plus fins inclinés à leur côte d'environ 70°. Ils sont si fins, qu'ils parraissent demi-transparents à la faveur de la lumière déflectée. La mousse qui a été observée précédemment pendante au zink, a le même caractère, à cette différence près qu'elle est plus courte. Dans le mémoire que j'ai annoncé sur les végétations métalliques, je livrerai la description de plusieurs espèces de mousses métalliques.	*Le* 9 *mars*. Le matin à VII Rien de nouveau.
Le 10 *mars*. Le matin à VI. 30. La végétation au bout du fil de cuivre est partagée en trois branches qui couvrent, presque en total, le fond du vase. Trois petits rameaux ont percé dans le tube de l'instrument, deux sur une longueur de $1\frac{1}{2}''$, la troisième de $\frac{1}{2}''$.	*Le* 10 *mars*, à VI. 30. Rien.

A.	B.
La mousse qui couvre toute cette végétation a le même caractère qu'hier,	
Le 11 *mars*. Le matin à VIII. 10. Tout comme hier. La végétation pendante au fil de cuivre a encore augmenté, et la mousse dont elle est chargée est devenue un peu plus grossière et opaque. *Sur le zink*, toujours comme le 8 mars.	*Le* 11 *mars*, à VIII. 10. Rien.
Le 12 *mars*. A I. 15. après midi. Tout comme hier. La végétation a très peu augmenté; la mousse est devenue encore plus opaque. Il paraît que le procès touche à sa fin.	*Le* 12 *mars*, à I. 15. Rien.
Le 13 *mars*. Le matin à IX. 45. Rien de nouveau. Le procès est terminé; l'acétate paraît entièrement épuisé.	*Le* 13 *mars*, à IX. 45. Rien.

Le 14 mars, je vidai les appareils et séchai légèrement avec du papier, les deux cylindres et leurs fils de cuivre après les avoir lavés dans de l'eau distillée. Le cylindre de zink était couvert d'oxide noirâtre qui, ayant été enlevé avec une brosse dure mouillée, laissa voir la surface raboteuse du zink. Le cylindre d'étain était luisant, à l'exception de légères taches blanches qui cédèrent facilement à la brosse mouillée. Les deux fils de cuivre n'avaient rien perdu de leur brillant.

L'oxidation du zink a sûrement dû commencer au moment où les premiers atomes d'acétate de plomb l'atteignirent. Mais ce n'est qu'environ $4\frac{1}{2}$ heures après l'emplissage qu'on en voit les premiers effets sur le luisant un peu terni de la surface du zink.

La théorie chimique de l'électricité, soutenue de la connaissance de la marche spontanée des substances chimiques, explique la 1e expér. avec la plus grande facilité. La petite couche d'eau pure interposée entre la masse de solution d'acétate et le zink se pénètre lentement d'acétate, en sorte que ce sel n'arrive au zink qu'en parcelles infiniment petites, montant vers ce métal contre

la loi de la pesanteur spécifique et en vertu de l'affinité physique. Là, elles sont décomposées par l'affinité chimique supérieure du zink pour l'acide acétique et déposeraient du plomb sur le zink, comme cela arrive lorsqu'on plonge tout simplement un morceau de ce métal dans une solution de plomb. Mais cela n'a pas lieu. Avant même que l'oeil puisse apercevoir l'oxidation du zink, on voit déjà le fil de cuivre s'orner de fines paillettes luisantes de plomb métallique qui, au bout de 4^h 44 min., sont déjà de petites feuilles, et d'une ceinture de mousse si déliée qu'elle paraît presque transparente. Ce n'est qu'une heure plus tard que l'on voit un brin de la même mousse suspendu au zink. Dès lors, les deux végétations augmentent simultanément; mais celle sur le fil de cuivre est toujours incomparablement plus considérable que celle sur le zink.

Telle est la marche visible du procès. Voyons quelle est celle des électricités.

J'ai prouvé par mes anciennes expériences que, lorsqu'un métal se trouve en contact avec un liquide oxidant, le métal s'empare de $-E$ et le liquide de $+E$. Les expériences de M. **De la Rive** ont donné une nouvelle évidence à cette vérité. Si donc nous mettons un second métal en contact parfait avec le zink (et nous pouvons considérer comme tel le contact qui résulte du fil de cuivre vissé fortement dans le zink *)), le cuivre, comme meilleur conducteur que le liquide, enlèvera la $-E$ du zink qui se répandra le long de la surface (du fil de cuivre), et la $+E$, répandue dans le liquide **), se trouvera en face de la $-E$ qui est sur le cuivre. Mais le cuivre n'est pas le seul métal qui, en contact avec le zink, produise ces effets. Je les ai obtenus, il y a déjà plus

*) J'avais eu en outre la précaution d'empêcher toute pénétration du liquide dans la vis entre ses surfaces et celles de l'écrou au moyen d'un brin de graisse molle appliquée au point extérieur de contact, quoique plus de 50 expér. m'eussent appris qu'il suffit de courber le fil de métal en forme de crochet et de le suspendre au cylindre de zink dans le liquide pour transmettre l'E de l'un à l'autre. J'ai même constamment observé, qu'autour de ce point de contact, le zink ne s'oxide pas. Mais je voulais avoir un contact au-dessus de toute objection.

**) V. la note à la fin du mémoire.

de 20 ans, avec des fils d'or, de platine, de laiton, d'argent, d'étain, de zink et même de plomb. Il était curieux de voir comment un fil de plomb avait l'air de décomposer son acétate et se couvrir des plus belles feuilles du même métal. Le tronc et les feuilles de cet arbre métallique sont, comme dans le palmier, de la même nature.

Nous avons laissé les deux E en présence à la surface du fil de cuivre, $+E$ dans le liquide, $-E$ sur le fil de cuivre. Elles doivent donc y opérer la décomposition de l'acétate comme si elles y eussent été amenées des pôles d'une pile voltaïque.

Voyons à présent comment la théorie de contact explique le même phénomène.

Nous avons ici deux espèces de contact, celui des métaux entre eux, et celui des métaux avec le liquide. Quant à la première, la théorie de Volta dit: Le zink est le métal positif et le cuivre le métal négatif, c'est-à-dire que le zink est chargé de $+E$ et le cuivre de $-E$. Ainsi la réduction du plomb doit avoir lieu sur le cuivre, conformément à la première expérience.

Mais ce théorème de Volta (que le zink est le métal positif et le cuivre négatif) est en contradiction directe avec le mien, dont l'évidence est démontrée par tant de preuves. Si donc le zink est le métal négatif, comme il l'est en effet, et le cuivre positif, il faudrait, selon la théorie de contact, que le plomb désoxidé se précipitât sur le bâton de zink et non sur le fil de cuivre. Ce fil, dans la théorie chimique, n'est ni positif, ni négatif, mais seulement le conducteur de la $-E$ développée par l'oxidation sur le zink.

L'on pourrait objecter que, selon la théorie chimique, il ne devrait se former de plomb métallique que sur le fil de cuivre, et aucun sur le zink; ce qui est contraire à la première expérience qui nous dit qu'il s'y forme au moins de la mousse. Cette théorie répond qu'en effet il ne s'en forme pas dans les premières minutes, c'est-à-dire pas avant qu'il se soit formé une couche sensible d'oxide de zink sur la surface de ce métal. L'effet de cette couche, con-

ducteur imparfait, ralentit le passage de $+E$ dans l'eau, de sorte qu'il en reste une petite portion à la surface, ou plutôt dans l'intérieur de cette couche d'oxide qui peut se combiner avec une égale portion de la $-E$ du zink. Plus la couche d'oxide s'épaissit, plus cette combinaison s'accroît, et voilà pourquoi la mousse, d'abord d'une si grande ténuité, devient petit à petit plus épaisse, plus forte, moins diaphane. On peut voir la même chose par l'expérience la plus simple: Qu'on plonge un bâton de zink dans de l'acétate plus ou moins affaibli, l'on observera constamment qu'il se forme une couche d'oxide sur le zink avant qu'il paraisse la moindre paillette luisante. Moins l'acétate est effaibli, plus le temps nécessaire à produire le premier atome visible de mousse est court; et il est encore sensible, quoique très court, lorsque l'acétate est concentré.

Une autre cause de la grande prépondérance de la masse de plomb à l'état métallique sur le fil de cuivre, comparée à celle qui se forme sur le bâton de zink, est la figure allongée de ce fil qui, comme l'on sait, favorise l'épanchement de l'électricité. Aussi nous voyons les plus fortes masses se former petit à petit à la pointe du fil et finir par remplir de là presque toute la partie inférieure du vase. Le même effet se reproduit sur la surface du zink. Les deux rideaux de mousse qui s'y forment ont aux deux extrémités 4''' de hauteur, et près du fil de cuivre, au milieu du cylindre, 0''', jusqu'à ce que l'affluence toujours croissante de la couche d'oxide et des E finisse par donner à ces rideaux une longueur assignable au milieu et couvrir tout le zink d'une légère couche de mousse. Il ne serait pas plus difficile d'expliquer pourquoi les feuilles de plomb ne se forment sur le fil de cuivre qu'à environ 4''' du zink et la formation de la mousse entre deux, mais cela nous mènerait trop loin; le lecteur construira facilement de lui-même ce phénomène dans la théorie chimique de l'électricité. Je passe au contact des métaux avec le liquide.

Voyons à présent quel sera l'effet de ce contact dans la théorie de contact.

Dans toutes les théories, les physiciens ont admis que l'effet chimique

des deux E combinées est en raison de la grandeur des surfaces actives. Dans l'hypothèse de Volta, le cuivre est négatif et le zink positif. D'où il suit nécessairement que l'E produite par le premier métal dans l'eau sera l'opposée de celle produite par le second. Il se fera donc une neutralisation, une destruction, d'une portion des E; et faute de données sur les quantités relatives produites par les deux métaux, nous admettrons que les deux métaux en produisent des quantités égales; au moins cela est-il analogue au premier principe de Volta pour le contact entre deux métaux. Or, la longueur du cylindre de zink ($1''. 11'''$) se trouve, dans l'expérience, raccourcie à chaque bout d'environ $1'''$ par l'enduit gras qui servait à attacher les bouts à la paroi intérieure du vase. Donc sa longueur active était de $21'''$. La longueur du fil de cuivre hors du zink ($24\frac{1}{2}'''$) était raccourcie aussi d'environ $1'''$ par l'enduit gras qui devait empêcher la pénétration du liquide dans la vis. Donc sa longueur active était de $23\frac{1}{2}'''$. Le diamètre du cylindre de zink est $2\frac{1}{2}'''$, celui du cuivre $\frac{3}{4}'''$. Donc le rapport des surfaces actives peut être représenté à très peu près par les nombres 52 et 20. Ainsi l'effet total se trouverait diminué de 0,384 ou $\frac{10}{26}$. Ainsi il ne nous reste que $\frac{16}{26}$ de l'effet que produit le zink seul.

Mais dans le principe de Volta, le contact d'un corps quelconque avec un autre hétérogène donne à celui-ci l'électricité négative, s'il a la positive, et *vice versâ* *). Or, dans la théorie du contact, le zink a $+E$; il ne peut donc donner que $-E$ au liquide, et comme l'action de contact du cuivre est annulée par la prépondérance du zink, il n'y a aucune raison que la décomposition d'un seul atome de l'acétate se fasse sur la surface du fil de cuivre, elle devrait se faire entièrement sur celle du zink; ce qui est contraire à l'expérience. Si les voltaïstes admettent, comme nous, que le zink est le métal négatif, ils expliqueront le phénomène, mais détruiront leur théorie de fond en comble.

*) Je ne me souviens pas précisément que les voltaïstes aient exprimé clairement ce principe pour le contact entre un métal et un liquide. Mais ils doivent l'admettre. Car si le métal donnait au fluide la même E qu'il a, il ne serait plus que conducteur, et non créateur ou distributeur, ou excitateur; ce qui détruirait la soi-disante action de contact.

Ainsi la théorie de contact n'explique d'aucune manière le phénomène de notre première expérience.

Qu'il me soit parmis d'ajouter relativement au contact des métaux avec les liquides, que l'effet de ce contact est encore une énigme pour les voltaïstes mêmes, quoiqu'ils aient fait plusieurs efforts pour en trouver le mot. Leurs expériences offrent des différences, des contradictions même, si frappantes qu'il leur a été impossible de statuer clairement aucun principe à cet égard. Ils avouent eux-mêmes que les changements qui arrivent aux métaux et aux liquides pendant l'action ont une grande influence sur cette action. Or, les principaux changements sont des oxidations ou désoxidations et des solutions ou dissolutions. Aussi un grand nombre des physiciens, qui adhèrent encore à l'hypothèse de Volta, ne sont plus que des demi-voltaïstes, en ce qu'ils accordent une partie du développement des électricités à l'oxidation du métal. Ils n'ont pas encore réussi à prouver directement l'existence de l'action électrique par le contact pur et simple du liquide avec le métal. M. De la Rive par contre a prouvé par des expériences irréfutables que ce contact n'opère qu'une difficulté de transmission des E; ce qui est une partie du principe général que j'avais établi bien des années auparavant pour l'électricité, la chaleur, la lumière et le son — que la translation d'une action au travers de substances hétérogènes ralentit la vitesse ou diminue la quantité de cette action.

Passons à présent à notre seconde expérience, où l'étain a remplacé le zink. L'expérience a duré 8 jours ou 11520 minutes, et il est très probable que, si je l'eusse fait durer autant de mois que de jours, le résultat eût été le même. Mais tenons nous en au temps réel de l'observation, et supposons qu'au bout de ce temps nous eussions observé les premiers signes de végétation, que nous avons observés dans la première expérience, au bout de 5 minutes à compter de la fin de l'emplissage, et ajoutons 1 minute pour le temps qui s'est écoulé du moment où le liquide a atteint la hauteur de l'axe du cylindre jusqu'à la fin de l'emplissage (ce qui est beaucoup trop), nous aurons 6 minutes

pour le temps pendant lequel le liquide a agi dans la première expérience pour produire les premières apparitions du plomb métallique. Ainsi, la proportion des temps d'une expérience à l'autre est de 1920 : 1. D'après les dimensions du cylindre d'étain et du fil de cuivre la proportion des surfaces de contact entre la vis du fil et la surface du cylindre est de $2 \cdot \frac{3}{4} : 23\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = 1 : 36$. Si donc nous divisons 1920 par 36, le quotient $53\frac{2}{3}$ indique que, au bout des 8 jours nous aurions dû avoir un effet ou une masse de plomb réduit $53\frac{2}{3}$ fois plus grande que celle qui a paru dans notre expérience au bout de 6 minutes d'action. Je n'insiste pas sur ce que, l'intensité de l'action augmentant de moment en moment *), le chiffre $53\frac{2}{3}$ doit être supposé bien plus grand. L'on objectera sans doute que l'étain en contact avec le cuivre est un moindre excitateur que le zink. Mais voudra-t-on assurer que ce soit dans la proportion de $53\frac{2}{3} : 1$? L'étain n'est pas le dernier terme de la série des excitateurs du zink au cuivre, mais il se trouve dans l'intérieur de cette série. En outre, j'ai déjà dit que j'ai obtenu les mêmes résultats lorsque je fixais un fil de toute sorte de métal, nommément un d'étain, à la place d'un de cuivre. Cela serait-il possible dans la théorie du contact, si l'étain avait un pouvoir excitatif 53 fois moindre que le zink?

Ainsi la nullité d'effet dans notre seconde expérience prouve que le contact de deux métaux hétérogènes ne peut pas avoir produit les effets de la première expérience.

Si l'on voulait attribuer ces effets, non au contact des métaux, mais du zink avec le liquide, nous aurions le même calcul, et il faudrait admettre que l'activité de l'étain est, non $53\frac{2}{3}$ fois plus petit que celui du zink, mais $53\frac{2}{3} \cdot \frac{26}{16} = 87$ fois.

Ainsi la seconde expérience démontre que la théorie de contact ne peut nullement expliquer ou rendre raison de notre seconde expérience.

---

*) Voir mes principes de la marche spontanée des substances chimiques dans mon Grundriss der theoretischen Physik, II Band, p. 1049 et suiv.

IIIe expérience

Elle fut préparée sur les mêmes dimensions, avec les mêmes métaux et avec des liquides identiques à ceux qui avaient servi dans la I^e expérience. La seule différence était que j'avais couvert le zink d'un enduit de cire à cacheter. Le fil de cuivre resta à nu.

Pendant plus de 48 heures ni moi, ni mon aide, ne pûmes découvrir la moindre trace de végétation soit à l'oeil nu, soit à la loupe. Ce ne fut qu'après environ 60 heures que nous découvrîmes à la loupe les premiers points brillants sur le fil de cuivre. Mais ayant exploré l'enduit de cire nous trouvâmes une petite surface irrégulière d'environ $\frac{1}{2}$ ligne carrée où la cire avait été détachée du métal que nous trouvâmes couvert d'oxide noirâtre. Cette séparation s'explique en admettant qu'originairement il était resté un point imperceptible de la surface du zink non recouvert et que le liquide avait pénétré jusqu'au métal. L'effet d'une si petite surface oxidée ne pouvait de long-temps se trahir par une désoxidation d'acétate. Il eût fallu peut-être dix ou vingt jours. Mais pendant les 60 heures l'oxidation du zink s'étendit sous l'enduit et repoussa la cire jusqu'à ce que la surface du métal dépouillée fut assez considérable pour produire les premiers vestiges de végétation.

L'explication de ce fait n'est pas une hypothèse gratuite; je prouve dans mon mémoire, sur les végétations métalliques, qui paraîtra bientôt que le moiré métallique doit son existence à la même cause.

Je renouvelai sur le champ l'expérience après avoir recouvert la petite surface mise à nu avec de la cire à cacheter et tout le cylindre avec une couche de vernis, pour boucher tous les petits défauts semblables au précédent. Je fis durer la nouvelle expérience 3 jours, sans qu'il se montrât le moindre vestige de végétation, et je me crus en droit d'admettre que lorsque le cylindre de zink est parfaitement couvert d'un enduit qui intercepte toute action de l'acétate, il ne se forme aucune végétation.

IVe expérience.

Je conservai l'appareil comme il était dans l'expérience précédente, mais je dépouillai au moyen d'une très petite lime une petite surface du cylindre de zink de ses enduits, de sorte que la surface à nu avait 1''' de longueur et $\frac{2}{3}$''' de largeur.

Son emplacement était au milieu de la longueur du cylindre et sur un de ses côtés. J'observai les effets suivants, à compter du moment où la lime avait cessé son travail.

Après 5 minutes, on découvrit les premiers vestiges de végétation sur le fil de cuivre. Ce qui prouve d'abord que la mise à nu fortuite du zink dans la 3e expérience a dû être extrêmement lente, puisqu'il lui a fallu 720 fois plus de temps pour produire le même effet. Le zink ne s'était pas seulement oxidé, mais il s'était établi en outre de petits mamelons de mousse noirâtre qui s'étendaient hors de la surface mise à nu jusqu'à 1''' à gauche et 4''' à droite; ce qui indique que les enduits avaient été minés par l'acétate

Après 26 heures, la végétation sur le fil de cuivre était bien plus sensible, mais ne formait pas encore des feuilles bien distinctes. Le zink à nu continuait à se couvrir de mamelons de mousse qui tombaient de temps en temps au fond du vase.

Après 48 heures, les paillettes commençaient à prendre décidément la forme de feuilles et étaient couvertes en partie de la mousse noire tombante.

Le lendemain (20 mars) j'élargis la surface nue du zink de sorte qu'elle obtint 3''' de longueur et 1''' de largeur.

Après 26 heures (à dater de cet élargissement), la végétation sur le fil de cuivre avait considérablement augmenté; elle offrait des feuilles dentelées dont les plus longues (vers la pointe du fil de cuivre) avaient $1\frac{1}{2}$''' de longueur. A sa partie supérieure elle était couverte de mousse grossière et foncée.

Les jours suivants, la végétation augmente de sorte que le 26 mars (ainsi 6 jours après l'élargissement de la surface à nu) tout le fil de cuivre était couvert de feuilles qui avaient jusqu'à 3''' de longueur, et portait à son extrémité un groupe à part de $4\frac{1}{2}$''' de diamètre suspendu à un fil de plomb extrêmement délié entouré de très petites feuilles à demi transparentes.

Ce procès n'offrant ainsi rien de nouveau que de jolis groupes de feuilles métalliques, je le terminai le même jour.

En faisant abstraction des particularités qu'offrent ces deux dernières expériences, elles livrent évidemment le fait général que lorsque le zink est couvert d'un enduit qui interdit toute oxidation de sa surface, la végétation, et par

conséquent le procès électrique qui l'opère d'ailleurs, est nulle, mais qu'une très petite surface exposée à l'oxidation établit ce double procès à des degrés très sensibles.

La théorie chimique de l'électricité explique le fait en question par son simple énoncé : L'électricité ne pouvant naître que de l'oxidation du zink, dès que cette oxidation est impossible, l'électricité et la végétation le sont de même.

La théorie de contact peut alléguer qu'il n'existe aucun contact entre le zink et le liquide.

Mais il existe un contact entre les deux métaux et un second entre le fil de cuivre et le liquide. Voyons, dans la théorie de Volta, quel doit être l'effet de ces deux contacts.

Le contact des deux métaux donne au zink $+E$ et au cuivre $-E$, et le contact du cuivre avec le liquide donne à celui-ci $+E$. Ainsi nous avons pour résultat $-E$ sur le fil de cuivre, et $+E$ dans le liquide. Donc l'acétate placé au conflit de ces deux E devrait se décomposer et déposer son plomb sur le fil de cuivre; mais cela n'a pas lieu. Donc la théorie de contact ne peut pas expliquer le phénomène.

Les partisans de cette théorie objecteront peut-être que le contact entre le cuivre et le liquide produit des E trop faibles comparativement à celles que produit le contact des métaux, et que par conséquent la $+E$ du liquide doit être considérée comme nulle ; ce qui fait qu'il n'existe proprement que la $-E$ sur le cuivre, qui seule ne peut pas décomposer l'acétate.

Je réponds à cela que Volta, en statuant le principe que l'E qui résulte du contact entre un métal et un liquide est beaucoup plus faible que celle qui résulte du contact de deux métaux hétérogènes, n'entendait et ne pouvait entendre que l'action dynamique, puisque alors il ne connaissait pas encore l'effet chimique des E. Depuis nous savons, surtout par les expériences de M. Faraday, que l'action chimique est en raison des surfaces, et que l'action dynamique n'a d'effet chimique qu'en raison de la portion d'E qu'elle apporte dans le

procès pendant un certain temps. Or les voltaïstes n'ont pas encore prouvé que l'action chimique du contact entre un métal et un liquide suive la loi de l'action dynamique.

Mais nous avons encore une considération à faire, la comparaison de la surface de contact des deux métaux avec celle du contact du métal et du liquide. Elles sont en raison des longueurs du fil de cuivre qui entre dans le zink et celle qui est en dehors, et l'on a vu plus haut que la première est $2'''$ et la seconde $23\frac{1}{2}'''$. D'où il suit que celle-ci est presque 12 fois aussi grande que celle-là. Soit donc en géneral $\frac{1}{n}$ l'action du contact du cuivre avec le liquide, celle du contact des deux métaux étant prise pour l'unité, cette action sera ici $\frac{12}{n}$ de l'action du contact des deux métaux. Mais nous avons vu, dans la IV[e] expérience, qu'une surface de $\frac{2}{3}$ ligne carrée du zink, mise à nu, a livré en 5 minutes les premières traces visibles de végétation sur le fil de cuivre. Par contre, lorsque le cylindre de zink était entièrement couvert, 3 jours, ou 4320 minutes, n'ont pas suffi pour produire cet effet. Il faudrait donc que l'action du contact du cuivre et du fluide n'égalât pas $\frac{1}{10368}$ de l'action de l'oxidation de $\frac{2}{3}'''$ de zink dans la théorie chimique ou du contact de cette surface métallique avec le liquide. Qui voudra croire cela, si l'action du contact entre un métal et un liquide existe réellement ?

Si l'on considère notre II[e] expérience, l'on se demande avec raison pourquoi le contact du liquide avec l'étain ne produit aucun effet. L'étain ne serait-il, dans l'hypotèse voltaïque, susceptible d'aucune réaction sur le fluide ou sur le cuivre. Serait-il par hasard un poison pour l'électricité ?

Au reste, comme les notions des voltaïstes sur le contact des liquides avec des corps solides ne sont encore nullement éclaircies, nous voulons considérer uniquement le contact du zink avec le cuivre, et nous trouverons qu'en effet le fil de cuivre seul a $-E$, sans qu'il se trouve vis-à-vis d'elle dans le liquide une $+E$ dont le conflit avec cette $-E$ produirait la décomposition de l'acétate;

ce qui légitimerait l'hypothèse voltaïque contre la IIIe expérience. Pour décider la question, j'ai fait l'expérience suivante.

V^e^ expérience.

J'ai repris le même appareil qui a servi aux expériences III et IV, recouvert la partie mise à nu et vissé dans le cylindre de zink à égale distance du fil de laiton et du bout du cylindre un fil de platine de 6‴ de longueur. Par là j'établis la possibilité de faire passer à l'eau (dans l'hypotsèse de Volta) la $+E$ du zink née par le contact des deux métaux, tandis que la $-E$ du fil de cuivre se trouvait sur ce cuivre. Ainsi les deux E se seraient trouvées en présence comme cela doit être pour produire la désoxidation de l'acétate et la précipitation du plomb en forme métallique sur le fil de cuivre.

Mais 4 jours consécutifs ne suffirent pas pour produire la moindre trace de végétation.

Reprenons l'expérience IV, où un dépouillement du zink de $\frac{2}{3}$ ligne carrée produisit ce commencement de végétation en 5 minutes, et comparons-la à celle-ci, où nous avons une surface de contact égale à celle d'un cylindre de 2‴ de hauteur et de $\frac{3}{4}$‴ de diamètre $= 2,36$‴ carrées, c'est-à-dire 3,55 fois plus grande que celle de la surface de zink dépouillée de l'expérience IV. Si nous multiplions ce chiffre par la proportion des temps 5 : 5760 ou 1 : 1152, il se trouvera que l'action supposée de contact des métaux ne serait pas $\frac{1}{4000}$ de celle de l'oxidation à surfaces égales. Voudra-t-on encore baser les phénomènes électriques sur une pareille action?

Ainsi cette expérience prouve de nouveau que l'hypotèse de Volta n'est nullement fondée.

Enfin le voltaïste peut se retrancher encore sur ce que le contact du fil de cuivre avec le zink a lieu dans l'intérieur de celui-ci; ce qui n'est point favorable à la production des *E*, Coulomb ayant prouvé que les *E* ne s'étendent pas à l'intérieur, mais seulement à la surface des métaux. Je veux écarter les doutes qui existent encore contre cette loi de Coulomb; je ne veux pas objecter

que les E pourraient être développées à l'intérieur et se répandre à l'extérieur; mais j'accepte l'objection dans toute son étendue, et j'y réponds par les expériences suivantes :

VIe expérience.

J'ai pris deux plaques, l'une de zink et l'autre de cuivre, de longueurs et de largeurs égales. La longueur était aptée au diamètre de l'instrument d'affinité et la largeur égale à la circonférence du cylindre de zink qui avait servi aux expériences précédentes, $= 7{,}85'''$. Elles avaient été ajustées l'une sur l'autre avec de l'émeril à l'eau, de sorte qu'elles se touchaient si parfaitement que leurs lignes de jonction n'étaient guère visibles que par la différence de couleur. Je les ai vissées fortement l'une sur l'autre avec des vis de cuivre, de sorte que le contact était aussi parfait que possible, après quoi je couvris les lignes de jonction avec du lut gras, pour empêcher toute introduction de liquide entre les plaques. La plaque de zink portait à son milieu un fil de platine de $\frac{1}{2}'''$ de diamètre et vissé perpendiculairement à la plaque à $2'''$ de profondeur. Les surfaces de contact étaient donc à l'extérieur de chaque plaque comme dans les piles de Volta les plus parfaites. J'ajustai ce couple de plaques voltaïques dans l'instrument de sorte que le cuivre était en haut et le zink en bas avec son fil de platine qui se trouvait dans la direction de l'axe du vase de l'instrument d'affinité. Cela étant fait, je chargeai l'appareil avec de la solution d'acétate de plomb délayée avec 30 fois son volume d'eau. La couche d'eau pure avait $1''$ de hauteur, de sorte que la *limite* se trouvait à $4'''$ de distance au-dessous de la surface extérieure du zink.

A dater du moment où l'emplissage était terminé:

Au bout de 4 minutes l'on voyait déjà des points brillants sur le fil de platine, au moyen de la loupe.

Au bout de 28 minutes c'étaient déjà des paillettes très sensibles à la vue simple et en très grand nombre.

Après $6\frac{3}{4}$ heures, les paillettes étaient devenues des feuilles dentelées, dont les plus grandes avaient $3'''$ de longueur et se trouvaient dans une touffe à $4\frac{1}{2}'''$ de la plaque de zink et étaient surmontées d'un petit cône de fine mousse. A la pointe inférieure du fil de platine, les feuilles avaient généralement $1\frac{1}{2}'''$ de longueur. Entre

ces deux extrêmes de position, elles n'avaient qu'une ligne. Au haut elles sont toutes inclinées d'environ 40° sous l'horizon; de là jusques en bas, elles sont horizontales; seulement les inférieures sont inclinées comme les supérieures.

La plaque de cuivre était couverte d'une très fine poudre blanche.

Le lendemain matin à VI. 12. c.-à-d. $17\frac{1}{4}$ heures après l'emplissage, la végétation avait beaucoup augmenté. Elle partait du même point qu'auparavant, (à $4\frac{1}{2}'''$ du zink) et le cône de mousse s'était un peu agrandi vers le bas, de sorte qu'il couvrait une petite partie des feuilles. La végétation entière avait une forme conique qu'on peut comparer à celle d'un pin croissant isolément.

Les feuilles de plomb ressemblaient en effet aux branches et rameaux de pins vus à quelque distance. Le tronc (le fil de platine) était hérissé des mêmes petites feuilles du jour précédent et qui n'avaient pas grandi; mais au bout inférieur elles avaient grandi jusqu'à $3'''$ de longueur, formant une touffe horizontale, terminée en bas par quelques feuilles verticales, touffe qui représentait fort bien une racine. Jamais on ne vit une si jolie miniature, d'autant plus que la partie supérieure de l'arbre était couverte d'une mousse très fine demi transparente.

Le zink est garni à ses bords de fine mousse légère de $1\frac{1}{4}'''$ de hauteur, d'où partent de nombreuses petites houppes délicates de $3\frac{1}{2}'''$ de hauteur et qui tombent de temps en temps au fond du vase. Le reste de la surface est garni d'une mousse plus courte et moins fine.

Le cuivre est à sa surface légèrement tacheté de violet.

Après $40\frac{1}{2}$ heures, la végétation (l'arbre) avait pris de grands accroissements en diamètre et en hauteur; elle dépassait sensiblement la pointe du fil de platine, la mousse disséminée sur les branches supérieures a gagné en extension et est moins fine qu'hier.

Les taches *sur le cuivre* sont très marquantes, et couvrent la majeure partie de sa surface en figures irrégulières d'inégale largeur et ayant deux côtés parallèles entre eux et la longueur de la plaque. C'est un oxide noir de cuivre au travers duquel perce la couleur rouge du cuivre.

Après 64 heures, je trouvai tout au matin toute la végétation tombée au fond du vase et il s'était formé depuis une guirlande de mousse extrêmement fine qui descendait du fil de platine à la végétation tombée, et faisait en quelque sorte une

continuation du fil de platine. Curieux de voir une nouvelle végétation se former sous ces circonstances, je nettoyai avec un pinceau le fil de platine de tout ce qui y tenait encore. En effet, il se forma une végétation de forme nouvelle que je n'avais pas encore vue, malgré les nombreuses expériences que j'ai faites dans l'espace de plus de 20 années. Je la mentionnerai dans mon mémoire sur les végétations métalliques; mais comme cela ne tient aucunement au but de celui-ci, je la passe à présent sous silence.

VIIe expérience.

Pendant l'expérience précédente, 21½ heures après l'emplissage, j'avais placé horizontelement sur deux fils de soie, précisément au milieu de la hauteur du liquide qui se trouve au-dessus de la plaque de cuivre et en direction parallèle à la longueur de cette plaque, un bâton de zink de 1‴ de diamètre et de 22‴ de longueur, dans le dessein d'apprendre s'il se trouvait de l'acétate de plomb dans cette couche supérieure du liquide, ou si tout l'acétate était décomposé avant d'arriver au-dessus des plaques.

Vingt heures après, la surface du cylindre offrait sur toute sa longueur des signes certains d'oxidation. Après 43 heures, le cylindre était déjà très oxidé et le lendemain, environ au bout de 3 jours, il avait à chacun de ses côtés un petit rideau de fine mousse de plomb.

Il suit de cette expérience, que les végétations produites dans toutes nos expériences précédentes ne décomposent pas tout l'acétate de leur région, mais qu'il en monte une petite partie dans les plus hautes, qui, si elle n'y trouve pas de substance oxidable, doit redescendre dans les régions inférieures lorsque celles-ci sont épuisées jusqu'au degré de saturation de la supérieure.

Pour savoir à point nommé si l'acétate de plomb oxide le cuivre sans l'influence d'un autre métal, je plaçai dans une petite cuvette de verre un fil de cuivre suspendu sur deux fils de soie, et je remplis la cuvette avec de la même solution d'acétate qui avait servi dans la VIe expérience (1 vol. d'acétate concentré et 30 vol. d'eau distillée). Vingt-quatre heures après le cuivre était couvert d'une pellicule noirâtre qui a augmenté continuellement en épaisseur pendant plusieurs jours. Or,

comme l'acide acétique pur oxide le cuivre, il s'ensuit que l'oxide, produit dans cette expérience, est un mélange d'oxide de cuivre et d'oxide de plomb.

Il est donc certain que la pellicule d'oxide noir produite dans la VIe expérience sur la plaque de cuivre suppose une oxidation de cette plaque due à l'acétate de plomb qui se trouvait en contact avec elle. Ce phénomène me paraît surprenant, puisqu'il paraît en contradiction avec les expériences de Davy concernant la protection que le zink accorde au cuivre dans l'eau de mer, d'autant plus que dans notre expérience VI la surface du zink est égale à celle du cuivre. Je me contente de signaler ici ce phénomène, ce sujet étant étranger à celui de ce mémoire. *)

VIIIe expérience.

Le même appareil de la VI expérience a été employé; avec cette différence que le zink était en haut, le cuivre en bas et le fil de platine vissé au cuivre, à une profondeur de 1'''. L'instrument fut chargé d'acétate précisément comme pour la VIe expérience.

Le résultat a été analogue ou même égal au précédent; seulement les effets ont été retardés. L'apparition des premiers points de plomb luisant sur le fil de platine n'a eu lieu qu'environ 30 minutes après l'emplissage. L'arbre formé dans l'expérience VI en 18 heures n'a eu ici son égal que 3 jours après l'emplissage. Cette rétardation a deux causes; l'une est que le fil de platine recevait la — *E* du zink non immédiatement, mais médiatement par le contact de la surface du cuivre avec celle du zink. L'autre est que la surface extérieure du zink, celle dont l'oxidation produit le phénomène, se trouve ici $5\frac{3}{4}'''$ plus élevée, c.-à-d. plus éloignée de la *limite* qui est la source où les couches d'eau puisent leur acétate. Ainsi, la distance qui, dans l'expérience précédente, était 4''', se trouve dans celle-ci presque doublée.

---

*) On pourrait peut-être expliquer ce phénomène en admettant que les deux *E* produites par l'oxidation de la plaque de zink sont employées à décomposer l'acétate sur le fil de métal et qu'il n'en reste pas, ou extrêmement peu, pour protéger le cuivre.

La *plaque de cuivre* a été plus fortement attaquée que dans l'expérience VI; ce qui se conçoit par les deux circonstances alléguées.

Considérons à présent les phénomènes des deux expériences VI et VIII sous le point de vue de chacune des deux théories.

Selon la théorie chimique, où le contact de deux substances hétérogènes, comme tel, n'a aucun effet que de ralentir la marche des *E*, les phénomènes s'expliquent avec la plus grande facilité. Dans l'expérience VI, le zink a $-E$ qui se communique immédiatement au fil de platine. La $+E$, également dégagée du zink par l'oxidation, passe immédiatement dans le liquide pour se réunir à $-E$ sur le fil de platine et y décomposer l'acétate précisément comme dans les expériences précédentes où nous n'avions qu'un cylindre de zink.

Dans l'expérience VIII, la $-E$ du zink passe par le cuivre et de là dans le fil de platine; la $+E$ du zink se répand immédiatement dans le liquide et y rencontre la $-E$ sur le fil de platine où la décomposition de l'acétate s'opère.

Ainsi, dans l'expérience VI, le cuivre est un statiste inutile qui n'a d'autre effet que de couvrir une surface du zink (la supérieure) et de la séparer de l'acétate qui l'oxiderait comme l'inférieure et doublerait l'effet. Dans l'expérience VIII, il a en outre, comme métal hétérogène, celui de ralentir la marche de la $-E$ du zink vers le fil de platine, et de forcer une partie de cette $-E$ de rester sur le zink, où elle neutralise une égale portion de $+E$; ce qui produit en partie le ralentissement des effets sur le fil de platine.

Selon la théorie de contact (où nous devons ne considérer que l'action excitante des deux métaux, celle des métaux avec le liquide étant dans cette théorie insignifiante, comparée avec l'autre) le résultat de l'expérience VIII s'explique parfaitement. La $-E$ du cuivre passe immédiatement au fil de platine, et la $+E$ du zink dans le liquide, et la décomposition de l'acétate a lieu, comme dans la théorie chimique.

Par contre, l'effet de l'expérience VI est inexplicable. La $+E$ du zink doit passer immédiatement au fil de platine, et la $-E$ du cuivre dans le liquide.

Ainsi ce serait sur la surface de la plaque de cuivre que la végétation du plomb devrait avoir lieu ; ce qui est directement contraire à ce qui a eu lieu dans cette expérience.

Si l'on voulait objecter que le fil de platine n'agit pas ici comme conducteur, mais comme excitateur et renverse la marche des *E*, devenant par là négatif *), je rappellerai aux voltaïstes que, comme dans toutes nos expériences il est question d'un produit chimique, et non d'une action dynamique, il faut, de l'avis de tous les physiciens des deux partis, avoir égard à la proportion des surfaces actives, de plus grandes surfaces produisant de plus grands effets que des petites. Or la surface de contact de la part des plaques est 180,55''' carrées, et celles du fil de platine avec la plaque de zink = 3,14''' carrées, ainsi dans le rapport de 57,5 : 1. Or comment supposer qu'un effet 1 puisse détruire un effet 57,5 ? Mais il y a plus. Pour produire l'effet contraire, il faudrait en outre une seconde cause. Ainsi il faudrait que le contact du platine avec le zink fut 115 fois plus grand qu'une cause de même surface résidente dans le contact du cuivre avec le zink. Au contraire ; les voltaïstes eux-mêmes considèrent la différence d'excitation dans ces deux cas comme presque nulle.

IX[e] expérience.

Elle est en tout semblable à la VI[e], avec cette seule différence que les plaques de cuivre et de zink étaient entièrement couvertes d'un enduit gras composé de térébenthine, de cire et de suif. Le fil de platine était resté nu.

---

*) M. Pfaff m'a fait cette objection dans le nouveau dictionnaire de physique de Gehler, en citant mes anciennes expériences avec le double condensateur. Mais il a trop d'esprit pour qu'il ait cru qu'il m'embarrasserait réellement par là. Ce n'est qu'un de ces tours des hommes de parti (M. Pfaff se nommait alors publiquement *l'apôtre* de la théorie de Volta) qui n'en imposent qu'à ceux qui comptent les objections sans les peser.

Une heure après, il ne s'était rien manifesté sur le fil de platine.

16 heures après l'emplissage, on vit à la loupe quelques points blancs (non luisants) sur le fil de platine.

Ce n'est qu'après 40 heures que ces points blancs apparurent à la loupe comme de très fines paillettes. En même temps mon aide découvrit à un bout de la plaque de zink une petite tache où l'enduit n'avait pas pris.

A 64 heures, depuis l'emplissage, les paillettes avaient un peu grossi, mais si peu qu'on ne pouvait encore leur assigner aucune figure proprement dite de feuilles.

Cette expérience suffit déjà pour prouver que lorsque les deux métaux n'offrent aucune surface à l'oxidation, mais une grande au contact, il ne résulte point de décomposition de l'acétate ; car le peu qui s'en est manifesté peut être considéré comme nul, et est justifié par le défaut d'enduit. Il suffit, pour s'en assurer, de comparer ces résultats avec ceux de l'expérience VI, où après $40\frac{1}{2}$ l'on avait un arbre tout formé qui dépassait la longueur du fil de platine, tandis qu'ici, à peu près dans le même temps, l'on n'avait encore que de très petites paillettes brillantes, qui avaient déjà paru au bout de 4 minutes dans l'expérience VI.

Cependant, pour ne laisser aucun doute, j'ai renouvelé l'expérience après avoir réparé le défaut d'enduit. Après 8 jours consécutifs, et observant deux fois par jour, je n'ai pu observer aucune trace de plomb métallique sur le fil de platine.

Dans cette IXe expérience, nous avions, comme dans les expériences VI et VIII, les surfaces de contact entre le zink et le cuivre hors de l'intérieur de ces plaques, comme dans la pile originaire de Volta. Donc l'objection citée à la fin de la Ve expérience est réfutée.

Enfin le voltaïste pourrait objecter contre cette dernière expérience que la plaque de cuivre peut à la vérité transmettre sa $-E$ au fil de platine, mais que la $+E$ du zink, arrêtée par l'enduit qui couvre les deux plaques, ne peut

pas passer dans l'eau pour arriver au fil de platine et y opérer la décomposition de l'acétate, mais est forcée de neutraliser la $-E$ du cuivre; ce qui réduit tout le phénomène électrique à zéro.

Je pourrais répondre que, l'enduit étant un isolateur très imparfait (c'est pour cette raison que j'ai pris un enduit gras et non de la cire à cacheter) il devait passer une petite partie de la $+E$ du zink (si le contact en avait produit) dans l'eau, tandis que la majeure partie, neutralisant une égale partie de la $-E$ du cuivre, y laisserait un reste égal à la portion de la $+E$ qui aurait traversé l'enduit; de sorte que l'on aurait eu la condition nécessaire pour la décomposition de l'acétate, une petite quantité de $-E$ sur le fil de platine et une égale quantité de $+E$ dans le liquide. Or, comme au bout de 8 jours il n'a pas paru le moindre vestige de végétation sur le fil de platine, et par conséquent moins qu'il n'en a paru dans l'expérience VI en 4 minutes, il faudrait que l'enduit n'eut pas laissé passer $\frac{1}{2880}$ de l'électricité produite par le contact; car la proportion des temps est 1 : 2880. Mais pour ne laisser aucun doute sur ce point j'ai fait l'expérience suivante :

Je pris l'appareil de la VIII expérience, c'est-à-dire les plaques de cuivre et de zink, la première en bas et déjà armée d'un fil de platine et je vissai au zink un fil de platine recourbé qui descendait parallèlement au premier et jusqu'à même profondeur. Les deux plaques furent parfaitement couvertes d'enduit gras et l'instrument chargé comme dans les expériences précédentes.

Au bout de 7 jours on ne put découvrir, même à la loupe, pas le moindre vestige de plomb métallique à aucun des deux fils de platine.

Nous avions, dans cette expérience, un contact parfait entre les plaques de cuivre et de zink, et à chacune d'elles un conducteur métallique en contact également parfait. Or, comme dans la théorie de Volta les E se développent par une impulsion réciproque d'un métal à l'autre, il est clair que le fil métallique du cuivre aurait dû se charger de la $-E$ qui se développe sur le cuivre, et le fil métallique du zink se charger de la $+E$ du zink, qui se trouvant en con-

tact avec le liquide, devait se répandre dans celui-ci et rencontrer la $-E$ sur le fil de platine et y décomposer l'acétate. L'expérience a prouvé que cela n'a pas lieu *).

Le résultat général et unanime de toutes les expériences que nous avons décrites est que la théorie de contact est une hypothèse destituée de tout fondement et contraire aux phénomènes les plus évidens, les plus palpables, et que la théorie chimique explique logiquement tous les phénomènes de la pile ou de ses éléments sans aucune supposition gratuite.

Volta par contre fonde son hypothèse sur une supposition contraire au lois naturelles pour expliquer comment deux corps hétérogènes qui, séparés l'un de l'autre, se trouvent en équilibre électrique entre eux et tous les autres corps environnants, rompent leur équilibre dès qu'ils viennent à se toucher. La dynamique, que Volta reconnaît seule dans le phénomène électrique, se prononce directement contre son hypothèse; car deux forces en équilibre, augmentées ou diminuées de deux autres également en équilibre, conservent l'équilibre. Ce principe se confirme dans la théorie de la chaleur. L'eau, par exemple, contient environ 30 fois plus de calorique latent que le mercure de même masse et à la même température. Si on mêle deux portions égales ou inégales de ces deux substances, la température ne change pas. L'électricité d'un corps à l'état que nous nommons 0 E est l'analogue du calorique latent. L'électricité d'un corps à l'état où il décèle $+E$ ou $-E$ à des degrés quelconques est l'analogue de la

*) J'ai fait autrefois des expériences de ce genre avec d'autres sels métalliques susceptibles de cette espèce de réduction; mais j'ai préféré la solution d'acétate de plomb pour mon but actuel, parce que c'est celle qui livre les résultats les plus sensibles à raison de leur étendue et de la facilité de prolonger les expériences presque à volonté. J'ai en outre fait des expériences avec des cylindres de zink armés de deux et de trois fils de même métal ou de métaux différents et obtenu constamment des résultats analogues. Je m'abstiens de les décrire, parce qu'ils ne prouvent rien qui ne soit dûment prouvé par un seul fil.

température. Cette double analogie cadre surtout dans l'hypothèse de Franklin que Volta avait adoptée.

Si la théorie de contact est erronée, l'on ne peut plus supposer des métaux positifs ou négatifs dans le sens voltaïque.

Par là, l'électro-chimie tombe. Les métaux ne sont plus les excitateurs de l'électricité de la pile ; l'élément de la pile n'est plus la réunion de deux métaux hétérogènes en contact, mais un métal et un liquide capable de l'oxider ; les affinités ne sont plus le produit de l'électricité, mais l'électricité le produit des affinités.

L'électro-chimie a en outre reçu en naissant un principe de mort, en ce que son auteur n'a jamais pu expliquer pourquoi deux substances, combinées entre elles par l'action électrique, ne se séparent pas dès le moment que cette action cesse. Il existe donc une cause qui les retient en combinaison, et cette cause, c'est l'affinité que l'auteur de l'électro-chimie ne veut pas reconnaître. Il appartenait à notre siècle qu'un des plus célèbres chimistes de nos jours reniât la chimie.

M. Berzélius renouvellera peut-être à cette occasion les injures dont sa colère m'a assailli dans le X[e] volume de son rapport annuel, parce que j'avais annoncé en 1830 la mort de l'électro-chimie. Cependant il paraît ne plus douter de cette mort prochaine et veut consoler d'avance les physiciens et les chimistes de cette funeste perte, en leur offrant une nouvelle fille de son imagination, la force catalytique, nouveau produit du contact, contact chimique. Mais cette cadette survivra-t-elle au cataclysme qui a détruit le trône du contact électrique ? Je me permets d'en douter.

NOTE. (voir p. 495).

Cette expression commode n'est pas dans le sens de ma théorie, selon laquelle l'eau est un faible conducteur des deux *E* qui, par conséquent, agissent l'une sur l'autre par voie de distribution, comme de plus hauts degrès d'*E* agissent au travers d'une couche d'air et s'accumulent aux extrémités de leurs conducteurs.

Dans ma théorie, la + *E* dégage à la surface du métal sur lequel elle est accumulée l'oxigène de l'eau en contact avec ce métal, et la — *E* dégage à la surface du métal sur lequel elle est accumulée l'hydrogène de l'eau en contact avec ce métal.

L'oxidation du zink, effet de l'affinité chimique du liquide avec ce métal, produit l'oxide de zink, et l'oxigène naissant recompose l'acide qui résout l'oxide et produit le sel, tandis que l'hydrogène naissant décompose ce sel que l'affinité physique amène petit à petit au fil de cuivre par la marche spontanée des substances dissoutes dans le liquide *).

Si les physiciens avaient accordé plus d'attention à cette marche que j'ai décrite en détail dans ma Physique allemande il y a 25 ans, ils n'auraient pas attribué à la — *E* et à la + *E* des transpositions immédiates de substances pondérables, transpositions qui n'ont pas même pu expliquer la décomposition de l'eau par la pile voltaïque. La décomposition des acides se fait comme celle de l'eau, et celle des sels s'opère par l'eau suroxigénée et surhydrogénée qui résultent de la décomposition de l'eau, et dont j'ai fait voir l'existence dans ce procès déjà en 1801.

*) Le phénomène de l'endosmose, auquel M. Dutrochet a donné un nom, je l'ai traité en 1802 (dans ma dissertation allemande sur l'influence de la physique et de la chimie dans la science médicale) sans hypothèse, par la simple combinaison des principes de l'adhésion et de la marche spontanée des substances chimiques, théorie que j'ai déjà appliquée alors à la physiologie animale par des expériences directes sur des substances organiques, nommément sur l'urine au travers d'une vessie, et sur le blanc d'oeuf au travers de la pellicule qui le renferme.

О

ПРИЛОЖЕНІИ АНАЛИЗА ВѢРОЯТНОСТЕЙ

КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЮ ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Разсужденіе II[е].

(съ чертежемъ.)

В. БУНЯКОВСКАГО.

(Читано 30 Іюня 1837 г.)

Въ первомъ Разсужденіи подъ этимъ самымъ заглавіемъ *) показано было, какимъ образомъ опредѣленіе вѣроятности встрѣчи тонкаго цилиндра съ сторонами соприкосновенныхъ между собою равностороннихъ треугольниковъ, начерченныхъ на плоскости, ведетъ къ приближенной величинѣ отношенія окружности къ діаметру. Предлагаемъ теперь рѣшеніе трехъ новыхъ вопросовъ, относящихся къ тому же способу. Первая задача приведетъ насъ тѣмъ же путемъ къ опредѣленію дуги посредствомъ ея синуса; вторая къ эллиптическимъ функціямъ 1[го] и 2[го] рода; наконецъ, третья, сверхъ поиме-

---

*) См. выше стр. 457.

нованныхъ функцій, вводитъ въ выраженіе вѣроятности функцію логариѳмическую.

Пусть будетъ кругъ *AQBR* (черт. 1), и положимъ что бросаютъ на удачу тонкій цилиндръ такъ, что середина его не выходитъ изъ площади круга. Очевидно, что длина цилиндра предполагается менѣе діаметра даннаго круга. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что цилиндръ, падая какъ сказано, пересѣчетъ окружность *AQBR*?

Для рѣшенія этого вопроса надлежитъ изъ каждой внутренней точки круга *AQBR*, принимаемой за центръ цилиндра, радіусомъ равнымъ полу-длинѣ цилиндра, описать дугу; эта дуга пересѣчетъ вообще окружность *AQBR* въ двухъ точкахъ; соединяя каждую изъ нихъ съ центромъ цилиндра, получимъ извѣстный уголъ, который означимъ чрезъ 2φ. Отношеніе угла 2φ къ цѣлой окружности 2π изобразитъ отношеніе числа случаевъ встрѣчи, къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ, и слѣдовательно будетъ мѣрою вѣроятности встрѣчи цилиндра съ окружностію *AQBR* въ томъ предположеніи, что середина цилиндра падаетъ именно въ ту точку, которую разсматриваемъ. Потомъ, посредствомъ правилъ Интегральнаго Исчисленія, отъ вѣроятности, относящейся къ одной точкѣ или элементу площади круга, переходимъ къ вѣроятности, соотвѣтствующей полной площади, какъ то было объяснено въ 1омъ Разсужденіи.

Займемся теперь подробностями рѣшаемой нами задачи: разложимъ сперва кругъ *AQBR* на три фигуры, на два вѣнчика, означенные: первый, буквою ω, а второй, буквою $\tilde{\omega}$, и на внутренній кругъ Ω, двумя концентрическими окружностями, описанными изъ центра *C* даннаго круга; радіусы *CE* и *CD* сихъ концентрическихъ окружностей опредѣляемъ слѣдующимъ образомъ: въ кругѣ *AQBR*, перпендикулярно къ діаметру *AB*, вмѣщаемъ длину *IK* даннаго цилиндра; пересѣченіе

линіи IK съ AB опредѣлитъ точку E, и слѣдовательно длину радіуса CE. Для опредѣленія радіуса CD откладываемъ по BA, отъ точки B, пол-длины цилиндра, то есть линію EI; оконечность этой линіи опредѣлитъ точку D. При такомъ разложеніи первоначальнаго круга, легко усмотрѣть 1°, что пока середина цилиндра будетъ падать внутри круга Ω, то встрѣча самаго цилиндра съ окружностію $AQBR$ невозможна; 2° когда центръ цилиндра находится внутри вѣнчика ϖ, то цилиндръ можетъ встрѣтить данную окружность; 3° когда центръ цилиндра будетъ падать внутри вѣнчика ω, то непремѣнно произойдетъ встрѣча при всякомъ положеніи цилиндра.

На семъ основаніи, приступимъ къ опредѣленію вѣроятности встрѣчи цилиндра съ окружностію. Пусть $2l = IK$ длина цилиндра, $r = CB$ радіусъ круга $AQBR$; очевидно будетъ: $CD = r - l$, $CE = \sqrt{r^2 - l^2}$. Изобразимъ чрезъ z искомую вѣроятность, а чрезъ n число случаевъ встрѣчи цилиндра съ кругомъ, когда его середина будетъ падать внутри вѣнчика ϖ; очевидно получимъ

$$(1) \qquad z = \frac{n + \pi l^2 . 2\pi}{\pi r^2 . 2\pi} = \frac{n + 2\pi^2 l^2}{2\pi^2 r^2},$$

ибо для круга Ω не будетъ случаевъ встрѣчи; что касается до вѣнчика ω, то число всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ вмѣстѣ и числомъ встрѣчъ, слѣдовательно сіе послѣднее равно площади πl^2 вѣнчика, помноженной на 2π. Знаменатель $2\pi^2 r^2$ изображаетъ площадь даннаго круга, помноженную на цѣлую окружность 2π, то есть, число всѣхъ возможныхъ случаевъ, представляющихся при бросаніи цилиндра наудачу, предполагая однакожъ, что середина его не выходитъ изъ площади даннаго круга.

И такъ, вопросъ приводится теперь къ опредѣленію величины n. Для этого, возьмемъ, гдѣ ни есть внутри вѣнчика ϖ, площадку μ, образуемую двумя смежными радіусами Cm, Cn и двумя безконечно

близкими концентрическими дугами; μ изобразитъ элементъ площади этого вѣнчика. Пусть будетъ ϱ разстояніе элемента μ отъ центра C, а θ уголъ BCm; получимъ $\mu = \varrho d\varrho d\theta$. Если, для удобности, перенесемъ площадку μ на линію CB въ P, такъ что $CP = \varrho$, а изъ точки P радіусомъ l, равнымъ полу-длинѣ цилиндра, опишемъ дугу, то она пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ M и N; уголъ MPN будетъ тотъ, въ пространствѣ котораго происходитъ встрѣча цилиндра съ окружностію въ предположеніи, что центръ цилиндра находится въ P; изобразимъ чрезъ 2φ этотъ уголъ. Если элементъ $\varrho d\varrho d\theta$ помножимъ на 2φ и потомъ возьмемъ интегралъ этого произведенія отъ $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$, и отъ $\varrho = CD = r - l$ до $\varrho = CE = \sqrt{r^2 - l^2}$, то получимъ величину n; и такъ

$$n = 2\int_0^{2\pi} \int_{r-l}^{\sqrt{r^2-l^2}} \varphi \varrho d\varrho d\theta.$$

Замѣтимъ, что θ не зависитъ ни отъ φ, ни отъ ϱ; слѣдовательно

$$n = 4\pi \int_{r-l}^{\sqrt{r^2-l^2}} \varphi \varrho d\varrho.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ

$$\int \varphi \varrho d\varrho = \frac{\varrho^2 \varphi}{2} - \tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\varphi,$$

и какъ сверхъ того при $\varrho = r - l$ будетъ $\varphi = 0$, а при $\varrho = \sqrt{r^2 - l^2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то и получимъ

$$\int_{r-l}^{\sqrt{r^2-l^2}} \varphi \varrho d\varrho = \frac{r^2 - l^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\varphi,$$

откуда

(2.) $$n = (r^2 - l^2)\pi^2 - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\varphi.$$

Но изъ треугольника CMP получаемъ уравненіе

$$r^2 = \varrho^2 + l^2 + 2l\varrho \, Cos\,\varphi,$$

изъ котораго выводимъ

$$\varrho^2 = r^2 - l^2 - 2l\varrho \, Cos\,\varphi$$

$$\varrho = -l\,Cos\,\varphi + \sqrt{r^2 - l^2 Sin^2\varphi};$$

слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - l^2)\,d\varphi + 2l^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\varphi \, . \, d\varphi - 2l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - l^2 Sin^2\varphi} \, . \, Cos\,\varphi\, d\varphi.$$

Но такъ какъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - l^2)\,d\varphi = (r^2 - l^2)\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\varphi \, . \, d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - l^2 Sin^2\varphi} \, . \, Cos\,\varphi \, . \, d\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{2} + \frac{r^2}{2l}\, arc\,Sin\left(\frac{l}{r}\right),$$

то и найдемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\varphi = (r^2 - l^2)\,\frac{\pi}{2} + l^2 \, . \, \frac{\pi}{2} - l\sqrt{r^2 - l^2} - r^2 \, . \, arc\,Sin\left(\frac{l}{r}\right).$$

Подставляя эту послѣднюю величину въ формулу (2), получимъ

$$n = \pi\left[\,2l\sqrt{r^2 - l^2} - l^2\pi + 2r^2 \, . \, arc\,Sin\left(\frac{l}{r}\right)\right],$$

и слѣдовательно, въ силу уравненія (1),

(3) $$z = \frac{\pi l^2 + 2l\sqrt{r^2 - l^2} + 2r^2 \, . \, arc\,Sin\left(\frac{l}{r}\right)}{2\pi r^2}.$$

Вотъ выраженіе вѣроятности, что цилиндръ, брошенный наудачу внутри круга, упадетъ на его окужность; это выраженіе, сверхъ числа π, заключаетъ въ себѣ дугу, коей синусъ равенъ отношенію длины цилиндра къ діаметру круга, то есть, дугу *BI*.

Вторая задача, которой предложимъ здѣсь рѣшеніе, состоитъ въ слѣдующемъ: Дана неопредѣленной величины дуга QBR (черт. 2), описанная изъ центра C, и могущая вмѣстить въ себѣ бросаемый на ея плоскость цилиндръ. Чрезъ середину B этой дуги и центръ C проведена прямая BA. Точка A можетъ находиться по ту или по другую сторону центра C; положимъ что она лежитъ съ лѣвой стороны, какъ изображено на чертежѣ. Вообразимъ что центръ цилиндра ходитъ свободно по линіи AB, а самый цилиндръ, въ то же время, свободно обращается около своего центра въ плоскости дуги QBR. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что сообщивъ цилиндру упомянутыя два движенія, независимо одно отъ другаго, онъ, остановясь, пересѣчетъ данную дугу QBR?

Пусть радіусъ $CB = r$, пол-длина цилиндра $PM = l$, $AC = a$. Если, какъ въ предыдущей задачѣ, вмѣстимъ цилиндръ IK, перпендикулярно къ CB, въ дугѣ QBR, то опредѣлимъ точку E; очевидно, что пока центръ цилиндра будетъ находиться на линіи EB, то, при всѣхъ своихъ положеніяхъ, цилиндръ необходимо встрѣтитъ данную дугу между точками I и K. Потомъ, отъ точки B откладываемъ по направленію BA пол-длины цилиндра, и опредѣляемъ такимъ образомъ точку D; на протяженіи ED встрѣча цилиндра съ дугою будетъ возможна; изобразимъ чрезъ n число случаевъ, при которыхъ произойдетъ эта встрѣча. Наконецъ, очевидно, что цилиндръ, описывая центромъ своимъ линію AB, ни въ какомъ положеніи не можетъ встрѣтить дуги QBR. И такъ, изобразивъ чрезъ z искомую вѣроятность, и замѣтивъ что $AB = a + r$, $EB = r - \sqrt{r^2 - l^2}$, получимъ

$$(4) \qquad z = \frac{n + 2\pi(r - \sqrt{r^2 - l^2})}{2\pi(a + r)}.$$

Чтобы найти n, беремъ на линіи DE какую ни есть точку, напримѣръ P; изобразимъ чрезъ ϱ перемѣнное разстояніе точки P отъ A, такъ что $AP = \varrho$; элементъ этой линіи будетъ $d\varrho$. Изъ точки P, радіусомъ полу-цилиндра l, пересѣкаемъ данную дугу въ точкахъ M и N; пусть будетъ φ уголъ BPM, и слѣдовательно 2φ уголъ MPN; $2\varphi d\varrho$ изобразитъ элементъ величины n. Интегрируя это выраженіе отъ $\varrho = AD = a + r - l$ до $\varrho = AE = a + \sqrt{r^2 - l^2}$, найдемъ величину n. И такъ

$$n = 2\int_{a+r-l}^{a+\sqrt{r^2-l^2}} \varphi\, d\varrho.$$

Но

$$\int \varphi\, d\varrho = \varphi\varrho - \int \varrho\, d\varphi,$$

и какъ сверхъ того при $\varrho = a + r - l$ будетъ $\varphi = 0$, а при $\varrho = a + \sqrt{r^2 - l^2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то и найется

$$n = \pi(a + \sqrt{r^2 - l^2}) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho\, d\varphi.$$

Для исключенія величины ϱ замѣчаемъ, что въ треугольникѣ CMP имѣемъ

$$r^2 = (\varrho - a)^2 + l^2 + 2l(\varrho - a)\,Cos\,\varphi,$$

откуда

$$\varrho = a - l\,Cos\varphi + \sqrt{r^2 - l^2 Sin^2\varphi};$$

слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho\, d\varphi = a\,.\frac{\pi}{2} - l + r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} Sin^2\varphi}\;.\;d\varphi.$$

И такъ

$$n = \pi(a + \sqrt{r^2 - l^2}) - a\pi + 2l - 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} Sin^2\varphi}\;.\;d\varphi.$$

Подставляя эту величину въ формулу (4), получимъ

$$(5) \qquad z = \frac{2\pi r + 2l - \pi\sqrt{r^2 - l^2} - 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}Sin^2\varphi}\,.\,d\varphi}{2\pi(a + r)}.$$

Изъ этого выраженія вѣроятности мы видимъ, что рѣшенный вопросъ приводитъ насъ къ интегралу $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}Sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$, который, какъ извѣстно, относится къ эллиптическимъ функціямъ 1го и 2го рода.

Если бы дуга QBR была опредѣленной величины, напримѣръ равнялась бы aBb (черт. 3), и цилиндръ не могъ бы вмѣститься въ нее, то въ такомъ случаѣ надлежало бы поступить слѣдующимъ образомъ: такъ какъ мы предполагаемъ, что радіусъ CB раздѣляетъ дугу aBb пополамъ, то соединивъ прямою точки a и b, линія aeb будетъ менѣе длины цилиндра. Слѣдовательно, пока центръ цилиндра будетъ находиться на линіи eB, то цилиндръ, во всякомъ своемъ положеніи, будетъ встрѣчать дугу aBb. Если изъ точки a или b, радіусомъ равнымъ полу-длинѣ цилиндра l, пересѣчемъ линію CB дугою, то опредѣлимъ точку D', и, на всемъ протяженіи линіи $D'e$, уголъ, въ пространствѣ котораго будетъ происходить встрѣча, опредѣлится прямыми, проведенными изъ a и b къ центру цилиндра; напримѣръ, когда центръ цилиндра находится въ P', то уголъ, о которомъ говоримъ, будетъ $aP'b$. Пусть этотъ уголъ $aP'b = 2\varphi'$. Наконецъ, отложивъ отъ точки B, по линіи BA, длину полу-цилиндра l, опредѣлимъ точку D, и при нахожденіи центра цилиндра на линіи DD', вычисленіе останется то же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Пусть будетъ n число случаевъ, при которыхъ происходитъ встрѣча, когда центръ цилиндра описываетъ прямую DD'; m то же, относительно прямой $D'e$; для eB это число очевидно равно

произведенію $\overline{eB} \times 2\pi$. Сверхъ того, положимъ $AP = \varrho$, $D'P' = x$, $\overline{ae} = h$, $\overline{CB} = r$, $\overline{DB} = \overline{aD'} = l$, $\overline{AC} = a$; найдется $\overline{AD} = a + r - l$, $\overline{AD'} = a + \sqrt{r^2 - h^2} - \sqrt{l^2 - h^2}$, $\overline{D'e} = \sqrt{l^2 - h^2}$, $\overline{eB} = r - \sqrt{r^2 - h^2}$. Изобразивъ, какъ и прежде, чрезъ z искомую вѣроятность, получимъ

$$z = \frac{n + m + 2\pi(r - \sqrt{r^2 - h^2})}{2\pi(a + r)}. \tag{6}$$

Изъ сказаннаго выше, легко видѣть что

$$n = 2\int_{a+r-l}^{a+\sqrt{r^2-h^2}-\sqrt{l^2-h^2}} \varphi\, d\varrho,$$

$$m = 2\int_0^{\sqrt{l^2-h^2}} \varphi'\, dx,$$

или

$$n = 2\varphi\varrho - 2\int \varrho\, d\varphi$$
$$m = 2\varphi' x - 2\int x\, d\varphi,$$

наблюдая притомъ что предѣлы относительно φ будутъ $\varphi = 0$ и $\varphi = arc\,Sin\frac{h}{l}$, а въ разсужденіи φ', $\varphi' = arc\,Sin\frac{h}{l}$ и $\varphi' = \frac{\pi}{2}$.

Но изъ треугольниковъ CMP и $aP'e$ выводимъ

$$r^2 = (\varrho - a)^2 + l^2 + 2l(\varrho - a)\,Cos\varphi,$$

$$tang\,\varphi' = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2} - x},$$

или

$$\varrho = a - l\,Cos\varphi + \sqrt{r^2 - l^2\,Sin^2\varphi},$$

$$x = \sqrt{l^2 - h^2} - \frac{h}{tang\,\varphi'};$$

слѣдовательно

$$n = 2(a + \sqrt{r^2 - h^2} - \sqrt{l^2 - h^2})\,arc\,Sin\frac{h}{l} - 2\int_0^{arc\,Sin\frac{h}{l}} (a - l\,Cos\varphi + \sqrt{r^2 - l^2\,Sin^2\varphi})\,d\varphi,$$

$$m = \pi\sqrt{l^2 - h^2} - 2\int_{arc\,Sin\frac{h}{l}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{l^2 - h^2} - \frac{h}{tang\,\varphi'}\right) d\varphi'.$$

Положивъ для краткости

$$\int_0^{arc Sin \frac{h}{l}} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} Sin^2\varphi} \cdot d\varphi = \Delta,$$

получимъ

$$(7) \qquad n = 2(\sqrt{r^2 - h^2} - \sqrt{l^2 - h^2})\, arc Sin \frac{h}{l} + 2h - 2r\,\Delta.$$

Найдя интегралы, опредѣляющіе величину m, получимъ послѣ сокращеній

$$(8) \qquad m = 2\sqrt{l^2 - h^2} \cdot arc Sin \frac{h}{l} - 2h \log\left(\frac{h}{l}\right).$$

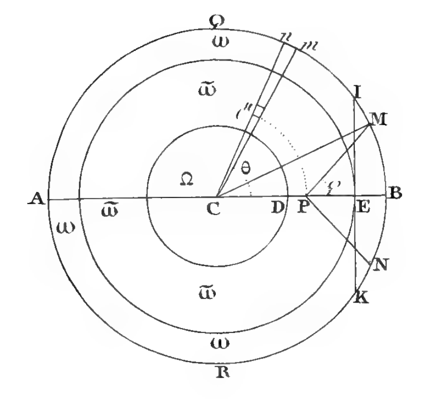
Подставляя наконецъ величины (7) и (8) въ формулу (6), найдемъ окончательно слѣдующее выраженіе для вѣроятности z:

$$(9) \qquad z = \frac{2h + 2\pi(r - \sqrt{r^2 - h^2}) + 2\sqrt{r^2 - h^2} \cdot arc Sin \frac{h}{l} - 2r\,\Delta - 2h \cdot \log\left(\frac{h}{l}\right)}{2\pi(a + r)},$$

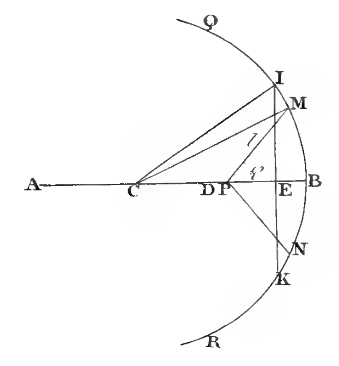
которое обратится въ (5), когда положимъ $h = l$.

И такъ мы видимъ, что послѣдній вопросъ приводитъ насъ къ выраженію, заключающему въ себѣ, сверхъ функцій круговыхъ и эллиптическихъ, еще и логариѳмическую $\log\left(\frac{h}{l}\right)$. Разнообразя задачи, мы получили бы другія формулы съ различными трансцендентными числами; производя потомъ значительное число испытаній, требуемыхъ условіями рѣшаемой задачи, и сосчитавъ, какъ число встрѣчъ цилиндра съ периметромъ разсматриваемой фигуры, такъ и число всѣхъ испытаній, опредѣлимъ отношеніе сихъ двухъ чиселъ. Уравнивъ это отношеніе найденному выраженію вѣроятности, получимъ уравненіе, изъ котораго, въ слѣдствіе извѣстной теоремы *Якова Бернулли*, можно будетъ вывести приближенную величину трансцендентнаго числа, входящаго въ выраженіе вѣроятности, какъ то было объяснено въ 1омъ Разсужденіи.

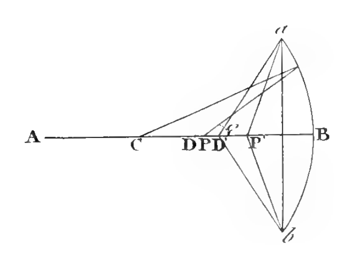
Черт. 1.



Черт. 2.



Черт. 3.



MÉMOIRE
SUR
QUELQUES PRODUITS PYROGÉNÉS,

PAR

M. H. HESS.

(Lu le 25 décember 1837.)

---

3. PRÉPARATION DE L'EUPION.

En tâchant de préparer de l'eupion, j'avais observé différents faits dont j'ai rendu compte dans un mémoire précédent (v. page 389). De l'huile de chenevis exposée à l'action d'une forte chaleur avait donné, entre autres produits, de l'aldehyde. Le produit huileux, distillé de nouveau à plusieurs reprises seul, puis avec de l'eau, et traité enfin par l'hydrate de potasse, m'avait fourni en définitive un liquide incolore et fort volatil, dont une portion distillait avant que le point d'ébullition du liquide eût atteint + 45°, le liquide entrait en ébullition par la chaleur de la main; il contenait du carbone et de l'hydrogène dans le rapport d'un atome à deux. Une autre portion du liquide, qui avait distillé entre + 45° et 75°, n'était composée que de carbone et d'hydrogène, et cela dans le même rapport (p. 395). Le point d'ébullition de ces liquides n'étant point

constant, ils ne pouvaient pas être considérés comme purs; ils se comportaient sous ce rapport, absolument comme le naphte. Ces liquides ne pouvaient pas être pris pour de l'eupion, puisqu'ils se comportaient d'une manière différente sous plusieurs rapports. Il devait néanmoins paraître singulier que l'eupion pût se trouver en présence de ces liquides, si faciles à obtenir, sans que j'en aie aperçu trace, malgré un travail soigné.

La différence entre les résultats que j'avais obtenus et ceux de Mr. Reichenbach pouvait dépendre: 1°) de l'emploi d'une huile différente, 2°) de l'emploi d'une température différente, 3°) d'une autre manière de traiter les produits obtenus.

Le premier point paraît en effet fort essentiel. Mr. Reichenbach s'était servi d'huile de navette, provenant d'une plante de la famille des crucifères (de *Brassica napus*), tandis que je m'étais servi d'huile de chenevis, provenant d'une plante de la famille des urticées, (*Cannabis sativa*). Il était donc fort possible que, dans les deux cas, on obtînt des produits essentiellement différents. Pour éclairer mes doutes à ce sujet, je décomposai, absolument de la même manière, de l'huile de chenevis, de l'huile d'olive et de l'huile de colza (provenant de *Brassica campestris*). J'obtins, dans les trois cas, des produits absolument semblables, et que je ne pouvais distinguer qu'au moyen des étiquettes dont les flacons étaient munis. Je renonçai donc à faire l'expérience avec l'huile de navette qui, chez nous, ne se trouve point dans le commerce, et que je n'aurais pu me procurer sans des frais considérables.

Quant au second point, c'est-à-dire à la température, elle devait nécessairement exercer une grande influence sur les résultats. Il est certain que les substances organiques peuvent être décomposées par l'effet de la chaleur, de manière à donner des produits qui, à une température plus élevée, se trouvent de nouveau décomposés en fournissant de nouveaux produits. Ces décompositions successives peuvent se réitérer, de manière à ce que l'on obtienne à la fin les

mêmes produits, quoiqu'en soumettant à l'expérience des substances d'origines fort différentes. Ces produits définitifs, supposés indépendants, quant à leur composition, de la constitution des substances primitives, on ne peut attribuer d'autre cause à leur composition, qu'une affinité particulière, qui tend à réunir les éléments dans certains rapports. Quant au carbone et à l'hydrogène qui se combinent dans le rapport d'un atome à deux, cela pourrait avoir lieu en vertu de la même cause qui détermine les éléments de l'eau à se combiner dans le même rapport.

Quoi qu'il en soit, nous savons que Mr. Reichenbach distillait à une forte chaleur, aussi vite que cela lui était possible, et que pendant tout le cours de l'opération, il se dégageait une grande quantité de gaz inflammables. Cette indication donne un moyen assez précis pour s'assurer des limites de température que l'on doit obtenir. Mais, comme j'avais trouvé antérieurement que l'huile distillée à une très forte chaleur donnait un produit volatil essentiellement actif, envers l'acide sulfurique, et que c'est justement une des propriétés les plus marquantes de l'eupion de ne point exercer d'action sur cet acide, je tâchai d'opérer à la température la plus basse qui fût compatible avec le but proposé.

Or, ceci devient impossible en opérant dans des cornues; car le point d'ébullition du liquide monte graduellement à mesure que la distillation avance. On ne peut se tromper là-dessus qu'en travaillant sans thermomètre.

Un canon de fusil, comme je m'en étais préalablement servi, pouvait trop facilement s'échauffer d'une manière inégale; il fournissait en outre une trop petite quantité de produits. Pour ne pas me trouver dans des conditions par trop désavantageuses sous ce rapport, je fis confectionner un cylindre en fonte de $3\frac{1}{2}$ pieds de long, sur quatre pouces de diamètre intérieur. Les deux bouts sont fermés par des couvercles munis de tubulures par leur milieu, et bien boulonnées. Les deux tubulures se trouvant dans la direction de l'axe du cylindre, on a l'avantage, en supposant celui-ci dans une position horizontale, que

l'huile versée par un bout, ne peut s'écouler par l'autre qu'après avoir rempli le cylindre jusqu'à la moitié de son diamètre. Cet arrangement permet d'entretenir un degré de chaleur presque constant; car, outre la faculté de régler le tirage, on peut augmenter ou faire baisser la température à volonté, en faisant arriver plus ou moins d'huile. Les gaz produits, les vapeurs et une partie de l'huile qui se trouve dans le cylindre s'échappent à la fois par l'un de ses orifices. Si l'on échauffe le cylindre de manière à ce qu'il ne s'échappe qu'une petite quantité de gaz inflammable au bout de l'appareil, on trouve constamment que l'huile a encore en grande partie conservé son odeur, et qu'elle sent très peu l'acide lampique. On ajuste un coude en cuivre bien torrodé à l'émeri, sur la tubulure par laquelle s'échappent les produits. La branche verticale de ce coude est fermée à sa partie supérieure par un écrou, qui est percé pour donner passage à un thermomètre. Le bas de cette branche communique avec l'appareil condensateur. Ne pouvant pas disposer d'un bon thermomètre à mercure qui puisse être placé dans cet appareil, je me servis d'un thermomètre à air qui fut scellé au milieu de l'opération. Le tube, ayant été ensuite ouvert pour l'eau, aspira 1,729^{m} de ce liquide. Toute sa capacité étant de 3,61, cela indiquerait une température de 256°. Cet appareil fut muni d'un condensateur. On laisse s'échauffer jusqu'à 70° l'eau de cet appareil, car sans cette précaution, il se trouve bientôt bouché par l'huile qui se fige. Il déverse le liquide qui le traverse dans un récipient, après quoi les vapeurs traversent un second condensateur refroidi par de la glace: là se dépose un fluide très volatil, enfin les gaz vont se répandre sous le cendrier. On décompose facilement, par ce procédé, 12 livres d'huile par heure. J'en ai employé en tout 160 pour cette expérience. L'huile ainsi décomposée fut distillée de nouveau dans une petite chaudière de cuivre; et on recueillit tous les produits qui se dégagèrent jusqu'à 200°. Le liquide ainsi obtenu avait une odeur fort pénétrante; il fut lavé à l'eau jusqu'à ce qu'il eût en grande partie perdu cette odeur. Distillé ensuite encore une fois dans une cornue en verre, jusqu'à ce que le point d'ébullition fût remonté jusqu'à 140°, la quantité

de liquide volatil obtenue se trouva être 160 onces, c.-à-d. d'une once par livre d'huile employée. Ces 160 onces donnèrent à leur tour 30 onces d'un liquide passant avant 90°, et 24 onces passant avant 140°. Le liquide le plus volatil fut lavé par une dissolution de potasse caustique.

Jusqu'ici, le procédé était absolument le même que j'avais suivi la première fois; aussi le produit obtenu ne différait-il nullement de celui que j'avais obtenu alors. Mais comme Mr. Reichenbach traite ensuite le liquide par l'acide sulfurique, je ne pouvais éviter de suivre la même marche.

Des essais faits sur des échantillons d'huile volatile d'une production antérieure, me prouvèrent qu'il y avait avantage à n'employer d'abord que le bihydrate d'acide sulfurique ($\dot{H}^2 \dddot{S}$). Le liquide ayant été traité par cet acide, on le laisse quelque temps en repos, après quoi il fut décanté et distillé sur une nouvelle portion de cet acide. Le liquide ainsi traité était incolore, supportait le mélange avec $\dot{H}^2 \dddot{S}$ sans se colorer. Ce n'est qu'au bout de 24 heures qu'on voyait une zône bleue se former à la superficie de l'acide, et s'étendre à mesure dans tout le liquide supérieur. Après plusieurs jours le liquide était passé du bleu au violet et ensuite au brun.

Le liquide ayant été mêlé après cela avec de l'acide sulfurique ordinaire ($\dot{H} \bar{\dddot{S}}$), s'échauffait assez fortement pour nécessiter l'emploi de la glace. Quoique le mélange fût soigneusement refroidi, il ne fut pas possible de prévenir le dégagement d'acide sulfureux. Le liquide fut redistillé à plusieurs reprises avec cet acide et les produits fractionnés. On recueillit à part tout ce qui distilla au-dessous de + 45°, puis à part tout ce qui distilla au-dessous de + 75°. La quantité du premier de ces produits ne comportait qu'une once, la quantité du second 2 onces.

Les liquides ainsi obtenus sont très volatils, la chaleur de la main les volatilise, ils sont tout-à-fait incolores et possèdent l'odeur de naphte qui a été traité

par l'acide sulfurique; le liquide n'exerce plus d'action sensible sur eux, du moins au premier abord.

Le second de ces liquides ayant été analysé donna:

I.	—	Acide carbonique	= 0,493	Eau	0, 24
II.	0,325	—	—	= 0,98	—	0,479
III.	0,531	—	—	= 1,6	—	0,772

Ce qui donne sur 100:

	I.	II.	III.
Carbone	83,63	83,37	83,31
Hydrogène	16,35	16,37	16,15
	99,98	99,74	99,46

La portion la plus volatile, qui bouillait au-dessous de + 45°, donna sur

IV.	0,7	Acide carbonique	= 2,0	Eau	= 0,987
V.	0,473	—	—	= 1,378	—	= 0,677.

Ce qui donne sur 100 parties:

	IV.	V.
Carbone	79,00	80,55
Hydrogène	15,66	15,90
Oxigène	5,34	3,55
	100,00	100,00

Le rapport du carbone à l'hydrogène se trouve être pour 100:

	IV.	V.
Carbone	83,46	83,51
Hydrogène	16,54	16,48
	100,00	99,99

J'exécutais antérieurement cette sorte d'analyse d'après la manière usitée par Mr. Mitscherlich; mais comme, quand le liquide est très volatil, on est

obligé d'introduire l'empoule ouverte, et que, par ce procédé, il reste encore à sceller le tube de combustion, l'analyse d'une substance très volatile offre des chances d'erreur par ce procédé. J'essayai d'exécuter l'analyse IV en fermant le bout d'arrière du tube par un liège. Cet expédient peut réussir assez bien, toutefois il y a lieu de supposer une perte dans cette analyse, et il est évident que quand une fois on veut se servir d'un liège, il devient plus expéditif et plus convenable d'opérer d'après les méthodes de Mr. Liebig. C'est ainsi que les analyses II., III. et V. ont été exécutées. Les liquides décrits ci-dessus contenaient donc le carbone et l'hydrogène, comme moyennes de cinq expériences dans le rapport de $C^5 H^{12}$

	moyenne obtenue	calcul.
Carbone	83,46	83,617
Hydrogène	16,38	16,385
	99,84	100,000

Toutefois, je craindrais d'attacher trop d'importance à ce résultat, si je voulais créer un nouveau nom pour ce liquide *).

Par le procédé employé antérieurement, j'avais obtenu des liquides qui contenaient le carbone et l'hydrogène dans le rapport de CH^2. Le liquide qui n'avait pas de point d'ébullition constant n'avait point été mis en contact avec l'acide sulfurique. Traité cette fois par cet acide, le point d'ébullition ne devint point fixe, mais le liquide se trouva être $C^5 H^{12}$. On voit donc par là, que si les combinaisons les moins volatiles de $(C H^2)$ comme la paraffine, le naphte, etc. résistent parfaitement à l'action de l'acide sulfurique, il n'en est pas ainsi pour les produits plus volatils. L'acide abandonne de son oxigène, le liquide volatil perd de son carbone, et l'acide contient en dissolution une substance qui n'a point été examinée. L'action d'autres agents énergiques est tout-à-fait semblable.

---

*) Si quelqu'un retrouve ce liquide avec une composition aussi déterminée, je m'empresserai de lui en communiquer un échantillon afin de pouvoir les comparer.

Le naphte exposé à un courant de chlore se trouve bientôt saturé, de sorte qu'il n'y a que formation de peu d'acide hydrochlorique. Mais en faisant réagir le chlore sur un liquide ($C H^2$) volatil, une grande quantité du chlore se trouve transformée en acide hydrochlorique, tandis qu'une autre se trouve absorbée. On obtient un liquide éthéré plus pesant que l'eau. Le brome est, plus qu'une autre substance, propre à suivre ces expériences, car l'action une fois achevée, la plus petite quantité du brome colore le liquide. Cette coloration ne disparaît pas même après plusieurs semaines pour preuve qu'un surplus de brome n'exerce plus d'action ultérieure. Je n'ai point essayé l'influence que pouvait exercer la lumière.

Dans mon premier mémoire (pag. 297), j'avais obtenu en traitant un liquide par l'acide sulfurique un produit qui avait donné à l'analyse

	I.	II.
Carbone	84,76	83,93
Hydrogène	14,50	14,75
	99,26	98,68

Alors je ne pouvais attribuer ce résultat qu'à une faute, sans toutefois pouvoir en expliquer la cause. On voit maintenant que je ne devais pas obtenir d'autre résultat. Le liquide que je traitais alors contenait du carbure d'hydrogène passif; je devais donc obtenir un mélange de $C H^2$ et $C^5 H^{12}$. Un fait qui mérite encore d'être cité, c'est que quand on traite un liquide contenant du $C H^2$ actif par un peu d'acide sulfurique et qu'on sature celui-ci par de l'hydrate potassique, on obtient par évaporation un sel soyeux parfaitement caractérisé.

Il résulte, comme je crois, des expériences que je viens de citer, que l'eupion n'est point un produit pyrogéné immédiat. Mr. Bonsdorff m'a fourni le moyen de vérifier les conclusions sur une petite quantité d'eupion qu'il tenait de la main de Mr. Reichenbach lui-même. J'ai trouvé ce liquide peu volatil. Il ne bouillait pas encore à 80° C. Il brunissait fortement par l'acide sulfurique,

et donna à l'analyse, sur 0,213 de liquide, 0,605 d'acide carbonique et 0,275 d'hydrogène, c'est-à-dire :

Carbone	78,39
Hydrogène	14,31
Oxigène	7,30
	100,00

Le rapport du carbone à l'hydrogène sur 100

Carbone	84,57
Hydrogène	15,43
	100,00

Je ne crois donc pas me tromper en considérant ce liquide comme un mélange.

ESSAI

SUR LA THÉORIE DE LA POUSSÉE DES TERRES ET DES MURS DE REVÊTEMENT,

PAR

M^r. PARROT.

(Lu le 22. décembre 1837.)

La théorie de la poussée des terres et des murs de revêtement, si importante, soit pour l'art de la fortification royale, soit pour la construction des quais, a subi maintes vicissitudes sous la plume des auteurs qui l'ont traitée. Le but de cet essai est de la ramener à des principes simples mathématiques et physiques, sans aspirer à l'honneur d'avoir fait des découvertes saillantes dans cette partie, où il me semble que l'on s'est trop peu soucié de la physique.

Ier ARTICLE.

De la poussée des terres.

Nous commençons d'abord par considérer le problème dans sa plus grande généralité, sans avoir égard ni à l'adhérence des particules des terres entre elles, ni à leur frottement les unes sur les autres, nous réservant de traiter ces deux objets à part, et de modifier, d'après leurs données, s'il est nécessaire, la formule générale.

Soit (fig. 1.) *TACG* un terrain au talus *AC* qui fait avec l'horizon l'angle $ACG = \alpha$. Soit *BCDE* le mur qui doit retenir le revêtement prismatique dont la base verticale est *ACB*.

Imaginons en *F* un corps pesant *Q* qui incline à glisser le long de *AC*. L'on demande quelle est la force appliquée dans la direction *KF* pour le tenir en équilibre sur *AC*.

La théorie du plan incliné nous dit que, si l'on nomme *P* la force appliquée dans la direction *CF* qui lui fait équilibre, l'on a $P = Q \cdot \sin \alpha$. Si l'on décompose cette force en formant le parallélogramme *FKCI*, *FK* représentera la pression horizontale cherchée que nous nommerons *p*. L'on aura donc $p = P \cdot \cos \alpha$, et partant $p = Q. \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. . . . . **I.**

Si au lieu d'un seul corps isolé placé sur un point quelconque du talus nous prenons tout le prisme de terre représenté par le triangle *ABC*, et dont le poids soit nommé *Q*, le centre de gravité *M* se trouvera au-dessus de *GC* à une hauteur $= \frac{2}{3} BC$ et soit $BC = h$.

L'aire du triangle $ABC = \frac{AB \cdot BC}{2}$. Or $BC : AB = \sin \alpha : \text{cosin}\, \alpha$, et par conséquent $AB = h \cdot \frac{\text{cosin}\, \alpha}{\sin \alpha}$ et l'aire du triangle $= h^2 \cdot \frac{\text{cosin}\, \alpha}{2 \sin \alpha}$. Si *h* est exprimée en pieds et si le pied cube de la terre pèse *n* livres, nous aurons pour le poids d'un pied de la longueur du prisme

$$Q = h^2 \cdot \frac{\text{cosin}\, \alpha}{2 \sin \alpha} \cdot n \text{ et } p = \tfrac{1}{2} h^2 n \cdot \overline{\text{cosin}\, \alpha}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{II.}$$

Le centre de gravité du triangle étant à la hauteur $\frac{2}{3} h$ au-dessus de *GC*, le moment de cette pression latérale sera $\frac{1}{3} h^3 n \cdot \overline{\text{cosin}\, \alpha}^2$ (*) . . . . **III.**

*) D'autres auteurs, ne considérant que la direction *ML* parallèle au talus, regardent le point *L* comme le point d'attaque du mur, dont la hauteur au-dessus de *GD* est $\frac{1}{3} h$. Mais si nous considérons une couche isolée *NUBA* du revêtement, assez forte pour ne pas se déformer par son propre poids, il est clair qu'elle ne peut presser le mur en direction horizontale qu'au point où elle le touche, en *U* et non en *L*. La chose sera encore plus palpable si l'on considère une telle couche isolée qui serait au-dessous du point *L*. La poussée se compose des pressions horizontales de toutes les couches, dont le centre commun d'action est nécessairement à la hauteur du centre de gravité *M*.

Soit x l'épaisseur CD du mur que nous supposons à présent de forme parallélépipédique ; l'aire du parallélogramme $BCDE$ qui représente ce mur sera hx. Soit S le poids d'un pied de la longueur du mur, et m livres le poids d'un pied de la maçonnerie, nous aurons $S = hmx$.

Mais son centre de gravité est à la hauteur $\frac{1}{2}h$ et si le mur doit être renversé, il trébuchera autour du point d'appui D. Ainsi le poids du mur doit être considéré comme suspendu à son centre de gravité O, au bout du levier OD, et la force q avec laquelle il résistera sera à son poids comme OH à $HD = x:h$ et $OH = \frac{1}{2}x$. Donc le moment du poids du mur est $\frac{1}{2}hmx^2$. IV.

En mettant en équation les valeurs III et IV nous obtenons

$$\tfrac{1}{3}h^3 n\,.\,\overline{\cos\text{in}\,\alpha}^2 = \tfrac{1}{2}hmx^2;\ \text{d'où l'on tire}$$

$$x = h\,.\,\text{cosin}\,\alpha\,.\,\sqrt{\frac{2n}{3m}},\ \text{ou}\ x = 0{,}817\ \text{cosin}\,\alpha\,.\,\sqrt{\frac{n}{m}}.\quad .\ .\ .\ \text{V.}$$

Telle est la formule générale. Mais si le prisme ABC doit tomber le long du talus AC, il éprouve une résistance de frottement qui doit être soustraite de son poids. Ordinairement on trouve par la méthode de Bilfinger et Bélidor la mesure du frottement dans l'angle du talus α, et si Q est le poids, le frottement est $Q\,.\,\text{tg}\,\alpha$. Mais cette théorie n'est point applicable ici; car il s'ensuivrait que si α était l'angle de frottement, le prisme ABC se soutiendrait de lui-même par son frottement sur AC (comme se soutient un cube de bois ou de métal sur le plan incliné un peu avant que l'angle atteigne une certaine grandeur) et n'exercerait par conséquent aucune pression latérale, c'est-à-dire que l'on n'aurait pas besoin de mur de revêtement, ce qui est contre l'expérience. Ainsi l'angle du talus ne peut pas être pris pour l'angle qui donne la mesure du frottement.

Cette théorie de Bilfinger et Bélidor n'est applicable qu'aux masses roides qui tendent à glisser sur une autre surface roide, et non à des amas de particules de terre qui n'ont que peu ou point d'adhérence entre elles et dont chacune peut se séparer de sa voisine par l'effet seul de sa pesanteur. Car il

est clair que, si l'on prend sur *AB* un point quelconque *P*, et que l'on tire la droite vers *C*, l'angle *PCG* étant plus grand que l'angle soi disant de frottement *ACG*, le prisme représenté par *PCB* ne sera plus supporté par son frottement sur la couche *PC*, d'autant moins que celle-ci même ne peut pas se supporter entièrement. Si nous faisons reculer le point *P* vers *A*, le même raisonnement nous prouvera que les prismes entre *A* et *P* ne sont pas supportés. Ainsi si l'angle du talus devait être l'angle de frottement, c-à-d. livrer la mesure du frottement qui retient une masse sur un plan incliné, il faudrait que cette masse fût composée de particules qui ne pussent pas se séparer l'une de l'autre par l'effet seul de leur pesanteur, c-à-d. qu'elle fut une masse roide.

On ne peut pas même affirmer en théorie que la cause, qui empêche les particules de terre de s'ébouler au-delà de l'angle du talus, soit proportionnelle aux tangentes de cet angle, parce que l'arrangement des particules de la même terre, je dirais presque leur entrelacement, peut varier et varie en effet par le tassement artificiel, par celui qu'opère le tems et par différents degrés d'humidité.

Ainsi la théorie ne nous offrant aucun moyen de déterminer ce que nous nommons le frottement (et selon quelques uns, l'adhérence) des terres de revêtement, nous croyons devoir proposer de chercher par des expériences directes la force *p* qui, appliquée horizontalement en *N*, hauteur du centre de gravité du prisme *ABC*, fera équilibre à la poussée. Pour cet effet, l'on construira une caisse parallélépipédique comme *TBCG*, dont la face *BC* soit mobile en *C* sur charnières. On pourra donner à cette caisse 10′ de longueur, 7′ de largeur et 7′ de hauteur. Pour une terre très sablonneuse et sèche il faudrait augmenter la longueur.

Pour opérer, l'on commencera par affermir fortement au moyen de vis la face antérieure *BC* (que nous voulons nommer la porte) et l'on remplira la caisse de la même terre qui servira au revêtement, ayant soin qu'elle ait le même degré d'humidité qu'elle a dans son état naturel et surtout pas davan-

tage.(*) On foulera cette terre par couches précisément comme elle sera foulée en grand pour un rempart ou un quai. Cela étant fait, on appliquera un levier coudé, à bras de levier inégaux; le plus court, en position verticale, se partagera en deux branches dont les extrémités s'appuieront contre la porte à la hauteur *N*, et le plus long, en position horizontale, sera chargé d'un poids dont on soit sûr qu'il fera équilibre à la poussée, poids que l'on pourra calculer par la formule III, après avoir cherché l'angle du talus de la manière ordinaire. Ce poids se trouvera trop grand et on le diminuera par conséquent, lui ou son moment, selon l'occurence.

Comme le poids de la porte *BC* se trouvera en-dehors de la charnière ou centre du mouvement, l'on aura soin de lui donner vers le dedans un contrepoids qui équilibre le poids de la porte.

Tout étant ainsi préparé, et la terre tassée dans la caisse, l'on dévissera la porte, de sorte qu'elle soit libre de se mouvoir sur ses charnières et ne soit retenue que par le poids suspendu au levier, que l'on diminuera à présent petit à petit jusqu'à ce que la porte commence à se détacher de la terre, ou plutôt de la caisse et l'on notera le poids qui est resté sur le levier.

Mais on trouvera après le déblaiement de cette surface qu'il est resté de la terre adhérente aux parois verticales et inférieure. On en mesurera soigneusement l'aire verticale, que l'on soustraira de la coupe entière de la caisse. La différence est l'aire de la surface qui a produit une poussée égale au moment du poids resté sur le levier.

Pour trouver l'épaisseur du mur, nous ferons comme auparavant le calcul pour 1 pied de sa longueur. Au moyen de l'expérience décrite on trouvera

---

(*) Bien entendu que cette terre ne soit pas prise d'un marais. Si l'on n'en a pas d'autre, il faudra en remplir une caisse cubique de 10′ en tous sens, élevée de quelques pouces au-dessus de terre pour laisser écouler l'eau. Après 3 mois l'on pourra considérer l'humidité du centre comme celle qu'elle conservera toute l'année derrière le mur de revêtement.

facilement la poussée pour 1 pied carré de la surface du mur, que nous nommons π. La hauteur du mur h étant exprimée en pieds, la poussée sur un pied de longueur sera πh, et si cette poussée avait été appliquée à la moitié de la hauteur (hauteur du centre de gravité du mur) elle serait $\frac{4}{3}\pi h$ . . **VI.**

Soit donc x l'épaisseur cherchée, le poids du mur de 1′ de longueur sera $= hxm$ et la force qu'il opposera à la poussée sera $hxm \cdot \frac{x}{h} = x^2 m$.

En mettant en équation cette valeur avec la précédente VI, nous obtenons $x^2 m = \frac{4}{3}\pi h$ et $x = 2\sqrt{\frac{\pi h}{3m}}$ ou

$$x = 1{,}157 \sqrt{\frac{\pi h}{m}}.$$

Cette méthode expérimentative est si sûre et en même tems si peu couteuse relativement à de grands travaux, qu'elle nous paraît préférable à toute théorie sur la poussée. L'on pourrait même faire mainte expérience instructive avec l'appareil décrit en plaçant le bras de levier qui retient la face mobile de la caisse à diverses hauteurs pour trouver empiriquement, par exemple, si le centre de gravité de la poussée que nous avons placé aux deux tiers de la hauteur est vraiment ce centre.

M. Prony a livré dans sa *Nouvelle Architecture hydraulique* une théorie très recherchée sur la poussée des terres, à laquelle nous croyons ne pouvoir souscrire.

D'abord ce célèbre géomètre statue (638) une différence entre les terres qui ont été long-tems en repos et ont acquis par là de la cohérence entre leurs particules et celles qui, ayant été fraîchement remuées, ont perdu cette cohérence. Mais ces deux états des terres ne peuvent pas constituer une différence physique spécifique; ils n'indiquent relativement à la cohésion que du plus ou du moins, cohésion qui ne dépend pas uniquement du tems, mais aussi de la charge sous laquelle les terres se trouvent. Une terre non foulée à dessein, mais tassée jusqu'à une certaine hauteur se foule par son propre poids et par

la marche des hommes et des brouettes pendant l'emplissage surtout dans les couches inférieures, et la cohésion qui en résulte ne fait qu'accroître avec le tems. C'est le cas de tous les solides élastiques: un poids considérable courbe à demeure une lame de métal sur le champ, et à la suite davantage; et un poids moindre peut avec le tems la courber au même degré; ce qui indique une élasticité imparfaite. Celles des particules des terres, qui ne sont pas d'une grande dureté, sont dans ce cas; elles se courbent vite sous un grand poids, et lentement sous un petit. Ces courbures (qui peuvent être des redressements, si les particules sont courbes) rapprochent les particules l'une de l'autre et produisent par là une plus grande compactilité. Tel est le vrai point de vue de la chose en admettant la cohésion produite par le tems, celle que M. Prony suppose. Mais cette cohésion existe-t-elle?

Il est difficile d'admettre que les pressions, sous lesquelles les particules d'un prisme de revêtement se trouvent auparavant séparées par des espaces mesurables et pleins d'air atmosphérique qui adhère très fortement à ces particules, se rapprochent au point que leurs distances deviennent plus petites que la distance de cohésion que nos meilleurs microscopes sont bien loin de pouvoir atteindre; ce qui cependant serait nécessaire, s'il devait s'établir une cohésion sensible entre des parties qui, en vertu de leur distance, n'en témoignaient pas. Prenons pour exemple un rempart de 48′ de hauteur, tel que Vauban les a construits à tant de forteresses de la France. La pression d'une telle masse de terre sur sa couche inférieure correspond à peu près à 3 pressions atmosphériques. Ainsi les particules d'air entresemées dans la masse de terre doivent être réduites à $\frac{1}{3}$ de leur volume précédent, sensible à la vue simple ou au moins à la loupe. Le tems, ou plutôt le défaut d'élasticité parfaite, ne cause qu'une petite augmentation du rapprochement causé d'abord après la pression; car l'expérience apprend qu'une masse de terre ne se tasse avec le tems que d'une très petite portion de sa hauteur. Si donc la pression aidée du tems ne peut pas rapprocher les particules de terre jusqu'en-deçà de la distance de

cohésion, elle n'a fait autre chose qu'augmenter les surfaces de frottement, non augmenté la force de cohésion.

Ces considérations prouvent déjà que, dans le cas en question, nous ne pouvons pas, comme M. Prony (639), distinguer le frottement de la cohésion. Mais quand nous pourrions le faire à priori, cependant il nous sera toujours impossible de le faire quantitativement pour le calcul; ce que M. Prony entreprend cependant au moyen de certaines suppositions, dont l'une est que l'angle du talus d'un terrain ancien est son angle de frottement seul. L'angle du talus n'est que l'angle d'éboulement. Si l'on veut statuer une cohésion factice comme produit de la pression, et distincte du frottement, l'on ne voit pas pourquoi cette cohésion ne concourrait pas à retenir les particules des terres sur la ligne d'éboulement, de même que le frottement; car ce n'est pas dans la terre éboulée ou éboulante, mais dans celle qui reste, qu'on doit chercher la cause du plus ou moins grand angle d'éboulement ou de talus.

M. Prony dit avec raison qu'il y a deux positions de la droite d'éboulement où la poussée devrait être nulle. L'une est la position inclinée où le frottement peut porter la masse, l'autre la position verticale. J'observe d'abord que la position verticale supposerait que la terre (comme dans le pisé) pût former un mur à faces verticales. Ces deux cas n'ont donc proprement qu'une condition, celle que le frottement puisse porter la masse comprise entre les parallèles *GC* et *TB*.

M. Prony conclut (641) de ces prémisses: „Il y a donc une position *G* (le *P* de notre figure I.) entre *B* et *A* qui rend la force horizontale *M* (qui doit contrebalancer la poussée) un maximum, et cette plus grande valeur de *M* est celle de l'effort horizontal que la verticale *BC* a à supporter par la pression du profil des terres qu'elle soutient.“

Tout en admettant le principe certainement vrai qu'une quantité variable qui passe de 0 à 0 doit avoir un maximum entre ces deux extrêmes, j'avoue ne pas comprendre comment ce principe est applicable ici. Car les deux lignes

de talus, désignées par les deux zéros, ne peuvent pas avoir lieu pour la même terre; et si l'on suppose que tout le revêtement est composé de parties à peu près homogènes, le prisme entier ABC glissera simultanément sur la ligne AC ou toute autre d'éboulement, dès que la paroi BC cessera de le soutenir; car pour tout autre point P, entre A et B, la ligne d'éboulement sera parallèle à AC, et nous n'avons à faire pour tous les éléments possibles qu'au même angle d'éboulement α.

J'espère que ces considérations contribueront à justifier la proposition que j'ai faite de déterminer immédiatement par l'expérience la force de la poussée. Passons à d'autres.

M. Prony a déduit de ses formules, pour trouver la valeur de M, une valeur qui doit être applicable aux revêtemens de terre et à la pression de l'eau contre une digue, c'est-à-dire pour tous les degrés de consistance que les terres peuvent avoir depuis la cohésion infinie j'usqu'à la fluidité parfaite. Depuis on a beaucoup parlé de fluides imparfaits. Nous allons examiner s'il existe des fluides imparfaits composés de particules de matière discrètes, comme les terres.

Rappelons nous l'expérience physique suivante: On a une plaque plane de verre ou de métal, bien unie, même polie et fixée dans une position horizontale. Nous plaçons une autre plaque, plus petite et également unie, sur la première. Si nous voulons traîner la supérieure sur l'inférieure, il faudra une certaine force horizontale, et cette force est l'équivalent du frottement, la cohésion (si l'on peut en admettre une ici d'une plaque à l'autre) étant infiniment petite, ou absolument nulle, la couche d'air interposée empêchant vraisemblablement tout contact entre les surfaces des plaques; cas auquel toute la résistance au mouvement ne résiderait que dans l'adhésion des molécules d'air entre elles. Mais dans la supposition qu'il y eut quelques points de contact entre les surfaces des plaques, il serait cependant impossible de séparer la cohésion qui en résulterait de l'effet de l'adhésion de la couche d'air; car si l'on faisait

l'expérience dans le vide de Guerike, l'on n'enlèverait cependant pas cette couche d'air, ce fluide élastique ayant une très forte adhésion aux corps solides.

La présence d'un liquide, comme l'eau ou l'huile, peut seule, par son adhésion supérieure aux solides, forcer l'air d'abandonner la place. Or si l'on fait l'expérience citée en introduisant une très mince couche d'eau entre les plaques, alors la résistance au mouvement est beaucoup plus considérable. Dans une de mes expériences, la plaque mobile avait une surface de 4 pouces carrés. Sèche, elle opposait au mouvement parallèle une résistance d'environ 300 grains, et cette résistance s'élevait à 3500 et même 5000 grains lorsque j'eus introduit entre les plaques une pellicule d'eau plus ou moins épaisse. En augmentant l'épaisseur de cette pellicule je pouvais rabaisser la résistance jusqu'à 300 grains et moins.

Ainsi nous voyons dans cette expérience que l'eau interposée entre les plaques augmente, multiplie la résistance au mouvement, quoiqu'il soit prouvé que l'eau soulève la plaque et par conséquent détruise tout contact immédiat entre les deux surfaces. (*)

Ces expériences si simples prouvent que la présence d'un liquide entre deux corps solides a une très grande influence sur la force nécessaire pour faire glisser des surfaces l'une sur l'autre. Or, comme dans le problème de la poussée des terres les masses de revêtement sont toujours plus ou moins humides, c'est-à-dire plus ou moins imprégnées d'eau, il est clair que cette circonstance doit considérablement influer sur la force de la poussée.

L'idée des fluides imparfaits et la supposition de M. Prony qu'il existe une formule applicable (mutatis mutandis) aux substances solides discrètes et aux liquides jusqu'aux extrêmes de dureté et de fluidité, est-elle admissible

(*) Le phénomène des anneaux colorés pourrait même nous fournir un moyen de mesurer ce soulèvement. Car si l'on a une lentille de 100′ de longueur focale posée sur une surface tout-à-fait plane, et produisant ce phénomène sans autre pression que celle de son poids, et si l'on introduit entre les deux surfaces une zone d'eau, les anneaux colorés se rappetissent et offrent une couleur au centre qui auparavant n'en avait pas.

ou non? La réponse à cette question dépend de savoir si de très petits corps solides, accumulés les uns sur les autres, ont dans la nature de cette agrégation et de leurs mouvements les propriétés des liquides. Je crois devoir me déclarer catégoriquement pour la négative. — Voici mes preuves.

Je présente à cet égard les expériences que j'ai faites, il y a environ 18 ans à Dorpat avec de fin sable bien sec. Je pris un tuyau de fer-blanc de 4″ de diamètre et 20′ de hauteur. J'adaptai à l'un de ses bouts, au supérieur, un entonnoir et à l'autre bout, à l'inférieur, un tuyau coudé de même diamètre et d'environ 1 pied de longueur, faisant un angle droit avec le long tuyau que je plaçai dans la position verticale. L'appareil étant dûment assujetti, je fis remplir de fin sable séché au four le tuyau vertical, sans fermer l'orifice du tuyau latéral. Le sable ayant rempli tout le tuyau vertical et l'entonnoir qui avait environ 6 pouces de hauteur, il ne s'écoula dans le tuyau horizontal que pour y former son talus naturel.

Toute substance tant soit peu liquide, chargée d'une colonne de sa propre masse (par exemple le syrop le plus épais) se serait écoulé dans un tube de quelques lignes de diamètre et de quelques pouces de hauteur avec plus ou moins de vitesse, malgré sa viscosité et son adhérence à la surface intérieure du tube. Mais le sable, qui ne décèle aucune viscosité et aucune adhérence sensible à la paroi du tuyau de 4″ de diamètre, ne coule pas sous une pression de 20′ de hauteur de sa masse.

J'ai substitué au tuyau latéral un coude courbé en quart de cercle, et l'effet fut le même.

J'ai supprimé ces deux tuyaux latéraux et placé sous l'orifice inférieur du grand tuyau vertical tout simplement un petit tas du même sable, dans lequel je fis plonger l'orifice à 3″ au plus de profondeur; puis j'ai fait remplir le tuyau, d'abord très lentement pour ne pas causer une force vive considérable. Le tuyau étant plein et même l'entonnoir, la colonne de sable de $20\frac{1}{2}'$ de hauteur est restée intègre, sans s'écouler, sans écarter le tas de sable sur lequel elle reposait.

Le phénomène des clepsydres de sable n'infère nullement contre ces expériences, parce que le petit trou pratiqué dans le diaphragme n'est pas obstrué par un petit tas de sable.

Ainsi notre troisième expérience prouve qu'un petit tas de sable de 3″ de hauteur fait équilibre à la pression latérale d'une colonne du même sable d'une hauteur 82 fois aussi grande, assurément pas en faisant un contrepoids direct, mais par la résistance que des grains de matière très dure offrent à se mouvoir les uns sur les autres. Mais on ne peut pas supposer que cette résistance provienne d'une adhérence ou cohésion (comme M. Prony la nomme) puisqu'elle est infiniment petite, comparée à nos plus petits poids.

L'on ne peut donc pas comparer un amas de grains secs à un fluide qui serait d'autant moins imparfait, que l'angle α de son talus serait plus grand. J'ai mesuré l'angle du fin sable très sec et l'ai trouvé 34 à 35°, tandis que de la terre de jardin un peu humide s'élève jusqu'à un talus de 45 et même 50°. Mais il y a plus: lorsque, au lieu de ce même sable très sec, je l'ai pris un peu humide, c-à-d. contenant une certaine quantité d'eau, sa mobilité diminua au point que j'ai pu en augmentant petit à petit la quantité d'eau en élever une colonne cylindrique qui s'est soutenue pendant quelques jours, ne se délitant que peu a peu extérieurement par la dessication; et lorsque enfin je la chargeai d'un poid étranger elle se rompit en morceaux, comme une pierre chargée d'un poids capable de l'écraser.

Ainsi, bien loin que le sable se gère comme un liquide imparfait, l'intervention d'un liquide parfait diminue sa soi-disant liquidité, lui donne la propriété d'une masse solide, dont les parties adhèrent assez entre elles pour balancer l'effet de la pesanteur. L'expérience des deux plaques de verre jointes par une couche très mince d'eau explique facilement ce phénomène.

Si ces principes sont vrais pour le sable pur, ils ne le seront pas moins pour un mélange quelconque de sable, d'argile et de matières organiques, tel que la terre labourable, mélange qui gagne en adhérence beaucoup plus que le sable

seul par l'effet de l'eau dont les autres matières sont pénétrées. Mais il y a plus: l'argile et les matières organiques en état de décomposition, telles qu'elles servent à la végétation, composées de molécules beaucoup plus fines que les grains du plus fin sable, s'unissent tellement à l'eau qui les subdivise encore, qu'elles nagent long-tems dans ce fluide, les unes pour toujours. Les autres parties, se précipitant plus ou moins lentement, forment une masse qui, exposée à l'évaporation, gagne une grande solidité. On connaît le pisé qui n'est autre chose qu'une terre meuble contenant un certain degré d'humidité qui fait que les particules rapprochées par l'effet du pilon conservent cette position l'une envers l'autre et s'offrent mutuellement tant de surfaces de frottement qu'elles bravent en cet état l'effort de la pesanteur qui tâche de les faire ébouler. La même terre desséchée ne se piserait pas mieux que le sable, qui ne se pise pas du tout.

Mais ce ne sont pas seulement les expériences citées plus haut sur le sable sec et humide qui prouvent que des tas de petits corps durs ne possèdent aucune fluidité. Le phénomène du clepsydre de sable, comparé à celui de l'écoulement de l'eau par une ouverture pratiquée au fond d'un vase, en fournit une nouvelle preuve tout aussi concluante.

J'ai prouvé il y a déjà 28 ans (*) qu'une masse d'eau complètement en repos dans un vase, avant l'écoulement, conserve pendant tout l'écoulement par un orifice pratiqué au fond du vase, sa surface aussi plane qu'avant l'écoulement, sans éprouver le moindre enfoncement, jusqu'à ce que la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice d'écoulement n'ait plus que $\frac{1}{4}$ du diamètre de cet orifice

(*) V. mon Grundriss der theoretischen Physik I. 1809, p. 388 et suiv. Je suis forcé de me citer parce que ce théorème, le plus important de la théorie de l'écoulement des liquides, soit comme la vraie base du théorème de Torricelli et de celui du resserrement de la veine, soit par ses nombreuses applications directes, paraît n'être pas connu des auteurs sur l'Hydraulique, qui enseignent encore aujourd'hui, comme du tems de Newton, que lorsque l'eau s'écoule d'un vase par un trou pratiqué à son fond, il se forme à la surface du liquide un entonnoir plus ou moins grand qui recrute de cette surface l'eau qui s'écoule et déduisent de cette chute le théorème de Torricelli. Quand cessera-t-on, dans les sciences exactes, d'adhérer à des préjugés faciles à combattre par des expériences extrêmement simples?

+ une ligne du pied de Paris, et que toutes les couches d'eau au-dessus de cette petite hauteur descendent chacune avec le même horizontalisme que la surface. J'ai prouvé en outre qu'il se forme un enfoncement à la surface lorsque l'eau récemment versée dans le vase a encore un mouvement gyratoire quelque petit qu'il soit. Si ce mouvement est considérable l'enfoncement devient un entonnoir, dont la pointe peut s'étendre jusqu'à l'orifice d'écoulement. Alors l'air s'introduit dans la veine d'eau, la boursouffle et lui donne la figure d'une grosse vrille, qui quelques fois crève et répand l'eau de tous côtés.

Observons par contre la chute du sable dans un clepsidre, ou plus simplement dans un vase qui a un trou à sa base. Si l'on ferme le trou pendant l'emplissage et qu'on l'ouvre après, on voit aussitôt se former à la surface (qui a été dûment aplanie) un petit enfoncement qui se change petit-à-petit en un entonnoir qui atteint enfin un maximum de diamètre et de profondeur.

Ainsi il est dûment prouvé par les deux genres d'expériences citées, que le sable et les terres, sèches ou humides, n'ont aucun degré de fluidité, et que par conséquent la poussée des terres et la liquidité n'ont rien de commun et que la première ne peut ni s'expliquer ni se calculer dans les principes de la pression ou du mouvement des liquides.

Même lorsque le sable est plus que saturé d'eau, il n'acquiert pas les propriétés des liquides. Il se précipite d'abord au fond et y forme un agrégat qui, comme l'on sait, livre un excellent fondement à d'importantes bâtisses, parce qu'il ne reste entre ses grains qu'autant d'eau qu'il faut pour les tenir l'un à l'autre avec la même force que décèle la plus mince couche d'eau. Aussi le sable ainsi mouillé offre moins de volume que le sable sec.

L'argile sèche pulvérisée se comporte comme le sable. L'argile un peu humectée forme une pâte qui acquiert encore plus de compactilité que le sable mouillé. Si on lui donne plus d'eau, la pâte s'amollit. Si on augmente l'eau à l'excès la pâte perd toute consistance et l'argile se précipite au fond du vase, laissant sur lui l'excès d'eau qu'il n'a pu retenir. La fluidité qui se montre

avant la précipitation est celle de l'eau et non celle de l'argile. La pâte précipitée est une pâte très molle à la surface, et qui augmente en compacité vers le bas. Elle livre un mauvais fondement.

Le humus se comporte à peu près comme l'argile lorsqu'il est, soit sec, soit simplement humecté. Mais il se dissout en grande partie dans un excès d'eau, et ce qui se précipite n'offre qu'une boue sans consistance. Il en est de même de la tourbe parfaite; seulement elle a un peu plus de consistance sous l'eau à raison du bitume qu'elle contient.

Ces différences entre le sable d'un côté et les terres argileuses et végétales de l'autre proviennent, comme il a été dit plus haut, de l'affinité physique de l'eau pour ces matières, qui fait que l'eau les pénètre et les coagule si elle se trouve en petite quantité, mais les divise en particules infiniment petites si elle s'y trouve en excès, ou seulement assez pour pouvoir exercer plus ou moins la mobilité de ses parties. Il est donc clair que dans toutes ces apparences de fluidité ce ne sont pas l'alumine ou les substances organiques qui sont fluides, mais uniquement l'eau, et que c'est à tort que l'on considère l'éboulement du sable et des terres comme l'effet d'une fluidité imparfaite.

Ainsi, si nous considérons les terrains d'une espèce quelconque en tant qu'ils doivent servir de fondement soit à un mur, soit à une masse de terre, comme par exemple un rempart, l'ingénieur ne doit jamais oublier qu'un terrain composé de sable, d'argile et de humus peut, sous certaines proportions d'humidité, offrir un très bon fondement, mais que ce même terrain peut, sous un changement de circonstances, s'approprier une quantité d'eau qui le prive d'une grande partie de sa compacité.

Si nous considérons les terres de revêtement sous ces différents points de vue, nous nous persuaderons aisément qu'il n'est aucune théorie qui puisse déterminer généralement la force de la poussée des terres au moyen de l'angle d'éboulement, et que l'on ne peut arriver à un résultat sûr que par l'expérience décrite plus haut.

IIe ARTICLE.

Des murs de revêtement.

Les derniers paragraphes de l'article précédent indiquent suffisamment les précautions que l'ingénieur doit prendre relativement au mur qu'il doit élever. Nous avons à considérer les murs de revêtement par rapport à leur forme extérieure *) et aux accidents qui peuvent leur survenir.

Murs trapézoïdes.

Ordinairement on donne au mur de revêtement plus de largeur à la base qu'au sommet. Examinons les avantages et les désavantages de ce mode de construction.

Comparons d'abord les momens de résistance des deux murs de même masse ou de même quantité de matériaux, dont l'un aura ses deux bases égales et l'autre des bases inégales. Soit h la hauteur commune, c l'épaisseur du premier à la base et au sommet, b l'épaisseur du second au sommet et a son épaisseur à la base, de sorte que $\frac{b+a}{2} = c$.

Soit (fig. 2) P un mur parallélépipédique dont le poids est Q. Il a été prouvé plus haut que la force avec laquelle il résiste à son trébuchement est

$$Q \cdot \frac{AC}{BC} = Q \cdot \frac{c}{h} \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Soit (fig. 3) $KFIL$ un mur à bases inégales, de même hauteur et de même poids que le mur à bases égales. Tirons d'abord LF, et cherchons le centre de gravité C' du triangle KLF. Il se trouvera à $\frac{2}{3}h$ de la base FI. De même le centre de gravité C'' du triangle LFI à $\frac{1}{3}h$ au-dessus de la base FI. Tirons

*) M. Nicolas Fuss, ancien secrétaire perpétuel de notre Académie, a livré un excellent mémoire sur cet objet dans les Nova Acta de cette Académie pour les années 1795 et 1796.

$C'C''$ et nous trouverons le centre de gravité C du trapèze entier en partageant cette droite en raison inverse de l'aire des triangles ou des bases KL et FI, de sorte que nous aurons $C''C : C'C = b : a$ et partant $DM : AM + DM = b : a+b$. Mais $AM + DM = \frac{1}{3}h$. Donc $DM = \frac{1}{3}h \cdot \frac{a}{a+b}$. En ajoutant DF nous obtenons pour la hauteur du centre C au-dessus de la base, MF ou $CH = \frac{1}{3}h\,(\frac{a+2b}{a+b})$. Si nous faisons $a = nb$, nous avons $CH = \frac{1}{3}h\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ **II.**

Cherchons à présent la valeur de la droite HI, et pour cet effet la distance CM du centre de gravité à la verticale KF.

La distance $AC' = \frac{1}{3}b$; $C''B = \frac{1}{3}a$; $BD = AC = \frac{1}{3}b$. Or $CN : C''B = AM : AD = C'C : C'C'' = a : a+b$. Donc $CN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{a+b}$. Donc $CM = FH = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{a+b} + b\right)$. Donc nous tirons $HI = a - \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{a+b} + b\right)$, et en faisant $a = nb$, l'on a définitivement $HI = b\left[n - \frac{1}{3}\left(\frac{n^2}{n+1} + 1\right)\right]$ . . . . **III.**

Or la force avec laquelle le mur résiste est $Q \cdot \frac{HI}{CH}$; et en mettant les valeurs II et III pour CH et HI, l'on obtient pour la résistance

$$Q \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{n(n+1) - \frac{1}{3}(n^2+n+1)}{\frac{1}{3}(n+2)} = Q \cdot \frac{b}{h}\left(\frac{3n^2+3n-(n^2+n+1)}{n+2}\right) =$$
$$Q \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{2n^2+2n-1}{n+2}.$$

La formule I. nous a livré pour la résistance du mur d'égale épaisseur $Q \cdot \frac{c}{h} = Q \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{n+1}{2}$. Donc les résistances sont en raison de

$$\frac{n+1}{2} : \frac{2n^2+2n-1}{n+2}.$$

Si l'on fait $n = 3$, le rapport des résistances sera $= 1 : 2{,}30$
Si l'on fait $n = 2$, le rapport des résistances sera $= 1 : 1{,}83$
Si l'on fait $n = 1$, le rapport des résistances sera $= 1 : 1{,}00$.

Mais ces rapports des résistances supposeraient que le point d'attaque se trouvât de part et d'autres en C (fig. 1 et 3); or il a été prouvé plus haut qu'il se trouve à $\frac{2}{3}h$ au-dessus des bases inférieures. Donc pour avoir les rapports des moments, il faut multiplier les deux membres du rapport des résistances chacun par sa hauteur au-dessus de sa base. Ce qui donne pour le mur à bases égales $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{2}h$ et pour celui à bases inégales $\frac{2n^2+2n+1}{n+2} \cdot CH$ (et par la valeur II) $= \frac{2n^2+2n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{3}h \cdot \frac{n+2}{n+1}$; ce qui livre pour le rapport des moments des résistances $\frac{1}{4}(n+1)^2 : \frac{1}{3}(2n^2+2n-1)$.

Si l'on fait $n = 3$ le rapport des moments sera $= 1 : 1,917$

Si l'on fait $n = 2$ le rapport des moments sera $= 1 : 1,630$

Si l'on fait $n = 1$ le rapport des moments sera $= 1 : 1,000$.

Ce calcul prouve que les murs à bases inégales offrent un grand avantage sur les murs à bases égales relativement à l'épargne des matériaux et du travail. Mais cet avantage ne serait-il pas compensé en partie par quelque désavantage? C'est ce qu'il faut examiner.

Si le mur de revêtement était un monolite de granite, de marbre ou de quelque autre pierre dure, la forme trapézoïde nous donnerait certainement ces avantages et plus; car on pourrait aller au-delà de 3 pour la valeur de n, et l'on gagnerait en poids par la pesanteur spécifique de la pierre toujours supérieure à celle de la brique.

Mais ces murs ne sont pas des monolites; ils ne peuvent être considérés comme tels, que lorsqu'un long laps de tems a introduit dans la chaux du mortier la quantité nécessaire d'acide carbonique atmosphérique pour la pétrifier, cas que l'on observe dans tous les bâtimens d'un grand âge, et qui exerce souvent la patience des architectes qui ont de ces anciens murs à démolir.

Le mortier des murs de revêtement (comme de tout mur) lorsqu'il est frais, n'a pas d'autre ténacité que celle d'un gâchis. Soustrait à la face intérieure du mur par la terre de revêtement à l'influence atmosphérique, il ne

peut se pétrifier que pour la face extérieure, et se pétrifie par conséquent bien plus lentement que dans un mur exposé de tous côtés à l'air. Or, comme la poussée de la terre tend à faire glisser les briques ou les moilons de pierre les uns sur les autres, il est clair, que les surfaces horizontales doivent avoir une certaine étendue, c'est-à-dire le mur une certaine épaisseur pour que la viscosité du mortier fasse équilibre à la pression horizontale.

Il faut ajouter à cela que pendant des pluies de longue durée, l'eau pénétrant la terre ramollit le mortier adjacent et affaiblit sa résistance en même tems que la terre se gonfle sensiblement, si elle n'est pas composée de sable pur, et augmente par là de beaucoup la poussée. Si pendant que la terre est encore imbibée d'eau, il survient de fortes gelées, alors le gonflement augmente et produit une pression irrésistible. La première année cet effet n'est peut-être pas sensible, la poussée pouvant ne produire que quelques lignes d'écartement; mais ce petit écartement suffit pour détruire la viscosité du mortier qui ne se rétablit plus et pour réduire sa résistance au simple frottement. Chaque année suivante l'écartement augmente et finit par renverser la partie supérieure du mur.

Ainsi ce n'est que sur la viscosité du mortier que repose la force du mur pendant la première année, et sur le frottement pendant les années suivantes. D'où je conclus (je pense avec raison) que les constructeurs devraient faire des expériences dans ces principes pour savoir jusqu'à quel point on peut amincir les murs dans leur partie supérieure. Pour des murs d'une grande hauteur, dont la partie supérieure a encore une bonne épaisseur, l'on peut faire $n = 3$. C'est ainsi que Vauban a donné aux murs de revêtement de ses forteresses de 48′ de hauteur une épaisseur de 5′ au sommet et de $14\frac{1}{2}'$ à la base. Pour un mur de 12′ de hauteur une épaisseur de $1\frac{1}{4}'$ au sommet serait assurément trop peu.

Dans les cas où le mur de revêtement n'est pas flanqué de pierres de taille à l'extérieur, le talus du mur ou l'angle α (fig. 3) serait $= 78° \ 27\frac{1}{2}$ min. et

offrirait à la pluie et à la neige une trop grande facilité de dégradation. En Egypte, où l'on ne connait la pluie presque qu'historiquement, les murs antiques ont de très larges bases et des sommets étroits. Mais dans toute l'Europe les anciens murs sont à plomb et protégés par de larges corniches.

Enfin quel que soit le mode de pression latérale de la part de la terre de revêtement, il est sûr que la grande longueur des couches *NU* (fig. 1) aux environs du sommet produit une plus forte poussée que les couches inférieures; ce qui me paraît être une raison de plus de ne pas pousser loin l'amincissement des murs de revêtement près de leur sommet. Si les cas où la partie supérieure de ces murs se penche au-dehors ne sont pas fréquents, cela vient sûrement de ce que l'angle α du talus est pour des terres, foulées par les ouvriers et les brouettes ou même par le pilon, est nécessairement plus petit que celui qu'on obtient en cherchant par la manière ordinaire l'angle d'éboulement.

Murs à assises inclinées.

L'on a proposé de construire les murs de revêtement à assises inclinées à l'horizon, et perpendiculaires au talus du mur, comme on le voit à la fig. 4. Si l'on considère le mur de revêtement comme un monolite pesant qui doit résister à une pression horizontale qui tend à le renverser, il est clair que les assises inclinées n'offrent aucun avantage. Mais si on le considère comme un composé de petites masses mobiles sur leurs assises, l'inclinaison des assises devient très avantageuse, en ce que la poussée locale n'a plus à faire uniquement à la résistance du mortier, mais devrait faire monter les briques ou les pierres de taille sur un plan incliné pour les faire glisser. Soit *AB* une couche en danger de glisser sur son inférieure *cb*, il est clair que la résistance qui résultera de linclinaison sera au poids de la masse au-dessus de *cb* comme la hauteur *ac* du triangle *abc* à sa base horizontale *ab*. Si l'on applique ce raisonnement à toutes les couches, il est clair qu'il en résultera pour toutes, et par

conséquent pour le mur entier, un surcroit de résistance partielle. En supposant que le mur entier puisse glisser sur sa base, que l'on regarde comme immuable, on a le même avantage. Or nous avons vu que, si l'on fait $n = 3$ pour la proportion de la largeur des bases du mur, l'angle d est $= 78° 27\frac{1}{2}'$, et par con équent l'angle $\beta = 11° 32\frac{1}{2}'$, la tangente de cet angle étant $= 0{,}204$, la résistance gagnée sera 0,204 du poids.

Or comme il est aussi facile et aussi peu couteux de construire un mur à assises inclinées (il suffit de faire mouler les briques de la face intérieure comme l'inclinaison l'exige pour avoir une face plane) qu'à assises horizontales, il est certainement avantageux de préférer les premières pour les quais et les terrasses ordinaires. Mais quant aux murs de revêtement des forteresses, la question devient au moins douteuse. Ici le but de ces murs est non seulement de contenir les terres du rempart, mais aussi de résister aussi long-tems que possible au feu de l'artillerie de siège. Or en admettant que le choc des boulets de canon se fasse en direction horizontale (le plus souvent c'est en direction un peu élevée) le boulet ennemi aura pour la destruction du mur le même avantage que l'inclinaison des assises a contre la poussée du rempart; car le choc étant oblique, il tend à soulever la pierre qu'il frappe et à la détacher de son assise; ce qui cause un ébranlement sinistre dans les parties supérieures à la pierre frappée. Ainsi, à moins que les hommes de l'art n'aient des raisons majeures à opposer à ce raisonnement, il paraît avantageux de préférer les assises horizontales pour les forteresses, puisque le but de ces murs est de tenir le plus long-tems que possible contre l'artillerie ennemie.

Murs à dos incliné.

L'on a proposé de ces murs de revêtement, dont la fig. 5 donne une idée; AB étant la verticale, on donne en sus du trapèze $AEDB$ le triangle ABF. Il est clair que la solidité de la maçonnerie exige que cette augmentation AF

ne doit pas être outrée; car la terre de revêtement ne serait qu'un appui très imparfait pour une grande portée. Si le mur est composé de briques, le prolongement AE de la crête dépend en partie des dimensions des briques et ne doit, à mon avis, ne jamais dépasser $\frac{1}{6}$ de la hauteur verticale du mur.

Le calcul de la résistance se fait, pour ce trapézoïde, précisément comme celui de la fig. 3. Ce mode de construction offre certainement des avantages relativement à la poussée des terres; car dabord il donne au levier GD plus de longueur dans une plus grande proportion qu'au levier CG, et il diminue la masse de la terre de revêtement de tout le volume du prisme ABF.

La théorie ne fait aucune objection contre cette construction; au contraire, elle doit considérer cette plus grande épaisseur du mur dans les parties supérieures comme un avantage. La pratique de son côté exige seulement que l'on moule les briques de sorte que la face intérieure FB soit plane (ce qui est facile à obtenir) afin que l'on puisse dûment tasser la terre de revêtement.

Enfin je ne vois pas que cette construction appliquée à un rempart offrît moins de résistance aux boulets de l'artillerie ennemie.

Contreforts.

La question sur l'utilité des contreforts appliqués du côté de la terre aux murs de revêtement, me paraît être encore obscure. Le problème mathématique consiste à déterminer l'épaisseur, la largeur et le nombre des contreforts à établir sur une longueur donnée d'un mur donné que l'on ne suppose pas assez fort pour résister dûment à la poussée. Le but est d'épargner des matériaux et du travail, c'est-à-dire diminuer les frais de construction.

La partie de mur entre deux contreforts est une surface sur tous les points de laquelle agit une force (la poussée) en direction horizontale. Dans la supposition que le mur soit trop faible pour contrebalancer l'effort de la poussée, on doit le considérer comme un assemblage de poutres de maçonnerie, posées

horizontalement les unes sur les autres. Le problème de savoir quelle résistance ces poutres, si elles étaient de bois, pourraient supporter, ainsi chargées de forces égales sur tous les points de leur longueur, est résolu depuis long-temps, mais pas pour des poutres de maçonnerie, parce qu'il nous manque encore le résultat d'expériences à faire sur la ténacité des parties de telles poutres. La résistance de cohésion qui existe entre le mur et son contrefort nous est également inconnue. Ce que nous avons appris de l'expérience là-dessus, c'est que souvent le mur s'est détaché de son contrefort. Cette cohésion est en outre très variable selon la bonté du mortier et des briques, et le soin que le maçon a mis à cette construction.

Pour obvier à cette séparation du mur de son contrefort, il faudrait (fig. 6) placer des pierres de taille de 3 à 4 pieds de longueur, comme a, a, a. etc. dans la jonction du contrefort A avec le mur B, ou bien consolider cette jonction par des tenons de fer cb, cb, cb, etc. Mais ces deux amendements augmenteraient considérablement les frais.

Ces considérations me paraissent devoir porter les ingénieurs à rejeter totalement les contreforts appliqués aux murs de revêtement, et à employer les frais de leur construction à grossir l'épaisseur des murs autant qu'il faut pour leur donner la masse et la résistance nécessaires sans contreforts.

Accidents aux quels les murs de revêtement sont assujettis.

L'expérience n'a que trop souvent prouvé que, quoique l'on ait cru avoir employé à la construction des murs de revêtement toutes les précautions dictées par la théorie et une pratique éclairée, cependant il arrive à ces murs de funestes accidens qui forcent de les reconstruire, quelquefois avec tout ce qui en dépend.

Ces accidens peuvent se réduire à trois espèces :

Ou le mur est renversé, soit en tout, soit seulement sa partie supérieure, comme on renverserait une pierre en la saisissant à son sommet; ce que nous voulons nommer renversement.

Ou le mur se courbe à sa partie inférieure, formant un ventre vers le dehors; ce que nous voulons nommer embossement.

Ou le mur entier avance au-dehors, conservant presque parfaitement sa position primitive; ce que nous voulons nommer mouvement progressif.

Ces accidents sont tous trois des mouvements, et s'ils proviennent d'une poussée mal calculée, plus grande que le moment de resistance du mur, ils se manifesteront sensiblement bientôt après la construction. Si par contre ils n'ont lieu que plus tard, s'ils ne se manifestent sensiblement qu'après des années, soit successivement, soit périodiquement, c'est une preuve que des causes nouvelles, étrangères, sont survenues pour produire ces effets. Nous ne chercherons pas ces causes dans des phénomènes géologiques, comme enfoncements de terrains, tremblements de terre, cas heureusement trop rares pour être mis ici en ligne de compte. Nous avons un autre agent, qui se prête facilement à l'explication de ces accidents et cet agent, c'est l'eau, qui pénètre les terres soit de haut en bas, soit de bas en haut. Nous allons considérer ces trois accidents sous ce point de vue.

a) Le renversement. Si la terre de revêtement n'a pas été dûment battue, l'eau de pluie pourra pénétrer facilement pendant la saison pluvieuse à une profondeur considérable, et cette eau aura plusieurs effets nuisibles. Le premier est d'augmenter très sensiblement le poids de la terre qui n'aurait été calculé que pour l'état d'une faible humidité. Le second est de gonfler la terre et de produire par là immédiatement une plus forte poussée que la poussée naturelle. Si après ces pluies il survient de fortes gelées, le volume déjà augmenté

augmente encore et produit une poussée d'une force à laquelle rien ne peut résister. Un autre effet est de ramollir le mortier du mur qui n'a pas eu le tems de se pétrifier; ce qui détruit la cohérence des briques ou des pierres dont le mur est composé. On concevra que le concours de ces effets peut produire un renversement, soit partiel, soit total.

On objectera peut-être que partout où le terrain est couvert de gazon ou de pavé, l'eau de pluie ou de neige ne pénètre pas facilement à de grandes profondeurs. Assurément; s'il n'était question que d'une grande pluie de quelques heures, la pénétration n'irait qu'à quelques pouces. Mais il s'agit ici d'une action qui se renouvelle très fréquemment dans le cours d'une année, d'une pluie ou d'une fonte de neige, dont l'eau ne s'évapore qu'en été, et alors même qu'en partie *). De plus, l'eau qui a pénétré la première année à quelques pieds de profondeur s'étend à de plus grandes par l'action de la capillarité. L'année suivante sa quantité est doublée: Il s'agit surtout des pluies presque continues d'automne et dont les intervalles sont souvent remplis par des brouillards qui non seulement empêchent l'évaporation, mais livrent même un contingent à l'eau de pluie ou de neige.

L'on trouvera ce mode d'action de l'eau de pluie et de neige très naturel, si l'on se rappelle que c'est celui dont la nature se sert pour

*) On se fait ordinairement une idée outrée de la sécheresse de la terre en été. Il est vrai que la superficie se pulvérise souvent. Mais j'ai fait là dessus des observations avec le sable des contrées de Riga qui m'ont étonné. J'ai trouvé qu'après plusieurs semaines de chaleur d'été sans qu'il ait plu une seule fois, ce sable très fin n'était sec que jusqu'à la profondeur de 10 à 12 pouces, selon l'exposition; à une plus grande profondeur le sable était assez humide pour que, pressé dans la main, il conservât la forme qui lui avait été donnée et l'empreinte des doigts.

alimenter les fleuves par l'eau atmosphérique qui tombe sur leur domaine et arrive au lit du fleuve à travers la terre.

Il n'est pas difficile ni couteux d'empêcher cette infiltration des eaux atmosphériques. L'on sait que la glaise a la propriété de s'imbiber facilement d'eau, mais de ne la laisser passer que difficilement, propriété qui fait que nous l'employons avec succès pour la construction de réservoirs qui doivent contenir quelques pieds d'eau. Ainsi, qu'on enlève une couche de 10 pouces d'épaisseurdu terrain que l'on veut assurer contre l'infiltration; qu'on recouvre cette surface mise à nu d'une couche de glaise presque sèche et fortement battue, de 3 pouces d'épaisseur, et ensuite d'une couche de terre meuble et de gazon d'une épaisseur de 7 pouces. L'eau atmosphérique ne pourra pénétrer et saturer que le gazon et la terre meuble sans pouvoir traverser la couche de glaise, le reste étant forcé de sécouler sur la surface du gazon.

b) L'embossement. Cet accident est également dû à l'eau. Si à la suite de pluies abondantes ou de la fonte d'une masse considérable de neige et surtout d'une crue d'eau d'une rivière voisine, le terrain qui entoure l'ouvrage se trouve plus que saturé d'eau, alors cette eau se filtre transversalement au-dessous du mur et monte en vertu de la capillarité dans les couches de terre derrière le mur jusqu'à une hauteur de plusieurs pieds et y produit un gonflement qui porte son effort contre les parties inférieures du mur, et produit la bosse. Le terrain extérieur ayant ensuite été desséché, la bosse reste, et avec elle un vide qui doit se remplir par la terre supérieure. Si une ou plusieurs années après le phénomène se renouvelle, la bosse s'agrandit et après plusieurs répétitions la bosse peut crever et amener la chute de tout l'ouvrage.

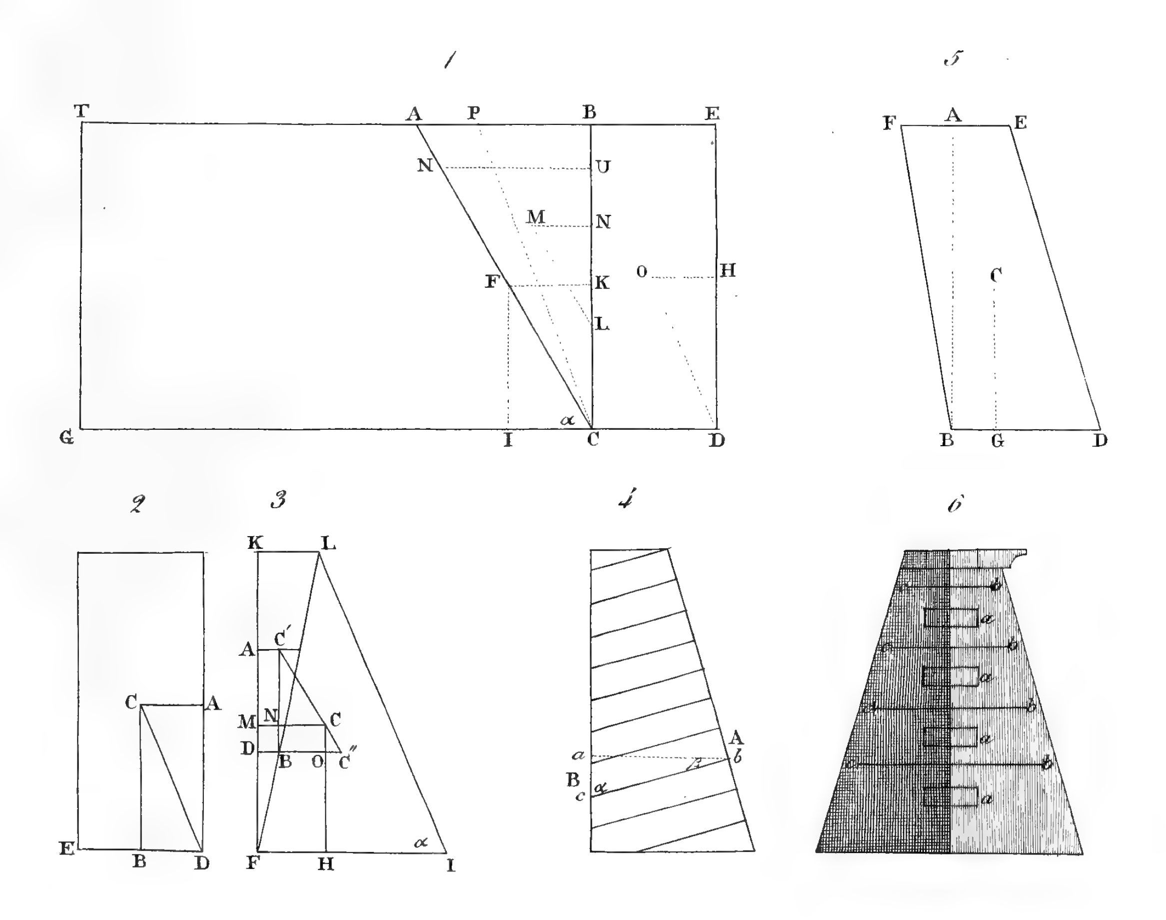
Si l'on s'aperçoit de cet accident dès le commencement, l'on pourra empêcher son accroissement en enfonçant tout près de la base du mur une ligne de pilots à rainure qui règnera sur toute la longueur du mur. Quoique ce pilotis n'arrête pas, à parler strictement, tout passage de l'eau par voie de filtration, il ralentira cependant ce passage tellement que son effet ne sera pas sensible.

c) Le mouvement progressif. Un seul exemple de cet accident est parvenu à ma connaissance, dont voici les détails certains que j'ai pu me procurer. Il s'agissait d'élever une terrasse de 48′ de hauteur, et de la flanquer d'un mur de revêtement. Le terrain était une couche marécageuse peu humide, de 8′ d'épaisseur, reposant sur un terrain argileux très solide. Le mur fut placé sur un bon pilotis traversant la couche marécageuse et dûment enfoncé dans le terrain inférieur. La terrasse fut placée sans aucune précaution sur la couche marécageuse. A peu de distance coule une rivière sujette à des débordemens. Ce ne fut qu'après quelques tems que l'on s'apperçut de la marche du mur vers le dehors, qui dans le cours de plusieurs années s'étendit jusqu'à un à deux pieds. L'examen du phénomène apprit que les pilots étaient courbés et plusieurs même froissés.

Il suit de ces données que la couche marécageuse passablement sèche l'orsqu'on commença les travaux, pouvait porter la charge de la terrasse; mais que, lorsqu'elle fut amollie par les crues d'eau, elle céda et fut sujette à une poussée latérale, qui, trouvant dans le pilotis une espèce de barre, courba les pilots et produisit le mouvement progressif.

Ainsi, lorsqu'on a à élever une terrasse sous de pareilles circonstances, il faudra asseoir la terrasse même, et non pas seulement le

mur de revêtement sur un pilotis capable de porter sa charge, qui au reste, est toujours moindre que celle du mur à surfaces égales de base. Alors la terre marécageuse n'ayant rien à porter, elle pourra se mouiller et se sécher alternativement sans aucune influence sur les murs de revêtement, puisqu'elle ne sera forcée à aucune poussée horizontale. Ce conseil est de M. le Baron Dalwitz, colonel au Corps du génie et membre du comité scientifique de ce Corps.


1
T A P B E
N U
M N
F K O H
L
G I α C D
5
F A E
C
B G D
2
C A
E B D
3
K L
A C′
M N C
D B O C″
α
F H I
4
A
a b
B
c α
6
b
a
a
b
a
a
b
a
a
b
a

MÉMOIRE

SUR LES

DÉPLACEMENS INSTANTANÉS

DES SYSTÈMES ASSUJETTIS A DES CONDITIONS VARIABLES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 20 avril 1838.)

1. DEPUIS la publication de la Mécanique analytique, plusieurs géomètres se sont occupés de la formation des équations du mouvement d'un système de corps, assujetti à des liaisons quelconques; mais, dans tous les écrits sur cette matière qui sont venus à ma connaissance, on n'a fait que commencer ou simplement reproduire, plus ou moins heureusement, la théorie de Lagrange*). Je crois être le premier qui ait ajouté, quelque peu, à cette théorie dans un mémoire sur les momens des forces, publié il y a trois ans.

M'étant occupé, l'année dernière, de la rédaction d'un traité de mécanique**), j'eus l'occasion de repenser à la formation des équations générales de la dyna-

---

*) Je ne parle que de la démonstration des équations de la dynamique et nullement de leur intégration. Sous ce dernier rapport, la science a considérablement gagné depuis Lagrange.

**) Ce traité, rédigé en français, vient d'être lithographié ainsi qu'une traduction russe qu'on en avait faite.

mique et j'ai trouvé que la méthode connue pour établir les équations dont il s'agit, dans le cas d'un système assujetti à des conditions variables avec le temps, laisse beaucoup à désirer pour la clarté et la précision : et même, on peut concevoir des doutes sur l'exactitude des résultats qu'elle fournit. En effet, cette méthode consiste à établir les conditions de l'équilibre des forces perdues; or, pour s'équilibrer, des forces quelconques ne doivent chercher à produire que des mouvemens impossibles, c'est-à-dire, des mouvemens que le système ne peut pas recevoir. Admettons que les déplacemens ou mouvemens possibles sont ceux qui satisfont à un certain nombre de conditions, telles que

$$(a)\quad a dx + b dy + c dz + a' dx' + b' dy' + c' dz' + a'' dx'' \ldots\ldots + T dt > 0;$$

dx, dy, dz désignant les projections sur les axes coordonnés, d'un déplacement d'un point du système, dx', dy', dz', les projections d'un déplacement d'un autre point du système, ainsi de suite; et a, b, c, a', b', c', a'' ..... T étant des quantités finies, dépendantes de la position du système au bout d'un temps t, dont dt marque un élément. Ainsi, pour être en équilibre, les forces perdues doivent être incapables de produire aucun des déplacemens, satisfaisant aux conditions (a). Mais ce n'est pas ainsi qu'on se prend pour les équilibrer, on supprime les termes multipliés par dt dans les (a), et l'on suppose que les forces perdues sont incapables de produire les déplacemens, satisfaisant aux conditions telles que

$$(b)\quad a dx + b dy + c dz + a' dx + b' dy + c' dz + \ldots\ldots > 0.$$

Cependant un déplacement pourrait bien ne pas remplir les conditions (b) et satisfaire aux conditions des déplacemens possibles; ainsi, en s'y prenant de cette manière, il semble qu'on n'exprime pas que les forces perdues ne cherchent point à produire aucun déplacement possible et, par conséquent il n'est pas bien clair que les conditions ainsi établies soient celles de l'équilibre de ces forces. Et si l'on répond qu'on doit équilibrer les forces perdues au commencement de l'instant dt, et en conséquence prendre les conditions des déplacemens possibles pour $dt = 0$, la question n'en deviendra pas plus claire; car pendant

une durée $= 0$ aucun déplacement ne peut être produit, et dès que le temps marche, les déplacemens différens des (*b*) deviennent possibles et l'on pourra croire que les forces perdues donneront au système un de ces déplacemens à mesure qu'il devient possible.

Au reste je ne pretends assurément pas que les équations connues, pour le mouvement d'un système, aux conditions variables, soient fausses, je pense seulement, je le répète, qu'elles ne sont pas clairement établies. Je m'en vais m'occuper dans ce qui va suivre à les démontrer par des raisonnemens à l'abri de toutes objections, et en même temps je leur donnerai la plus grande généralité dont elles soient susceptibles.

2. Avant de parler d'un système, nous dirons quelques mots d'un seul point matériel, dans le but de présenter *le principe des forces accélératrices* sous une forme qui en facilite et abrège les applications et qui nous sera utile pour donner à la théorie générale de la dynamique la plus grande simplicité et pour l'exposer aussi brièvement que possible.

Désignons par m la masse d'un point matériel, sollicité par une force motrice P, par v la vitesse de ce point, au bout d'un temps t, et par α et ω les angles que P et v font avec une direction donnée A. Dans l'instant dt qui suit le temps t, le mobile décrira, parallèlement à la direction A, l'espace qu'on peut représenter par $v\cos\omega dt + \frac{P}{m}\cos\alpha\frac{dt^2}{2}$ et par $v\cos\omega dt + \frac{d(v\cos\ )}{dt}\frac{dt^2}{2}$.

Il s'en suit que

$$(c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad P\cos\alpha = m\frac{d(\cos\omega)}{dt}.$$

Cette formule renferme *le principe des forces accélératrices*. Elle est préférable aux trois équations par lesquelles ce principe est ordinairement représenté et qui dérivent de (*c*), en prenant successivement pour la direction A, celle des axes des coordonnées rectangles.

L'équation (*c*) donne, par un choix convenable des directions A, les formules les plus simples pour déterminer le mouvement de m. Supposons, par

exemple, que la force P soit dirigée vers un centre fixe. Dans ce cas, la courbe décrite sera visiblement plane, il suffira donc, pour avoir les équations du mouvement, de rapporter l'équation (c) à deux directions, parallèles au plan du mouvement. Mais il s'agit de choisir ces directions de manière à obtenir les formules les plus facilement intégrables; pour cela, il n'y a qu'à faire coincider une des deux directions avec celle de la tangente à la trajectoire, et l'autre avec une perpendiculaire à la force P; on trouvera de cette manière

$$mv\,dv = P\,dr$$

$$d\left(\frac{r^2\,dp}{dt}\right) = 0$$

r et p désignant les coordonnées polaires ayant pour foyer le centre fixe, vers lequel tend la force P.

Il n'est pas nécessaire que la direction A soit fixe; elle peut changer avec le temps. Mais on doit la regarder comme fixe en différentiant la quantité $v\cos\omega$. Nous voulons dire qu'on doit prendre pour $\omega + d\omega$ l'angle que la tangente à la trajectoire, au bout de $t + dt$, fait avec la direction de A à la fin du temps t. C'est ainsi qu'on a agi pour obtenir les équations relatives à l'exemple qu'on vient de citer et où l'on a employé les projections sur les directions variables.

3. Il est bon de donner à l'équation (c) une interprétation, basée sur des considérations différentes de celles qui l'on fait obtenir.



Supposons que, pendant un temps infiniment petit dt, une force motrice P fait décrire au mobile m, au lieu de l'espace AB qu'il aurait parcouru en vertu de son inertie, l'espace AC. La ligne infiniment petite du second ordre BC

représentera ce qu'on appelle l'effet de la force P, et cette force elle-même s'exprimera par $\frac{2m\,BC}{dt^2}$ et aura BC pour direction; elle s'emploiera toute entière à produire le mouvement BC en sus sur le mouvement AB qui aurait lieu sans action de P.

Or, il est difficile de concevoir, comment une force peut s'épuiser en produisant un mouvement, sans admettre que la matière oppose une résistance ou réaction à tout changement de son état*). Ainsi la force P est employée à vaincre la répugnance du mobile m pour le changement de son état, c'est-à-dire, pour le changement du mouvement AB en mouvement AC. La résistance dont nous parlons produirait son effet, s'il n'y avait pas de force P. Car en admettant que rien n'agit sur m, on peut supposer que ce qui empêche ce mobile d'aller suivant AC est une force qui produit l'effet CB, de C vers B. On l'appelle force d'inertie. Il est visible qu'à chaque changement du mouvement répond une force d'inertie particulière. Dans le cas que nous traitons, cette force a pour intensité $\frac{2m\,\overline{CB}}{dt^2}$, et la ligne CB pour direction. Elle est donc égale et opposée à la force motrice P.

Les effets des forces motrices et des forces d'inertie sont de même nature, mais opposés dans leurs buts. Les forces motrices cherchent à déranger l'état naturel d'un mobile, et les forces d'inertie cherchent à changer son mouvement altéré, pour en faire un mouvement naturel; ainsi de la même manière que la présence de la force motrice P change le mouvement naturel AB en mouvement AC, la force d'inertie changerait le mouvement altéré AC en mouvement naturel AB, si rien ne s'y opposait. — Le mobile m, sollicité par la force P suit le mouvement AC, parce que rien ne dérange ce mouvement,

*) On dit d'un mobile, qui reste en repos ou se meut uniformément en ligne droite, qu'il conserve son état; au contraire, quand la vitesse ou la direction du mouvement ou l'un et l'autre à la fois varient, on dit que l'état du mobile change. Pour nous conformer à cette manière de s'énoncer, nous entendons par état d'un mobile, la vitesse et la direction de son mouvement.

ni la force motrice, ni la force d'inertie; car ces deux forces se détruisent mutuellement.

L'équation (c) n'est qu'une expression de l'égalité en intensités et de l'opposition en directions de la force motrice et de la force d'inertie. Car il est facile de voir que $-m\frac{d(v\cos\omega)}{dt}$ exprime la projection de la force d'inertie sur une direction faisant l'angle ω avec la tangente à la trajectoire.

Mais si l'on attribuait mentalement au mobile un mouvement AD différent de AB et de AC, ce mouvement serait changé en AC par la force $\frac{2mDC}{dt^2}$, dirigée suivant DC et représentant la résultante de la force d'inertie $\frac{2mDB}{dt^2}$, dirigée suivant DB et de la force motrice $\frac{2mDE}{dt^2}=\frac{2mBC}{dt^2}=P$. Donc, ce qui change un mouvement altéré en un autre mouvement altéré, est la résultante de la force d'inertie qui répond au premier de ces mouvements et de la force motrice qui sollicite le mobile. — Ainsi on peut attribuer à un mobile un mouvement à volonté, pourvu qu'on ajoute à ce mouvement l'effet de la résultante de la force motrice et de la force d'inertie relative au mouvement supposé du mobile.

Si le mouvement de m est gêné par des obstacles, de sorte que ce mobile ne peut pas obéir à l'action de la force motrice, c'est-à-dire, ne peut pas suivre le mouvement qu'il aurait suivi s'il était libre, dès lors la force motrice et la force d'inertie actuelle ne se détruiront pas; mais leur résultante ne cherchera à produire que des déplacemens impossibles, c'est-à-dire, ne fera que presser les obstacles qui gênent le mouvement de la masse m. On pourra ajouter que, n'étant pas zéro, cette résultante s'en approchera autant que possible. Il est facile de démontrer cette assertion, même elle l'a été par un illustre géomètre, M. Gauss, et encore d'une manière générale, je veux dire pour un système quelconque de points matériels.

4. Nous allons maintenant traiter l'objet principal de ce mémoire. Désignons par m, m', m'', m''', ... les masses des points matériels dont se

compose le système que nous allons considérer et que, pour abréger le discours nous appellerons (s) ; et par P, P', P'', P''', ... les forces accélératrices respectivement appliquées aux masses m, m', m'', m''', ...

La question la plus générale que l'on puisse se proposer sur le mouvement du système (s) consiste à en déterminer la position pour chaque temps t, en supposant connus sa position et son état pour un seul instant donné, instant où l'on peut mettre l'origine du temps t. Par position et état d'un système nous entendons la position et l'état de chaque point matériel appartenant au système.

Il ne s'agira pas, dans ce mémoire, de traiter en entier la question qu'on vient de poser. Nous nous proposons d'en résoudre seulement une partie : savoir, de déterminer, d'après la position et l'état du système à un instant quelconque t, sa position et son état à l'instant suivant $t+dt$. Cette partie de la question générale renferme la mécanique toute entière, car elle comprend la formation des équations du mouvement d'un système considéré dans la plus grande généralité. L'autre partie de la question a pour but la résolution de ces équations ; elle appartient à l'analyse générale.

La détermination de la position et de l'état du système (s), pour l'instant $t+dt$, d'après sa position et son état à l'instant t, ne fait connaître immédiatement qu'un déplacement ou mouvement instantané de (s), mais elle renferme tout ce qui est nécessaire pour trouver le mouvement de ce système pendant un temps fini quelconque. En effet, si l'on est à même de déterminer le mouvement du système (s) pendant l'instant dt, placé au bout d'un temps quelconque t, il 'ny aura qu'à faire coincider la fin de t, avec l'instant pour lequel on connaît la position et l'état de (s), pour en obtenir la position et l'état relatifs à un instant plus tard ; puis, faisant coincider la fin de t avec ce nouvel instant, on aura la position et l'état du système pour l'instant suivant ; faisant coincider la fin de t avec ce dernier instant, on aura la position et l'état de (s) pour l'instant suivant, ainsi de suite. Comme rien n'empêche de continuer à volonté la détermination de la position et de l'état de (s) d'un instant à l'autre, on y reconnaît

la possibilité de trouver le mouvement de ce système pendant un temps fini quelconque. Par l'infinité d'opérations que cette recherche exige, on est seulement averti que la question appartient à l'analyse transcendante. Ainsi, quoique la détermination des déplacemens instantanés renferme celle du mouvement pendant un temps fini quelconque, il est cependant difficile de l'en faire ressortir.

5. Nous ne parlerons maintenant que d'un déplacement instantané de (s). Voyons d'abord ce qui est nécessaire de connaître pour le déterminer. — En premier lieu, il est visible que les masses $m, m', m'', m''', \ldots\ldots$ et les forces accélératrices $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}', \boldsymbol{P}'', \boldsymbol{P}''', \ldots\ldots$ doivent être données pour chaque temps t. Il n'est pas nécessaire qu'elles ne soient fonctions que de t; elles peuvent dépendre du temps, de la position et de l'état du système, mais la manière dont elles en dépendent, doit être connue, et cette connaissance suffit pour en avoir les valeurs de l'instant à l'autre, en partant de l'époque, à laquelle la position et l'état du système sont donnés.

Pour trouver ce qui est encore nécessaire, outre les masses et les forces accélératrices, à la détermination d'un déplacement instantané de (s), imaginons tous les déplacemens infiniment petits qu'une masse du système, m par exemple, serait capable de recevoir, si rien ne gênait son mouvement; les extrémités des petites droites, qui représenteraient les déplacemens dont il s'agit, seraient capables de remplir tout un volume infiniment petit autour de la masse m. Il en sera de même pour tous les points matériels $m', m'', m''', \ldots\ldots$ Les déplacemens des masses $m, m', m'', m''', \ldots\ldots$ en se combinant entre eux, formeraient tous ceux qu'on pourrait mentalement attribuer au système (s). Mais il est impossible de les attribuer tous effectivement à cause des liaisons auxquelles le système est assujetti. C'est la connaissance de tous les déplacemens que le système peut recevoir e f f e c t i v e m e n t, pendant la durée de l'instant dt, qui est nécessaire pour en déterminer le mouvement instantané. Les déplacemens dont il s'agit s'appellent *virtuels* ou *possibles*. On se persuadera de la nécessité de les connaître par une réflexion bien simple; en effet, si on ne les connaîssait pas, on

ignorerait en même temps ceux que le système ne peut pas recevoir ; et l'on pourrait lui attribuer un déplacement que la présence des obstacles rend impossible, et rien n'avertirait de l'erreur commise.

6. La mécanique ne fait de différence entre les différens systèmes que les masses et les déplacements possibles des points matériels, dont les systèmes sont composés. Ainsi la nature du système (s) est complètement définie, pour chaque instant dt, si l'on connaît les masses m, m', m'', m''', ... et les déplacemens qu'elles peuvent recevoir pendant la durée de l'instant dt. Ainsi, connaissant au commencement d'un instant dt les masses m, m', m'', m''', ..., les déplacemens virtuels, les forces accélératrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{P}''$, $\boldsymbol{P}'''$, ..., la position et l'état du système (s), on possède tout ce qui est nécessaire à la détermination du déplacement instantané de (s).

Les masses m, m', m'', m''', ... se donnent immédiatement ou par des équations capables de les déterminer ; les forces accélératrices $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{P}''$, $\boldsymbol{P}'''$, ... le plus souvent ne se donnent pas immédiatement ; elles dépendent ordinairement de la position et de l'état du système. Mais il suffit qu'on sache la manière dont elles en dépendent. Pour ce qui regarde la position et l'état du système, au commencement de dt, on ne les connaît que quand dt coincide avec le premier instant du mouvement. Ainsi, à proprement parler, on ne se propose pas de déterminer entièrement le déplacement instantané de (s), on veut seulement trouver, comment le déplacement dont il s'agit dépend de la position et de l'état de ce système au commencement de dt.

Il nous reste à parler des déplacemens virtuels. Ces déplacements se donnent ordinairement par la nature du système (s) et par les obstacles qui gênent le mouvement des masses m, m', m'', m''', ... En remplaçant les données dont il s'agit par leurs expressions algébriques, on est conduit à des équations ou des inégalités linéaires entre les projections des déplacemens possibles sur les directions connues et l'élément dt du temps. Soit

$$a\,ds\cos\theta + a'\,ds'\cos\theta' + a''\,ds''\cos\theta'' + a'''\,ds'''\cos\theta''' + \ldots\ldots + T\,dt > 0$$

une de ces conditions, où le signe $>$ n'exclut point celui de l'égalité; ds, ds', ds'', ds''', ... désignent respectivement les déplacemens des masses m, m', m'', m''', ...; θ, θ', θ'', θ''', ... représentent les angles que ds, ds', ds'', ds''', ... font avec des directions données, fixes ou variables, (A), (A'), (A''), (A''') ..... et les coëfficiens a, a', a'', a''' ..... T sont donnés ou dépendent d'une manière donnée de la position du système au commencement de dt. Mais ils ne peuvent dépendre que de la position du système, ils ne sauraient contenir rien des vitesses des mobiles m, m', m'', m''' .....

On ne peut point donner de principes généraux pour trouver les conditions des *déplacemens possibles*. Leur nombre, les coëfficiens a, a', a'', a''' .... T, les directions (A), (A'), (A''), (A'''), ... se trouvent dans chaque cas particulier par des considérations géométriques fort simples. Mais aussi chaque cas particulier exige des règles spéciales; il en est, comme partout où il ne s'agit pas de resoudre des équations, mais de les trouver d'après la nature du problème.

Nous ne fixerons pas, pour plus de généralité, le nombre des conditions des déplacemens possibles; on pourra écrire autant que l'on veut d'inégalités telles que

$$(1)\quad \begin{cases} a\,ds\cos\theta + a'ds'\cos\theta' + a''ds''\cos\theta'' + a'''ds'''\cos\theta''' + \ldots + T\,dt > 0 \\ a_1ds\cos\theta_1 + a_1'ds'\cos\theta_1' + a_1''ds''\cos\theta_1'' + a_1'''ds'''\cos\theta_1''' + \ldots + T_1dt > 0 \\ a_2ds\cos\theta_2 + a_2'ds'\cos\theta_2' + a_2''ds''\cos\theta_2'' + a_2'''ds'''\cos\theta_2''' + \ldots + T_2dt > 0 \\ a_3ds\cos\theta_3 + a_3'ds'\cos\theta_3' + a_3''ds''\cos\theta_3'' + a_3'''ds'''\cos\theta_3''' + \ldots + T_3dt > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dont aucune n'exclut l'égalité, et l'on regardera comme virtuels seulement ceux des déplacemens ds, ds', ds'', ds''', ... qui satisfont à toutes ces conditions. Les lettres θ_1, θ_1', θ_1'', θ_1''', ... désignent les angles que ds, ds', ds'', ds''', ... font respectivement avec des directions données, fixes ou variables, (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ... dont quelques unes peuvent être les mêmes que les directions (A), (A'), (A''), (A'''), ...; θ_2, θ_2', θ_2'', θ_2''', ... désignent les angles que les déplacemens ds, ds', ds'', ds''', ...

font respectivement avec un troisième système des directions données (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ..., ainsi de suite.

Il peut arriver que, parmi les conditions (1), il y en a qui sont données par des équations au lieu d'inégalités. Ce cas particulier apporte toujours quelques simplifications à la détermination des déplacemens instantanés de (s), surtout quand toutes les inégalités (1) deviennent des équations.

Il peut arriver aussi, d'après la nature du système ou des obstacles extérieurs, qu'on trouvera quelques inégalités telles que

$$a\,ds\cos\theta + a'\,ds'\cos\theta' + a''\,ds''\cos\theta'' + a'''\,ds'''\cos\theta''' + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + T\,dt < 0;$$

dans ce cas on changera les signes de leurs premiers membres, pour avoir

$$-a\,ds\cos\theta - a'\,ds'\cos\theta' - a''\,ds''\cos\theta'' - a'''\,ds'''\cos\theta''' - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot - T\,dt > 0.$$

Au reste ce changement n'est pas absolument nécessaire; on aurait pu admettre, parmi les premiers membres des conditions (1), quelques uns > 0, et d'autres < 0. C'est uniquement pour plus d'uniformité que nous avons supposé que toutes sont > 0, c'est à quoi, comme on vient de le voir, il est facile de parvenir.

Enfin nous ferons observer qu'on peut toujours faire en sorte que tous les a soient positifs. Pour cela il n'y a qu'à rapporter ceux des termes des conditions (1) dont les coëfficiens sont négatifs, aux directions opposées à celles qui sont employées dans les (1). Ainsi, par exemple, si dans le terme $a\,ds\cos\theta$, qui se rapporte à la direction (A), le coëfficient a était négatif en rapportant $a\,ds\cos\theta$ à la direction opposée à celle de (A), et par conséquent parfaitement connue, le terme en question se trouvera remplacé par $-a\,ds\cos(\pi - \theta)$ ou bien par $-a\,ds\cos\theta$, θ désignant l'angle que ds fait avec la direction opposée à la direction (A). Nous supposerons, dans ce qui suit, que les directions (A) sont prises de manière à ce que tous les a soient positifs.

7. Faisons pour abréger

$$(2)\left\{\begin{array}{l} a\,ds\cos\theta + a'\,ds'\cos\theta' + a''\,ds''\cos\theta'' + a'''ds'''\cos\theta''' + \cdots + T\,dt = U\,dt \\ a_1 ds\cos\theta_1 + a_1' ds'\cos\theta_1' + a_1'' ds''\cos\theta_1'' + a_1''' ds'''\cos\theta_1''' + \cdots + T_1 dt = U_1 dt \\ a_2 ds\cos\theta_2 + a_2' ds'\cos\theta_2' + a_2'' ds''\cos\theta_2'' + a_2''' ds'''\cos\theta_2''' + \cdots + T_2 dt = U_2 dt \\ a_3 ds\cos\theta_3 + a_3' ds'\cos\theta_3' + a_3'' ds''\cos\theta_3'' + a_3''' ds'''\cos\theta_3''' + \cdots + T_3 dt = U_3 dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

les conditions (1) en deviendront

$$(3)\left\{\begin{array}{l} U\,dt > 0 \\ U_1 dt > 0 \\ U_2 dt > 0 \\ U_3 dt > 0 \\ \cdots\cdots \end{array}\right.$$

Il est important de faire observer relativement à ces conditions, qu'elles ne sont exactes qu'aux quantités de l'ordre dt^2 près. Or il arrive souvent qu'on est obligé d'y porter l'approximation jusqu'au dt^3. On y parviendra très facilement, en ajoutant à chaque premier membre des inégalités (3) la moitié de sa différentielle, ce qui fournira, pour conditions des déplacemens possibles, les inégalités

$$(4)\left\{\begin{array}{l} U dt + \frac{dU}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0 \\ U_1 dt + \frac{dU_1}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0 \\ U_2 dt + \frac{dU_2}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0 \\ U_3 dt + \frac{dU_3}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

qui sont exactes jusqu'au dt^3 et dans lesquelles les différentielles $\frac{dU}{dt}$, $\frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dU_2}{dt}$, $\frac{dU_3}{dt}$ . . . . . sont prises, en faisant varier tout ce qui varie avec t.

Il est bon de faire connaître une forme particulière dont les quantités $\frac{dU}{dt}$,

$\frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dU_2}{dt}$, $\frac{dU_3}{dt}$, ... sont susceptibles et qui nous sera utile plus tard. Ne considérons que $\frac{dU}{dt}$; ce que nous en dirons, s'appliquera mot pour mot à toutes les autres différentielles. En différentiant à l'ordinaire, on trouve

$$\frac{dV}{dt}=\frac{ad\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}+\frac{a'd\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}+\frac{a''d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}+\frac{a'''d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}+\ldots$$
$$+\frac{da}{dt}\frac{ds}{dt}\cos\theta+\frac{da'}{dt}\frac{ds'}{dt}\cos\theta'+\frac{da''}{dt}\frac{ds''}{dt}\cos\theta''+\frac{da'''}{dt}\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''+\cdots+\frac{dT}{dt},$$

toutes les différences $d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)$, $d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)$, $d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)$, $d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)$, ..., da, da', da'', da''', ... dT sont prises en faisant varier tout ce qui varie avec le temps t. Or les quantités $\frac{ds}{dt}\cos\theta$, $\frac{ds'}{dt}\cos\theta'$, $\frac{ds''}{dt}\cos\theta''$, $\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''$, . . . varient, et par les changemens des grandeurs et des directions des déplacemens ds, ds', ds'', ds''', ... et par les changemens des directions (A), (A'), (A''), (A'''), ..., si celles-ci sont variables avec t; nous pouvons séparer ces deux causes de changement, et remplacer les différences

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt},\quad \frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt},\quad \frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt},\quad \frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt},\ \ldots.$$

respectivement par

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}-\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta,\quad \frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}-\frac{ds'}{dt}\frac{d\theta'}{dt}\sin\theta',$$
$$\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}-\frac{ds''}{dt}\frac{d\theta''}{dt}\sin\theta'',\quad \frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}-\frac{ds'''}{dt}\frac{d\theta'''}{dt}\sin\theta''',\ \ldots\ldots$$

nous comprenons dans les premières parties de ces dernières différences tout ce qui change avec la grandeur et les directions de ds, ds', ds'', ds''', ..., et les secondes parties des mêmes différences renferment tout ce qui vient du changement des directions (A), (A'), (A''), (A'''), ...; nous aurons de cette manière

$$\frac{dU}{dt}=\frac{a\left(d\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}+\frac{a'd\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}+\frac{a''\left(d\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}+\frac{a'''d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}+\ldots$$
$$+\frac{ds}{dt}\frac{d(a\cos\theta)}{dt}+\frac{ds'}{dt}\frac{d(a'\cos\theta')}{dt}+\frac{ds''}{dt}\frac{d(a''\cos\theta'')}{dt}+\frac{ds'''}{dt}\frac{d(a'''\cos\theta''')}{dt}+\ldots+\frac{dT}{dt}$$

Mais il ne faut pas oublier que, pour avoir les différentielles $d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)$, $d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)$, $d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)$, $d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)\cdots$ on ne doit y varier θ, θ', θ'', θ''',... qu'autant que ces angles varient avec les changemens des directions de ds, ds', ds'', ds''', ... et, au contraire, dans $d(a\cos\theta)$, $d(a'\cos\theta')$, $d(a''\cos\theta'')$, $d(a'''\cos\theta''')$,... les mêmes angles θ, θ', θ'', θ''',... ne doivent changer que par les changemens des directions (A), (A'), (A''), (A'''),.... Ainsi les différentielles $d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)$, $d\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\big)$, $d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)$, $d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)$,... et celles-ci $d(a\cos\theta)$, $d(a'\cos\theta')$, $d(a''\cos\theta'')$, $d(a'''\cos\theta''')$,... ne sont pas complètes.

On trouvera de la même manière les différences $\frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dU_2}{dt}$, $\frac{dU_3}{dt}$, ... en sorte qu'en faisant pour abréger

$$(5)\begin{cases} N = \frac{ds}{dt}\,d\left(\frac{a\cos\theta}{dt}\right) + \frac{ds'}{dt}\,d\left(\frac{a'\cos\theta'}{dt}\right) + \frac{ds''}{dt}\,d\left(\frac{a''\cos\theta''}{dt}\right) + \frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a'''\cos\theta'''}{dt}\right)\cdots\frac{dT}{dt} \\ N_1 = \frac{ds}{dt}\,d\left(\frac{a_1\cos\theta_1}{dt}\right) + \frac{ds'}{dt}\,d\left(\frac{a_1'\cos\theta_1'}{dt}\right) + \frac{ds''}{dt}\,d\left(\frac{a_1''\cos\theta_1''}{dt}\right) + \frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a_1'''\cos\theta_1'''}{dt}\right)\cdots\frac{dT_1}{dt} \\ N_2 = \frac{ds}{dt}\,d\left(\frac{a_2\cos\theta_2}{dt}\right) + \frac{ds'}{dt}\,d\left(\frac{a_2'\cos\theta_2'}{dt}\right) + \frac{ds''}{dt}\,d\left(\frac{a_2''\cos\theta_2''}{dt}\right) + \frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a_2'''\cos\theta_2'''}{dt}\right)\cdots\frac{dT_2}{dt} \\ N_3 = \frac{ds}{dt}\,d\left(\frac{a_3\cos\theta_3}{dt}\right) + \frac{ds'}{dt}\,d\left(\frac{a_3'\cos\theta_3'}{dt}\right) + \frac{ds''}{dt}\,d\left(\frac{a_3''\cos\theta_3''}{dt}\right) + \frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a_3'''\cos\theta_3'''}{dt}\right)\cdots\frac{dT_3}{dt} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

nous aurons

$$(6)\begin{cases} \frac{dU}{dt} = a\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt} + a\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt} + a''\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt} + a'''\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt} + \cdots + N \\ \frac{dU_1}{dt} = a_1\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta_1\right)}{dt} + a_1'\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta_1'\right)}{dt} + a_1''\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta_1''\right)}{dt} + a_1'''\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta_1'''\right)}{dt} + \cdots + N_1 \\ \frac{dU_2}{dt} = a_2\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta_2\right)}{dt} + a_2'\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta_2'\right)}{dt} + a_2''\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta_2''\right)}{dt} + a_2'''\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta_2'''\right)}{dt} + \cdots + N_2 \\ \frac{dU_3}{dt} = a_3\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta_3\right)}{dt} + a_3'\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta_3'\right)}{dt} + a_3''\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta_3''\right)}{dt} + a_3'''\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt} + \cdots + N_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

En mettant ces valeurs dans les inégalités (4), on aura les conditions des déplacemens possibles, calculées jusqu'au dt^3.

Le déplacement effectif du système doit être compris parmi les déplacemens possibles; ainsi, si l'on ne tient pas compte de dt^2, il satisfera aux conditions (3); mais si l'on conserve dt^2, le déplacement effectif remplira les conditions (4).

Désignons par $v, v', v'', v''', \ldots$ les vitesses des masses $m, m', m'', m''', \ldots$ au bout du temps t, par $\omega, \omega', \omega'', \omega''', \ldots$ les angles que les directions de $v, v', v'', v''', \ldots$ font respectivement avec les directions données $(A), (A'), (A''), (A'''), \ldots$ par $\omega_1, \omega_1', \omega_1'', \omega_1''', \ldots$ les angles que les mêmes directions de $v, v', v'', v''', \ldots$ font respectivement avec le second système des directions données $(A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), \ldots$ par $\omega_2, \omega_2', \omega_2'', \omega_2''', \ldots$ les angles que les vitesses $v, v', v'', v''', \ldots$ font respectivement avec le troisième système des directions données $(A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), \ldots$ ainsi de suite. Désignons aussi par $V, V_1, V_2, V_3, \ldots$ ce que deviennent les quantités $U, U_1, U_2, U_3, \ldots$ quand on y remplace les ds par les $v\,dt$ et les θ par les ω, c'est-à-dire faisons

$$(7)\cdots\begin{cases} a\,v\cos\omega + a'\,v'\cos\omega' + a''\,v''\cos\omega'' + a'''\,v'''\cos\omega''' + \cdots + T = V \\ a_1 v\cos\omega_1 + a_1' v'\cos\omega_1' + a_1'' v''\cos\omega_1'' + a_1''' v'''\cos\omega_1''' + \cdots + T_1 = V_1 \\ a_2 v\cos\omega_2 + a_2' v'\cos\omega_2' + a_2'' v''\cos\omega_2'' + a_2''' v'''\cos\omega_2''' + \cdots + T_2 = V_2 \\ a_3 v\cos\omega_3 + a_3' v'\cos\omega_3' + a_3'' v''\cos\omega_3'' + a_3''' v'''\cos\omega_3''' + \cdots + T_3 = V_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nous aurons en ne tenant pas compte de dt^2

$$(\alpha)\cdots\cdots V > 0,\; V_1 > 0,\; V_2 > 0,\; V_3 > 0, \cdots$$

pour condition que le déplacement effectif du système doit remplir; le signe $>$, dans les inégalités qui précèdent, n'exclut point celui de l'égalité. Mais si l'on tient compte de dt^2 et si l'on fait pour abréger

$$(8)\begin{cases}\dfrac{v\,d\,(a\cos\omega)}{dt}+\dfrac{v'd\,(a'\cos\omega')}{dt}+\dfrac{v''d\,(a''\cos\omega'')}{dt}+\dfrac{v'''d\,(a'''\cos\omega''')}{dt}+\ldots+\dfrac{dT}{dt}=M\\[2mm] \dfrac{v\,d(a_1\cos\omega_1)}{dt}+\dfrac{v'd(a_1'\cos\omega_1')}{dt}+\dfrac{v''d(a_1''\cos\omega_1'')}{dt}+\dfrac{v'''d(a_1'''\cos\omega_1''')}{dt}+\ldots+\dfrac{dT_1}{dt}=M_1\\[2mm] \dfrac{v\,d(a_2\cos\omega_2)}{dt}+\dfrac{v'd(a_2'\cos\omega_2')}{dt}+\dfrac{v''d(a_2''\cos\omega_2'')}{dt}+\dfrac{v'''d(a_2'''\cos\omega_2''')}{dt}+\ldots+\dfrac{dT_2}{dt}=M_2\\[2mm] \dfrac{v\,d(a_3\cos\omega_3)}{dt}+\dfrac{v'd(a_3'\cos\omega_3')}{dt}+\dfrac{v''d(a_3''\cos\omega_3'')}{dt}+\dfrac{v'''d(a_3'''\cos\omega_3''')}{dt}+\ldots+\dfrac{dT_3}{dt}=M_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

les conditions du déplacement effectif deviendront

$$(\beta)\ \cdots\cdots\begin{cases}V\,dt+\dfrac{dV}{dt}\dfrac{dt^2}{2}>0\\[2mm] V_1dt+\dfrac{dV_1}{dt}\dfrac{d^2}{2}>0\\[2mm] V_2dt+\dfrac{dV_2}{dt}\dfrac{dt^2}{2}>0\\[2mm] V_3dt+\dfrac{d\ \ _3}{dt}\dfrac{dt^2}{2}>0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

le signe $>$ n'excluant pas celui de l'égalité, et les différentielles $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dV_1}{dt}$, $\frac{dV_2}{dt}$, $\frac{dV_3}{dt}$, ... étant données par les équations

$$(9)\begin{cases}\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{a\,d\,(v\cos\omega)}{dt}+\dfrac{a'd\,(v'\cos\omega')}{dt}+\dfrac{a''d\,(v''\cos\omega'')}{dt}+\dfrac{a'''d\,(v'''\cos\omega''')}{dt}+\ldots M\\[2mm] \dfrac{dV_1}{dt}=\dfrac{a_1d(v\cos\omega_1)}{td}+\dfrac{a_1'd(v'\cos\omega_1')}{dt}+\dfrac{a_1''d(v''\cos\omega_1'')}{dt}+\dfrac{a_1'''d(v'''\cos\omega_1''')}{dt}+\ldots M_1\\[2mm] \dfrac{dV_2}{dt}=\dfrac{a_2d(v\cos\omega_2)}{dt}+\dfrac{a_2'd(v'\cos\omega_2')}{dt}+\dfrac{a_2''d(v''\cos\omega_2'')}{dt}+\dfrac{a_2'''d(v'''\cos\omega_2''')}{dt}+\ldots M_2\\[2mm] \dfrac{dV_3}{dt}=\dfrac{a_3d(v\cos\omega_3)}{dt}+\dfrac{a_3'd(v'\cos\omega_3')}{dt}+\dfrac{a_3''d(v''\cos\omega_3'')}{dt}+\dfrac{a_3'''d(v'''\cos\omega_3''')}{dt}+\ldots M_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Il faut bien faire attention à ce que, dans ces formules, les différences $d(v\cos\omega)$, $d(v'\cos\omega')$, $d(v''\cos\omega'')$, $d(v'''\cos\omega''')$, $\cdots$ $d(v\cos\omega_1)$, $d(v'\cos\omega_1')$, $\cdots$ ne sont pas complètes, de même que les différences $d(a\cos\omega)$, $d(a'\cos\omega')$,

$d(a''\cos\omega'')$, $d(a'''\cos\omega''')$, ..., $d(a\cos\omega_1)$, $d(a_1'\cos\omega_1')$, ... qui entrent dans M, M_1, M_2, M_3, ... Dans les premières de ces différences, on doit regarder comme fixes les directions (A), (A'), (A''), (A'''), ..., (A_1), (A_1'), ... et ne faire varier les ω qu'autant que ces angles varient par le changement des directions des vitesses v, v', v'', v''', ... pendant le temps dt. Dans les secondes, au contraire, les ω ne doivent varier que par le changement des directions (A), (A'), (A''), (A'''), ... (A_1), (A_1'), ..., en sorte que ω, par exemple, désignant l'angle que la direction de (A), au bout du temps t, fait avec la direction de v, on doit prendre, dans $d(a\cos\omega)$, pour $\omega + d\omega$ l'angle que la même direction de la vitesse v fait avec la direction (A), au bout du temps $t + dt$.

8. Nous allons examiner de plus près les conditions (3) ou (4), dans le but d'en distinguer celles qui gênent le déplacement du système de celles qui ne le gênent pas. Les premières seules doivent être conservées. On pourra faire abstraction des dernières, car elles se rapporteront aux obstacles qui actuellement ne s'opposent à rien.

Pour découvrir, parmi les conditions (4), celles qui gènent le mouvement du système (s), on déterminera le déplacement de (s), pendant l'instant dt, en supposant toutes les masses m, m', m'', m''', ... entièrement libres, et l'on substituera ce déplacement dans les inégalités (4); toutes les inégalités qui ne seront pas satisfaites par la substitution dont il s'agit, gêneront le déplacement de (s); au contraire toutes celles que la même substitution vérifie, se rapporteront aux obstacles qui actuellement ne s'opposent à rien et dont par conséquent on pourra faire abstraction.

Si l'on ne tient pas compte de dt^2 les déplacemens que les masses m, m', m'', m''', ... auraient, si elles étaient libres, seront les mêmes que leurs déplacemens effectifs : c'est-à-dire : $v\,dt$ pour la masse m, $v'dt$ pour la masse m', $v''dt$ pour la masse m'', ainsi de suite. Mais si l'on tient compte de dt^2, il faut aux déplacemens qui précèdent ajouter respectivement les effets $P\frac{dt^2}{2}$, $P'\frac{dt^2}{2}$

$P''\frac{dt^2}{2}$, $P'''\frac{dt^2}{2}$, ... des forces P, P', P'', P''', ... chacun dans la direction de la force à laquelle il appartient. De cette manière, en désignant par α, α', α'', α''', ... les angles que les forces P, P', P'', P''', . . . font respectivement avec les directions données (A), (A'), (A''), (A'''), ..., par α_1, α_1', α_1'', α_1''', ... les angles que les directions données (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ... par α_2, α_2', α_2'', α_2''', ... les angles que les mêmes forces font respectivement avec un troisième système des directions données (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ... ainsi de suite; les projections des déplacemens que les masses m, m', m'', m''', ... auraient, si elles étaient libres, seront respectivement

$$v\cos\omega\,dt + P\cos\alpha\frac{dt^2}{2},\quad v'\cos\omega' dt + P'\cos\alpha'\frac{dt^2}{2},\quad v''\cos\omega'' dt + P''\cos\alpha''\frac{dt^2}{2},$$
$$v'''\cos\omega''' dt + P'''\cos\alpha'''\frac{dt^2}{2}, \ldots\ldots$$

pour les directions (A), (A'), (A''), (A'''), ...

$$v\cos\omega_1 dt + P\cos\alpha_1\frac{dt^2}{2},\quad v'\cos\omega_1' dt + P'\cos\alpha_1'\frac{dt^2}{2},\quad v''\cos\omega_1'' dt + P''\cos\alpha_1''\frac{dt^2}{2},$$
$$v'''\cos\omega_1''' dt + P'''\cos\alpha'''\frac{dt^2}{2}, \ldots\ldots$$

pour les directions (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ...

$$v\cos\omega_2 dt + P\cos\alpha_2\frac{dt^2}{2},\quad v'\cos\omega_2' dt + P'\cos\alpha_2'\frac{dt^2}{2},\quad v''\cos\omega_2'' dt + P''\cos\alpha_2''\frac{dt^2}{2},$$
$$v''\cos\omega_2''' dt + P'''\cos\alpha_2'''\frac{dt^2}{2}, \ldots\ldots$$

pour les directions (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ...

$$v\cos\omega_3 dt + P\cos\alpha_3\frac{dt^2}{2},\quad v'\cos\omega_3' dt + P'\cos\omega_3''\frac{dt^2}{2},\quad v''\cos\omega_3'' dt + P''\cos\alpha_3''\frac{dt^2}{2},$$
$$v'''\cos\omega_3''' dt + P'''\cos\alpha_3'''\frac{dt^2}{2}, \ldots\ldots$$

pour les directions (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3'''), ... ainsi de suite.

En introduisant ces déplacemens dans les conditions (4) et en faisant pour abréger

$$(10)\begin{cases} a\,P\cos\alpha + a'\,P'\cos\alpha' + a''\,P''\cos\alpha'' + a'''\,P'''\cos\alpha''' + \cdots\cdots + M = -Y \\ a_1 P\cos\alpha_1 + a_1' P'\cos\alpha_1' + a_1'' P''\cos\alpha_1'' + a_1''' P'''\cos\alpha_1''' + \cdots\cdots + M_1 = -Y_1 \\ a_2 P\cos\alpha_2 + a_2' P'\cos\alpha_2' + a_2'' P''\cos\alpha_2'' + a_2''' P'''\cos\alpha_2''' + \cdots\cdots + M_2 = -Y_2 \\ a_3 P\cos\alpha_3 + a_3' P'\cos\alpha_3' + a_3'' P''\cos\alpha_3'' + a_3''' P'''\cos\alpha_3''' + \cdots\cdots + M_3 = -Y_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

les premiers membres de (4) deviendront respectivement

$$(\gamma)\begin{cases} V\,dt - Y\frac{dt^2}{2} \\ V_1 dt - Y_1\frac{dt^2}{2} \\ V_2 dt - Y_2\frac{dt^2}{2} \\ V_3 dt - Y_3\frac{dt^2}{2} \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Maintenant, il faut faire attention aux signes des quantités (γ), ce qui est facile, puisque les V et les Y ne renferment que les quantités dépendantes de la position et de l'état du système au commencement de dt, quantités qui sont censées connues. On doit rejeter celles des conditions (4) qui conduisent aux quantités positives parmi les (7). Ainsi, on supprimera en premier lieu toutes les conditions parmi les (4) qui conduisent aux V positifs, et l'on ne gardera que celles qui fournissent pour les V des valeurs négatives ou zéro. Or, il est visible par les inégalités (α) ou (β) qu'aucune des quantités V ne peut être négative; ainsi toutes celles, qui ne sont pas positives, ne peuvent être que zéro, donc en ne comptant parmi les (4) aucune inégalité, conduisant aux V positifs, on aura $V=0$, $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3=0$, ... et les quantités (γ) deviendront $-Y\frac{dt^2}{2}$, $-Y_1\frac{dt^2}{2}$, $Y_2\frac{dt^2}{2}$, $-Y_3\frac{dt^2}{2}$, ... Maintenant on doit supprimer encore parmi les restantes des inégalités (4), toutes celles qui conduisent aux Y négatifs, en sorte que, toutes les suppressions faites, il ne restera des (4) que les conditions qui donnent à la fois

$$(11)\begin{cases} V = 0 \\ V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$(12)\begin{cases} Y > 0 \\ Y_1 > 0 \\ Y_2 > 0 \\ Y_3 > 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

le signe $>$ n'exclut pas celui de l'égalité. Ainsi, après avoir formé les quantités V, on en trouvera qui sont zéro, et d'autres qui sont positives; aucune ne peut être négative. On doit supprimer entièrement toutes celles, parmi les conditions (4), qui conduisent aux V positifs; puis on formera les Y et seulement ceux qui répondent aux inégalités (4) qui restent encore, et parmi ces dernières on supprimera toutes celles qui conduisent aux Y négatifs; en sorte que, toutes les suppressions faites, il ne restera des inégalités (4) que celles qui donnent aux V les valeurs zéro et aux Y les valeurs positives ou zéro. Il sera facile de juger des valeurs des V et du signe et des valeurs des Y, puisque toutes ces quantités ne dépendent que de la position et de l'état du système au commencement de dt.

Maintenant il ne sera plus question que des V et des Y qui remplissent les conditions (11) et (12). Les signes des Y montrent que les quantités V tendent à diminuer, ou, du moins, ne tendent pas à augmenter. Mais comme aucune de ces quantités ne peut diminuer, elles doivent toutes conserver leur valeur zéro, et par conséquent nous aurons

$$(13)\begin{cases}\frac{dV}{dt}=0\\ \frac{dV_1}{dt}=0\\ \frac{dV_2}{dt}=0\\ \frac{dV_3}{dt}=0\\ \ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

9. Les formules précédentes établissent déjà des relations entre les déplacemens instantanés des masses m, m', m'', m''', ... ; déplacemens dont la détermination est notre objet principal. Mais les équations (13) n'étant pas en nombre suffisant pour trouver tout ce qu'il y a d'inconnu dans ces déplacemens, nous allons y ajouter les équations qui manquent à cet objet, et qu'on ne peut obtenir que par la considération des forces, tant motrices que celles d'inertie, qui sollicitent le système. Au reste, les considérations dont nous parlons, loin de présenter une difficulté quelconque, sont encore plus simples que celles que nous avons employées pour obtenir les équations (13).

S'il s'agit de distinguer le déplacement effectif du système (s) de tout autre déplacement, s'il est d'abord visible que le déplacement effectif doit se trouver parmi les déplacemens possibles, — et même, nous avons prouvé qu'il se trouve parmi ceux des déplacemens possibles qui satisfont aux conditions (13), — il ne reste qu'à les distinguer parmi ces derniers déplacemens.

Pour cet objet, imaginons un déplacement virtuel quelconque, désignons le pour abréger le discours par (V), et représentons par G, G', G'', G''', ... les forces d'inertie appartenant respectivement aux masses m, m', m'', m''', ... et se rapportant au déplacement (V) du système. Désignons aussi par R, R', R'', R''', ... les résultantes la première de mP et de G, la seconde de $m'P'$ et de G', la troisième de $m''P''$ et de G'', ainsi de suite.

Cela posé, nous pouvons attribuer au système (s) le déplacement (V) pourvu que nous ajoutions convenablement à ce déplacement, celui que produiront les

forces motrices R, R', R'', R''', ... respectivement appliquées aux masses m, m', m'', m''', ... Il est visible que le déplacement (V) en se combinant avec celui que donnent les forces R, R', R'', R''',.... conduira au déplacement actuel. Si donc (V) était déjà le déplacement actuel, les forces R, R', R'', R''', ... relatives à ce déplacement ne seraient capables d'aucun effet. Au contraire si (V) n'est pas le déplacement actuel, les forces R, R', R'', R''', ... obtiendront nécessairement un certain effet.

Voilà donc un critérium bien simple pour distinguer le déplacement effectif de tout déplacement virtuel. Les forces R, R', R'', R''', ... relatives au déplacement effectif, ne sont capables d'aucun effet, ou se détruisent mutuellement, et cela n'arrive que pour le déplacement actuel; pour tout autre déplacement, les forces R, R', R'', R''', . . . obtiendront infailliblement un certain effet.

Les forces R, R', R'', R''', ..., relatives au déplacement actuel, s'appellent *forces perdues*. Leur considération, d'après ce qui précède, est d'une haute importance. En effet, les conditions qui distinguent le déplacement actuel de tout déplacement possible, sont équivalentes avec celles qui expriment l'équilibre des forces perdues. Nous allons procéder à la recherche de ces dernières conditions.

Pour se trouver en équilibre, les forces perdues ne doivent chercher à produire que les déplacemens qui, en se combinant avec celui que le système reçoit actuellement, conduisent aux déplacemens impossibles. Afin d'exprimer cette condition, imaginons un quelconque des déplacemens dont les forces perdues soient capables; nommons (c) ce déplacement et supposons que δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... représentent les mouvemens des masses m, m', m'', m''',.... relatifs au déplacement (c) du système. Les quantités δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... par leur variabilité pourront se rapporter à tous les déplacemens du système que les forces perdues sont capables de produire.

Si maintenant nous désignons par φ, φ', φ'', φ''', ... les angles que

les mouvemens δs, $\delta s'$, $\delta e''$, $\delta s'''$, ... font respectivement avec les directions données (A), (A'); (A''), $A''')$, ..., et si nous convenons de représenter par les mêmes lettres, avec des numéros en bas, les angles analogues se rapportant aux mêmes mouvemens δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... et aux autres systèmes (A_1), (A_1') (A_1'') (A_1''') ... (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ..., (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3'''), ... des directions données, nous aurons $\delta s\cos\theta$, $\delta s'\cos\theta'$, $\delta s''\cos\theta''$, $\delta s'''\cos\theta'''$, ... pour projections de δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... sous les directions (A), (A'), (A''), (A'''), ... et en mettant successivement les numéros 1, 2, 3, ... en bas des angles φ, φ', φ'', φ''', ..., on obtiendra les projections des mêmes mouvemens δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... sous les autres directions données. Ensuite, si l'on combine les déplacemens δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... avec les déplacemens actuels, on arrivera aux mouvemens des masses m, m', m'', m''', ..., dont les projections sont respectivement:

$$v\cos dt+\frac{d.v\cos\omega}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s\cos\varphi,\quad v'\cos\omega' dt+\frac{d.v'\cos\omega'}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'\cos\varphi',\quad v''\cos\omega'' d$$
$$+\frac{d\ v\cos\omega''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s''\cos\omega'',\quad v'''\cos\omega''' dt+\frac{d.v'''\cos\omega'''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'''\cos\varphi''',\cdots$$

pour les directions (A), (A'), (A''), (A'''), ...;

$$v\cos\omega_1 dt+\frac{d.v\cos\omega_1}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s\cos\varphi_1,\ v'\cos\omega_1' dt+\frac{d.v'\cos\omega_1'}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'\cos\varphi_1',\ v''\cos\omega'' dt$$
$$+\frac{d.v''\cos\omega_1''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s''\cos\varphi_1'',\quad v'''\cos\omega_1''' dt+\frac{d.v'''\cos\omega_1'''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'''\cos\varphi_1''',\cdots$$

pour les directions (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ...;

$$v\cos\omega_2 dt+\frac{d.v\cos\omega_2}{t}\frac{dt^2}{2}+\delta s\cos\varphi_2,\ v'\cos\omega_2' dt+\frac{d.v\cos\omega_2''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'\cos\varphi_2',v''\cos\omega_2'' dt$$
$$+\frac{d.v''\cos\omega_2''}{d2}\frac{dt_2}{2}+\delta s''\cos\varphi_2'',\ v'''\cos\omega_2''' dt+\frac{d.v'''\cos\omega_2'''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'''\cos\varphi_2''',\cdots$$

pour les directions (A_2), (A_2'), (A_2''), (A'''_2), ...;

$$v\cos\omega_3 dt+\frac{d.v\cos\omega_3}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s\cos\varphi_3,\ v'\cos\omega_3' dt+\frac{d.v'\cos\omega_3'}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'\cos\varphi_3',\ v''\cos\omega_3''$$
$$+\frac{d.v''\cos\omega_3''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s''\cos\varphi_3'',\ v'''\cos\omega_3''' dt+\frac{d.v'''\cos\omega_3'''}{dt}\frac{dt^2}{2}+\delta s'''\cos\varphi_3''',\cdots$$

pour les directions (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3'''), ...;
ainsi de suite.

Nous répétons ici une remarque qui a été déjà faite, et qui consiste en ce que les ω, dans les formules précédentes ne doivent varier que par les variations des vitesses v, v', v'', v''', ... et nullement par le changement des directions données (A), (A'), ...

Si l'on substitue les projections qui précèdent dans les conditions (4) et si l'on fait pour abréger

$$(14)\begin{cases} a\,\delta s\cos\varphi + a'\,\delta s'\cos\varphi' + a''\,\delta s''\cos\varphi'' + a'''\,\delta s'''\cos\varphi''' + \cdots = \delta L \\ a_1\delta s\cos\varphi_1 + a_1'\delta s'\cos\varphi_1' + a_1''\delta s''\cos\varphi_1'' + a_1'''\delta s'''\cos\varphi_1''' + \cdots = \delta L_1 \\ a_2\delta s\cos\varphi_2 + a_2'\delta s'\cos\varphi_2' + a_2''\delta s''\cos\varphi_2'' + a_2'''\delta s'''\cos\varphi_2''' + \cdots = \delta L_2 \\ a_3\delta s\cos\varphi_3 + a_3'\delta s'\cos\varphi_3' + a_3''\delta s''\cos\varphi_3'' + a_3'''\delta s'''\cos\varphi_3''' + \cdots = \delta L_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

les premiers membres de (4) deviendront respectivement

$$V\,dt + \frac{dV}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L$$

$$V_1dt + \frac{dV_1}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L_1$$

$$V_2dt + \frac{dV_2}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L_2$$

$$V_3dt + \frac{dV_3}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et comme le déplacement qu'on a substitué dans les inégalités (4) sont impossibles, les quantités qui précèdent ne doivent pas satisfaire à la fois à toutes les conditions

$$V\,dt + \frac{dV}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L > 0$$

$$V_1dt + \frac{dV_1}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L_1 > 0$$

$$V_2dt + \frac{dV_2}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L_2 > 0$$

$$V_3dt + \frac{dV_3}{dt}\frac{dt^2}{2} + \delta L_3 > 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou bien, eu égard aux équations (12) et (13), les déplacemens δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... ne pourront pas remplir à la fois toutes les conditions $\delta L > 0$, $\delta L_1 > 0$, $\delta L_2 > 0$, $\delta L_3 > 0$, ... Ainsi, pour l'équilibre des forces perdues, il est nécessaire et il suffit, que ces forces soient incapables de produire aucun déplacement du système satisfaisant aux conditions ci-dessus.

10. Supposons que les quantités δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... appartiennent non seulement à ceux des déplacemens du système, dont les forces perdues sont capables, mais encore, à tous les autres déplacemens tant possibles que non, ou plutôt considérons δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... comme tout-à-fait arbitraires. Nous devons exprimer que les forces perdues R, R', R'', R''', ... sont incapables de produire aucun déplacement des systèmes satisfaisant aux conditions

$$(15)\left\{\begin{array}{l} \delta L > 0 \\ \delta L_1 > 0 \\ \delta L_2 > 0 \\ \delta L_3 > 0 \\ \cdots\cdots \end{array}\right.$$

le signe $\geqq$ n'exclut point celui de l'égalité.

Or on sait qu'un système des forces est capable de tout déplacement qui fournit, pour son moment total, une valeur positive et aucun de ceux qui correspondent aux valeurs négatives ou zéro du moment total. Ainsi, pour que les forces perdues soient incapables de produire aucun des déplacemens satisfaisans aux conditions (15), il faut que leur moment soit négatif ou zéro pour ces déplacemens, c'est-à-dire il faut que la fonction

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \cdots\cdots$$

dans laquelle φ, φ', φ'', φ''', ... désignent respectivement les angles $\widehat{R\delta s}$, $\widehat{R'\delta s'}$, $\widehat{R''\delta s''}$, $\widehat{R'''\delta s'''}$, ... et qui par conséquent représente le moment des forces R, R', R'', R''', ... soit négative ou zéro toutes les fois que δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... remplissent les conditions (15).

La solution de la question qui consiste à rendre la fonction

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''ds'''\cos\psi''' + \ldots\ldots$$

négative ou zéro toutes les fois que les fonctions de même nature, δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... sont positives ou zéro, appartient à l'algèbre la plus élémentaire. Il est nécessaire, et il suffit que $R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots\ldots$ puisse se réduire à une fonction linéaire de δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... avec des coëfficiens négatifs. Ainsi il n'y a qu'à faire, quels que soient δs, $\delta s'$ $\delta s''$, $\delta s'''$, ...,

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \cdots = \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots.$$

et à y ajouter la condition que les λ sont tous négatifs. Ou bien, si l'on veut éviter de considérer les λ comme négatifs, on peut faire

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots = -(\lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots)$$

alors tous les λ seront positifs. Il est évident, par la dernière équation, comme par celle qui la précède, que le moment $R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots.$ sera négatif ou zéro toutes les fois que les fonctions δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... seront positives ou zéro.

En transportant tous les termes d'un même côté, l'équation de l'équilibre des forces perdues deviendra

$$(16)\quad R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots\ldots + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 \cdots\cdots = 0.$$

elle doit avoir lieu quelles que soient δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... tant en grandeur que pour la direction. Mais il ne faut pas oublier d'ajouter à l'équation (16) les inégalités

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \\ \lambda_3 > 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Désignons par ε, ε', ε'', ε''', ... et par θ, θ', θ'', θ''', ... les angles que les déplacemens δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... font respectivement avec les forces P, P', P'', P''', ... et avec les directions des vitesses v, v', v'', v''', . . . nous aurons

$$R\cos\psi = m\left(P\cos\varepsilon - \frac{d.v\cos\theta}{dt}\right)$$
$$R'\cos\psi' = m'\left(P'\cos\varepsilon' - \frac{d.v'\cos\theta'}{dt}\right)$$
$$R''\cos\psi'' = m''\left(P''\cos\varepsilon'' - \frac{d.v''\cos\theta''}{dt}\right)$$
$$R'''\cos\psi''' = m'''\left(P'''\cos\varepsilon''' - \frac{d.v'''\cos\theta'''}{dt}\right)$$
. . . .

En substituant ces valeurs dans la formule (16), on trouve l'équation suivante pour le mouvement d'un système quelconque

(18) $$m\left(P\cos\varepsilon - \frac{d.v\cos\theta}{dt}\right) + m'\left(P'\cos\varepsilon' - \frac{d.v'\cos\theta'}{dt}\right) + m''\left(P''\cos\varepsilon'' - \frac{d.v''\cos\theta''}{dt}\right)$$
$$+ m'''\left(P'''\cos\varepsilon''' - \frac{d.v'''\cos\theta'''}{dt}\right) + \cdots + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \cdots = 0.$$

cette équation réunie aux formules (13) renferme tout ce qui est nécessaire à la détermination du déplacement effectif du système (s); ainsi la solution générale de la question que nous nous sommes proposés de résoudre est contenue dans les équations (18) et (13). Quant aux inégalités (17), nous verrons qu'elles sont toujours satisfaites en même temps que les inégalités (12) et réciproquement on peut remplacer les inégalités (12) par les conditions (17); ainsi il suffira d'avoir égard aux unes ou aux autres de ces inégalités ou bien ne considérer que quelques unes parmi les inégalités (12) et remplacer les autres par les (17).

11. L'équation (18) devant avoir lieu pour toutes les valeurs des quantités δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... il est nécessaire que les coëfficiens de ces quantités se réduisent séparément à zéro, sans quoi la formule (18) établirait une relation entre des grandeurs absolument arbitraires, ce qui ne se peut pas; ainsi nous aurons

$$(19)\left\{\begin{array}{l}
m\left(P\cos\varepsilon - \frac{d.v\cos\theta}{dt}\right) + \lambda a\cos\varphi + \lambda_1 a_1\cos\varphi_1 + \lambda_2 a_2\cos\varphi_2 + \lambda_3 a_3\cos\varphi_3 + \ldots = 0 \\
m'\left(P'\cos\varepsilon' - \frac{d.v'\cos\theta'}{dt}\right) + \lambda a'\cos\varphi' + \lambda_1 a_1'\cos\varphi_1' + \lambda_2 a_2'\cos\varphi_2' + \lambda_3 a_3'\cos\varphi_3' + \ldots = 0 \\
m''\left(P''\cos\varepsilon'' - \frac{d.v''\cos\theta''}{dt}\right) + \lambda a''\cos\varphi'' + \lambda_1 a_1''\cos\varphi_1'' + \lambda_2 a_2''\cos\varphi_2'' + \lambda_3 a_3'''\cos\varphi_3''' + \ldots = 0 \\
m'''\left(P'''\cos\varepsilon''' - \frac{d.v'''\cos\theta'''}{dt}\right) + \lambda a'''\cos\varphi''' + \lambda_1 a_1'''\cos\varphi_1''' + \lambda_2 a_2'''\cos\varphi_2''' + \lambda_3 a_3'''\cos\varphi_3''' + \ldots = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

ou bien

$$(20)\left\{\begin{array}{l}
m\frac{d.v\cos\theta}{dt} = m\,P\cos\varepsilon + \lambda a\cos\varphi + \lambda_1 a_1\cos\varphi_1 + \lambda_2 a_1\cos\varphi_2 + \lambda_3 a_3\cos\varphi_3 + \ldots \\
m'\frac{d.v'\cos\theta'}{dt} = m'P'\cos\varepsilon' + \lambda a'\cos\varphi' + \lambda_1 a_1'\cos\varphi_1' + \lambda_2 a_2'\cos\varphi_2' + \lambda_3 a_3'\cos\varphi_3' + \ldots \\
m''\frac{d.v''\cos\theta''}{dt} = m''P''\cos\varepsilon'' + \lambda a''\cos\varphi'' + \lambda_1 a_1''\cos\varphi_1'' + \lambda_2 a_2''\cos\varphi_2'' + \lambda_3 a_3''\cos\varphi'' + \ldots \\
m'''\frac{d.v'''\cos\theta''}{dt} = m'''P'''\cos\varepsilon''' + \lambda a'''\cos\varphi''' + \lambda_1 a_1'''\cos\varphi_1''' + \lambda_2 a'''_2\cos\varphi_2''' + \lambda_3 a_3'''\cos\varphi''' + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Ces équations feraient connaître les projections, sur des directions quelconques, des déplacemens actuels de toutes les masses m, m', m'', m''', . . . si les quantités λ, λ_1, λ_2, λ_3, ... étaient connues. Tout se réduit donc à la détermination des λ, λ_1, λ_2, λ_3, ..., mais avant de s'en occuper, il est bon de faire observer que, d'après les formules (19) ou (20), le déplacement actuel du système (s) est le même que si toutes les masses m, m', m'', m''', ... étaient entièrement libres et sollicitées, outre les forces données, encore par d'autres forces qui tiennent lieu d'équations de conditions et qui sont

$$\lambda a,\ \lambda_1 a_1,\ \lambda_2 a_2,\ \lambda_3 a_3,\ \ldots\ldots$$

pour la masse, m,

$$\lambda a',\ \lambda_1 a_1',\ \lambda_2 a_2',\ \lambda_3 a_3',\ \ldots\ldots$$

pour le masse m',

$$\lambda a'',\ \lambda_1 a_1'',\ \lambda_2 a_2'',\ \lambda_3 a_3'',\ \ldots\ldots$$

pour la masse m'', ainsi de suite. Les directions de ces forces sont connues: elles coïncident respectivement avec les directions données

(A), (A_1), (A_2), (A_3), ...
(A'), (A_1'), (A_2'), (A_3'), ...
(A''), (A_1''), (A_2''), (A_3''), ...
. . . .

Désignons par Q la résultante des forces motrices λa, $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2$, $\lambda_3 a_3$, ..., par Q' la résultante des forces $\lambda a'$, $\lambda_1 a_1'$, $\lambda_2 a_2'$, $\lambda_3 a_3'$, ..., par Q'' la résultante des forces $\lambda a''$, $\lambda_1 a_1''$ $\lambda_2 a_2''$, $\lambda_3 a_3''$, ..., par Q''' la résultante des forces $\lambda a'''$, $\lambda_1 a_1'''$, $\lambda_2 a_2'''$, $\lambda_3 a_3'''$, ..., ainsi de suite. Nous pouvons, en usant des relations bien connues des résultantes avec leurs composantes, remplacer les équations (20) par

$$(21)\begin{cases} m\,\dfrac{d.v\cos\theta}{2} = m\,P\cos\varepsilon + Q\cos\psi \\ m'\dfrac{d.v'\cos\theta'}{dt} = m'P'\cos\varepsilon' + Q'\cos\psi' \\ m''\dfrac{d.v''\cos\theta''}{dt} = m''P''\cos\varepsilon'' + Q''\,\psi'' \\ m'''\dfrac{d.v'''\cos\theta'''}{dt} = m'''P'''\cos\varepsilon''' + Q'''\,\psi''' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ψ, ψ', ψ'', ψ''', . . . représentant les angles que les forces Q, Q', Q'', Q''', ... font avec les directions auxquelles appartiennent les angles θ, θ', θ'', θ''', ... et ε, ε', ε'', ε''', ...

12. Nous allons nous occuper maintenant de la détermination des quantités λ, λ_1, λ_2, λ_3, ... Pour cela, après avoir retranché des (10) les équations (13) substituons pour $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dV_1}{dt}$, $\frac{dV_2}{dt}$, $\frac{dV_3}{dt}$, ... leurs valeurs fournies par les équations (9), nous aurons

$$(22)\left\{\begin{aligned}
&a\left(\frac{d.v\cos\omega}{dt}-P\cos\alpha\right)+a'\left(\frac{d.v'\cos\omega'}{dt}-P'\cos\alpha'\right)+a''\left(\frac{d.v''\cos\omega''}{dt}-P''\cos\alpha''\right)\\
&\qquad+a'''\left(\frac{d.v'''\cos\omega'''}{dt}-P'''\cos\alpha'''\right)+\ldots\ldots=Y\\
&a_1\left(\frac{d.v\cos\omega}{dt}-P\cos\alpha_1\right)+a_1'\left(\frac{d.\ '\cos\omega_1}{dt}-P'\cos\alpha_1'\right)+a_1''\left(\frac{d.v''\cos\omega_1''}{dt}-P''\cos\alpha_1''\right)\\
&\qquad+a_1'''\left(\frac{d.v'''\cos\omega_1'''}{dt}-P'''\cos\alpha_1'''\right)+\ldots\ldots=Y_1\\
&a_2\left(\frac{d.v\cos\omega}{dt}-P\cos\alpha_2\right)+a_3'\left(\frac{d.v'\cos\omega^{2'}}{at}-P'\cos\alpha_2'\right)+a_2''\left(\frac{d.v''\cos\omega_2''}{dt}-P''\cos\alpha_2''\right)\\
&\qquad+a_2'''\left(\frac{d.v'''\cos\omega_2'''}{dt}-P'''\cos\alpha_2'''\right)+\ldots\ldots=Y_2\\
&a_3\left(\frac{d.v\cos\omega}{td}-P\cos\alpha_3\right)+a_2'\left(\frac{d.v'\cos\omega^{2'}}{dt}-P'\cos\alpha_3'\right)+a_3''\left(\frac{d.v''\cos\omega_3''}{dt}-P''\cos\alpha_3''\right)\\
&\qquad+a_3'''\left(\frac{d.v'''\cos\omega_3'''}{dt}-P'''\cos\alpha_3'''\right)+\ldots\ldots=Y_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, rapportons les équations (21), la première successivement aux directions (A), (A_1), (A_2), (A_3), ... la seconde successivement aux directions (A'), (A_1'), (A_2'), (A_3'), ... la troisième aux directions (A''), (A_1''), (A_2''), (A_3''), ... ainsi de suite; nous aurons

$$\begin{aligned}
&\frac{d.v\cos\omega}{dt}-P\cos\alpha=\frac{Q}{m}\cos\widehat{AQ}\\
&\frac{d\ \ v'\cos\omega'}{dt}-P'\cos\alpha'=\frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A'Q'}\\
&\frac{d.v''\cos\omega''}{dt}-P''\cos\alpha''=\frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A''Q''}\\
&\frac{d.v'''\cos\omega'''}{dt}-P'''\cos\alpha'''=\frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A'''Q'''}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d.v\cos\omega_1}{dt}-P\cos\alpha_1=\frac{Q}{m}\cos\widehat{A_1Q}\\
&\frac{d.v'\cos\omega_1'}{dt}-P'\cos\alpha_1'=\frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A_1'Q'}\\
&\frac{d.v''\cos\omega_1''}{dt}-P''\cos\alpha_1''=\frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A_1''Q''}\\
&\frac{d.v'''\cos\omega_1'''}{dt}-P'''\cos\alpha_1'''=\frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_1'''Q'}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\frac{d\,.\,v\cos\omega_2}{dt} - P\cos\alpha_2 = \frac{Q}{m}\cos\widehat{A_2Q}$$
$$\frac{d\,.\,v'\cos\omega_2'}{dt} - P'\cos\alpha_2' = \frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A_2'Q'}$$
$$\frac{d\,.\,v''\cos\omega_2''}{dt} - P''\cos\alpha_2'' = \frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A_2''Q''}$$
$$\frac{d\,.\,v'''\cos\omega_2'''}{dt} - P'''\cos\alpha_2''' = \frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_2'''Q'''}$$
. . . .

$$\frac{d\,.\,v\cos\omega_3}{dt} - P\cos\alpha_3 = \frac{Q}{m}\cos\widehat{A_3Q}$$
$$\frac{d\,.\,v'\cos\omega_3'}{dt} - P'\cos\alpha_3' = \frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A_3'Q'}$$
$$\frac{d\,.\,v''\cos\omega_3''}{dt} - P''\cos\alpha_3'' = \frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A_3''Q''}$$
$$\frac{d\,.\,v'''\cos\omega_3'''}{dt} - P'''\cos\alpha_3''' = \frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_3'''Q'''}$$
. . . .

ainsi de suite. En substituant ces valeurs dans les formules (22), on trouve

$$(23)\left\{\begin{array}{l}
\frac{a\,Q}{m}\cos\widehat{AQ} + \frac{a'\,Q'}{m'}\cos\widehat{A'Q'} + \frac{a''\,Q''}{m''}\cos\widehat{A''Q''} + \frac{a'''\,Q'''}{m'''}\cos\widehat{A'''Q'''} + \ldots = Y \\
\frac{a_1 Q}{m}\cos\widehat{A_1Q} + \frac{a'_1 Q'}{m'}\cos\widehat{A_1'Q'} + \frac{a_1''Q''}{m''}\cos\widehat{A_1''Q''} + \frac{a_1'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_1'''Q'''} + \ldots = Y_1 \\
\frac{a_2 Q}{m}\cos\widehat{A_2Q} + \frac{a'_2 Q'}{m'}\cos\widehat{A_2'Q'} + \frac{a_2''Q''}{m''}\cos\widehat{A_2''Q''} + \frac{a_2'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_2'''Q'''} + \ldots = Y_2 \\
\frac{a_3 Q}{m}\cos\widehat{A_3Q} + \frac{a'_3 Q'}{m'}\cos\widehat{A_3'Q'} + \frac{a_3''Q''}{m''}\cos\widehat{A_3''Q''} + \frac{a_3'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_3'''Q'''} + \ldots = Y_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{array}\right.$$

Si l'on pose pour abréger

$$(24) \;\ldots\ldots\; \lambda Y + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 + \ldots\ldots = \Theta$$

et si l'on tient compte des équations

$$Q \;= a\lambda\cos\widehat{AQ}+a_1\lambda_1\cos\widehat{A_1Q}+a_2\lambda_2\cos\widehat{A_2Q}+a_3\lambda_3\cos\widehat{A_3Q}+\ldots$$
$$Q' \;= a'\lambda\cos\widehat{A'Q'}+a_1'\lambda_1\cos\widehat{A_1'Q'}+a_2'\lambda_2\cos\widehat{A_2'Q'}+a_3'\lambda_3\cos\widehat{A_3'Q'}+\ldots$$
$$Q'' = a''\lambda\cos\widehat{A''Q''}+a_1''\lambda_1\cos\widehat{A_1''Q''}+a_2''\lambda_2\cos\widehat{A_2''Q''}+a_3''\lambda_3\cos\widehat{A_3''Q''}+\ldots$$
$$Q'''= a'''\lambda\cos\widehat{A'''Q'''}+a_1'''\lambda_1\cos\widehat{A_1'''Q'''}+a_2'''\lambda_2\cos\widehat{A_2'''Q'''}+a_3'''\lambda_3\cos\widehat{A_3'''Q'''}+\ldots$$
. . . .

on trouvera, après avoir multiplié les équations (23): la première par λ, la seconde par λ_1, la troisième par λ_2, ainsi de suite et ajoutant ensemble

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Theta = \frac{Q^2}{m} + \frac{Q'^2}{m'} + \frac{Q''^2}{m''} + \frac{Q'''^2}{m'''} + \ldots\ldots$$

La différentiation par rapport à λ donne

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = 2\left(\frac{aQ}{m}\frac{dQ}{d.a\lambda} + \frac{a'Q'}{m'}\frac{dQ'}{d.a'\lambda} + \frac{a''Q''}{m''}\frac{dQ''}{d.a''\lambda} + \frac{a'''Q'''}{m'''}\frac{dQ'''}{d.a'''\lambda} + \ldots\ldots\right)$$

mais on sait, par la composition des forces, que les différences partielles $\frac{dQ}{d.a\lambda}$, $\frac{dQ'}{d.a'\lambda}$, $\frac{dQ''}{d.a''\lambda}$, $\frac{dQ'''}{d.a'''\lambda}$, ... sont les cosinus des angles que les résultantes Q, Q', Q'', Q''', ... font respectivement avec les composantes $a\lambda$, $a'\lambda$, $a''\lambda$, $a'''\lambda$, ... donc

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = 2\left(\frac{aQ}{m}\cos\widehat{AQ} + \frac{a'Q'}{m'}\cos\widehat{A'Q'} + \frac{a''Q''}{m''}\cos\widehat{A''Q''} + \frac{a'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A'''Q'''} + \ldots\ldots\right)$$

ou bien, eu égard à la première des équations (23), $\frac{dQ}{d\lambda} = 2Y$. On trouvera de la même manière $\frac{dQ}{d\lambda_1} = 2Y_1$, $\frac{dQ}{d\lambda_2} = 2Y_2$, $\frac{dQ}{d\lambda_3} = 2Y_3$, ... ainsi nous pouvons écrire

$$(26)\left\{\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\lambda} &= 2Y \\ \frac{d\Theta}{d\lambda_1} &= 2Y_1 \\ \frac{d\Theta}{d\lambda_2} &= 2Y_2 \\ \frac{d\Theta}{d\lambda_3} &= 2Y_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Il est facile d'exprimer la quantité Θ en λ_1, λ_2, λ_3, ... Il n'y a qu'à substituer dans (25) à la place de Q^2, Q'^2, Q''^2, Q'''^2, ... leurs valeurs fournies par les équations connues

$$Q^2 = a^2\lambda^2 + a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2 + a_3^2\lambda_3^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2aa_1\lambda\lambda_1\cos\widehat{aa_1} + 2aa_2\lambda\lambda_2\cos\widehat{aa_2} + 2a_1a_2\lambda_1\lambda_2\cos\widehat{a_1a_2} + \ldots\ldots$$
$$Q'^2 = a'^2\lambda^2 + a_1'^2\lambda_1^2 + a_2'^2\lambda_2^2 + a_3'^2\lambda_3^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2a'a_1'\lambda\lambda_1\cos\widehat{a'a_1'} + 2a'a_2'\lambda\lambda_2\cos\widehat{a'a_2'} + 2a_1'a_2'\lambda_1\lambda_2\cos\widehat{a_1'a_2'} + \ldots\ldots$$
$$Q''^2 = a''^2\lambda^2 + a_1''^2\lambda_1^2 + a_2''^2\lambda_2^2 + a_3''^2\lambda_3^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2a''a_1''\lambda\lambda_1\cos\widehat{a''a_1''} + 2a''a_2''\cos\widehat{a''a_2''} + 2a_1''a_2''\cos\widehat{a_1''a_2''} + \ldots\ldots$$
$$Q'''^2 = a'''^2\lambda^2 + a_1'''^2\lambda_1^2 + a_2'''^2\lambda_2^2 + a_3'''^2\lambda_3^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2a'''a_1'''\lambda\lambda_1\cos\widehat{a'''a_1'''} + 2a'''a_2'''\cos\widehat{a'''a_2'''} + 2a_1'''a_2'''\cos\widehat{a_1'''a_2'''} + \ldots$$

. . . .

dans lesquelles, pour plus de simplicité, nous avons écrit $\widehat{aa_1}$, $\widehat{aa_2}$, $\widehat{a_1a_2}$, $\widehat{a'a_1'}$, ... à la place de $\widehat{a\lambda a_1\lambda_1}$, $\widehat{a\lambda a_2\lambda_2}$, $\widehat{a_1\lambda_1a_2\lambda_2}$, $\widehat{a'\lambda a'\lambda_1}$, ... nous aurons

$$\Theta = \left(\frac{a^2}{m} + \frac{a'^2}{m'} + \frac{a''^2}{m''} + \frac{a'''^2}{m'''} + \cdots\right)\lambda^2 + \left(\frac{a_1^2}{m} + \frac{a_1'^2}{m'} + \frac{a_1''^2}{m''} + \frac{a_1'''^2}{m'''} + \cdots\right)\lambda_1^2$$
$$+ \left(\frac{a_2^2}{m} + \frac{a_2'^2}{m'} + \frac{a_2''^2}{m''} + \frac{a_2'''^2}{m'''} + \cdots\right)\lambda_2^2 \left(+\frac{a_3^2}{m} + \frac{a_3'^2}{m'} + \frac{a_3''^2}{m''} + \frac{a_3'''^2}{m'''} + \cdots\right)\lambda_3^2 + \cdots$$
$$+ 2\left(\frac{a\,a_1}{m}\cos\widehat{a\,a_1} + \frac{a'\,a_1'}{m'}\cos\widehat{a'\,a_1'} + \frac{a''\,a_1''}{m''}\cos\widehat{a''\,a_1''} + \frac{a'''\,a_1'''}{m'''}\cos\widehat{a'''\,a_1'''} + \cdots\right)\lambda\lambda_1$$
$$+ 2\left(\frac{a\,a_2}{m}\cos\widehat{a\,a_2} + \frac{a'\,a_2'}{m'}\cos\widehat{a'\,a_2'} + \frac{a''\,a_2''}{m''}\cos\widehat{a''\,a_2''} + \frac{a''\,a_2'''}{m'''}\cos\widehat{a'''\,a_2'''} + \cdots\right)\lambda\lambda_2$$
$$+ 2\left(\frac{a\,a_3}{m}\cos\widehat{a\,a_3} + \frac{a'\,a_3'}{m'}\cos\widehat{a'\,a_3'} + \frac{a''\,a_3''}{m''}\cos\widehat{a''\,a_3''} + \frac{a''\,a_3''}{m'''}\cos\widehat{a'''\,a_3'''} + \cdots\right)\lambda\lambda_3$$
$$+ 2\left(\frac{a_1a_2}{m}\cos\widehat{a_1a_2} + \frac{a_1'a_2'}{m'}\cos\widehat{a_1'a_2'} + \frac{a_1''a_2''}{m''}\cos\widehat{a_1''a_2''} + \frac{a_1'''a_2''}{m'''}\cos\widehat{a_1'''a_2'''} + \cdots\right)\lambda_1\lambda_2$$
$$+ 2\left(\frac{a_1a_3}{m}\cos\widehat{a_1a_3} + \frac{a_1'a_3'}{m'}\cos\widehat{a_1'a_3'} + \frac{a_1''a_3''}{m''}\cos\widehat{a_1''a_3''} + \frac{a_1'''a_3'''}{m'''}\cos\widehat{a_1'''a_3'''} + \cdots\right)\lambda_1\lambda_3$$
$$+ 2\left(\frac{a_2a_3}{m}\cos\widehat{a_2a_3} + \frac{a_2'a_3'}{m'}\cos\widehat{a_2'a_3'} + \frac{a_2''a_3''}{m''}\cos\widehat{a_2''a_3''} + \frac{a_2'''a_3'''}{m'''}\cos\widehat{a_2'''a_3'''} + \cdots\right)\lambda_2\lambda_3$$

. . . .

ou bien, en désignant les coëfficiens de $\lambda_m\lambda_n$ par $(a_m a_n)$, c'est-à-dire en faisant

$$\frac{a_m a_n}{m}\cos \widehat{a_m a_n} + \frac{a_m' a_n'}{m'}\cos \widehat{a_m' a_n'} + \frac{a_m'' a_n''}{m''}\cos \widehat{a_m'' a_n''} + \frac{a_m''' a_n'''}{m'''}\cos \widehat{a_m''' a_n'''} + \ldots\ldots$$
$$= (a_m, a_n) = (a_n, a_m):$$

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \Theta = {} & (a,a)\lambda^2 + (a_1,a_1)\lambda_1^2 + (a_2,a_2)\lambda_2^2 + (a_3,a_3)\lambda_3^2 + \ldots\ldots \\ & + 2(a_1a_1)\lambda\lambda_1 + 2(a_1a_2)\lambda\lambda_2 + 2(a_1a_3)\lambda\lambda_3 + 2(a_1,a_2)\lambda_1\lambda_2 + (a_1,a_3)\lambda_1\lambda_3 \\ & + 2(a_2a_3)\lambda_2\lambda_3 + \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

et par suite les équations (26) deviendront

$$(28)\ldots \left\{ \begin{aligned} & (a, a)\lambda + (a, a_1)\lambda_1 + (a, a_2)\lambda_2 + (a, a_3)\lambda_3 + \ldots\ldots = Y \\ & (a, a)\lambda + (a_1,a_1)\lambda_1 + (a_1,a_2)\lambda_2 + (a_1,a_3)\lambda_3 + \ldots\ldots = Y_1 \\ & (a, a)\lambda + (a_1,a_2)\lambda_1 + (a_2,a_2)\lambda_2 + (a_2,a_3)\lambda_3 + \ldots\ldots = Y_2 \\ & (a, a)\lambda + (a_1,a_3)\lambda_1 + (a_2,a_3)\lambda_2 + (a_3,a_3)\lambda_3 + \ldots\ldots = Y_3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Les formules (28) sont en même nombre que les quantités λ, λ_1, λ_2, λ_3, ...; elles serviront à déterminer ces quantités. On aurait pu tirer les équations (28) de celles qui portent le numéro (23), il n'y aurait qu'à remplacer, dans les dernières, les projections $Q\cos\widehat{AQ}$, $Q'\cos\widehat{A'Q'}$, $Q''\cos\widehat{A''Q''}$,... $Q\cos\widehat{A_1Q}$, $Q\cos\widehat{A_1'Q'}$, ... des résultantes Q, Q', Q'', Q''', ... par les projections de leurs composantes. —

Nous ferons observer en passant que, si l'on avait à déterminer l'équilibre du système (s), il pourrait arriver que le nombre des conditions pour le déplacement possible surpassât celui des inconnues du problème. Ce cas ne peut jamais se présenter dans le mouvement, après avoir rejeté les conditions des déplacemens possibles qui n'opposent aucun obstacle au mouvement du système, le nombre de celles qui resteront ne surpassera jamais celui des inconnues. Mais dans les recherches des conditions de l'équilibre, le cas dont il s'agit peut avoir lieu, il ne présentera aucune difficulté particulière, seulement il donnera lieu à une indétermination semblable à celle que l'on a observée dans l'équilibre d'un corps solide qui

s'appuie contre un plan inébranlable, personne que je sache, n'a remarqué l'indétermination des problèmes de l'équilibre dans des cas différens de celui que nous venons de citer; on verra maintenant que l'indétermination se présentera toutes les fois que le nombre des conditions des déplacemens possibles surpasse celui des inconnues du problème.

Les équations (28) se résolvent facilement, puisqu'elles ne sont que du premier degré. Après en avoir tiré les valeurs λ, λ_1, λ_2, λ_3, . . . il n'y aura qu'à les mettre dans les formules (20) pour avoir les projections des déplacemens cherchés sur des directions quelconques, et par conséquent les problèmes que nous nous sommes proposés se trouvent complètement résolus.

13. Ayant trouvé les équations qui déterminent le déplacement instantané de (s), nous pouvons nous en servir pour déterminer le mouvement de ce système pendant un temps fini quelconque. En effet, supposons que la position et l'état de (s) soient connus pour $t = t'$, on déterminera pour la même époque les valeurs des V, puis celles des Y, ce qui nous mettra à même de juger quelles sont les *conditions des déplacemens possibles* qu'il faudra garder, et quelles sont celles qu'on doit rejeter. Puis, après avoir trouvé les λ au moyen des (28), et après les avoir substitués dans les (20), on intègrera ces dernières équations en ayant égard aux formules (12) et à l'état initial du système; et quand l'intégration aura fourni toutes les inconnues du problème, on discutera les valeurs des Y. Tant que ces valeurs resteront positives, la solution de la question sera bonne. Mais si, à partir d'une certaine époque $t = t''$, une ou plusieurs des quantités Y deviennent négatives, la solution à partir de la même époque deviendra fausse, et il faudra retoucher la question, par les mêmes principes, depuis l'instant $t = t''$, l'instant qui se rapportera à l'état initial du nouveau mouvement qui va commencer. Au lieu des Y, on pourrait discuter les λ; car les Y et les λ sont positifs et négatifs en même temps; en sorte que si un Y est positif, on est assuré que le λ correspondant est aussi positif, et quand l'Y deviendra négatif, le λ le deviendra également, et comme il pourrait arriver que la discussion des

λ présentât plus de facilités que celle des Y, il sera quelquefois bon d'avoir égard aux inégalités (17) qui peuvent remplacer les inégalités (12).

Nous nous proposons d'appliquer, dans un autre mémoire, les principes que nous venons d'exposer à quelques cas particuliers. Nous avons principalement en vue le mouvement des fluides incompressibles.

DRUCKFEHLER.

Seite	Zeile	statt	lies
79	5 von oben	1″3	1″14
—	6 — —	4″0	3″6
—	7 — —	39°54′24″5	39°54′15″2
89	3 — —	zwei	zweiten
101	in den beiden letzten Columnenüberschriften der Tabelle	März 1830	März 1831
		März 1831	März 1832
109	in der letzten Columne der Tabelle ist bei dem 18. Juni Magnet. Observat. zu lesen, nicht aber bei dem 22. Juni		
110	zweite Columne Zeile 7 v. u.	108°, 17′, 0	109°, 17′, 0
—	— — — — 8 —	108, 30, 0	109, 30, 0

№ 1.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Ueber die Kraft eines Magneten in Beziehung zur Kraft der einzelnen Magnete, aus welchen er zusammengesetzt ist. Von E. Lenz.

(Gelesen den 4. October 1833.)

In den beiden Abhandlungen electromagnetischen Inhalts, die ich der Akademie vorzulegen die Ehre hatte, habe ich des von mir gebrauchten Magneten Erwähnung gethan und seine Dimensionen angeführt; allein damals betrachtete ich ihn immer als ein Ganzes, ohne die einzelnen Hufeisenmagnete, aus denen er zusammengesetzt ist, einer besondern Prüfung zu unterwerfen, weil mir für meine damaligen Versuche daran lag, meinen Magneten bei constanter Stärke zu erhalten und ich diese durchs Auseinandernehmen seiner einzelnen Theile zu verlieren fürchtete. — Erst nachdem ich meine damaligen Beobachtungsreihen geschlossen hatte, nahm ich diese Untersuchung vor und da ich mich nicht erinnere, hierüber früher irgend wo genaue Data gefunden zu haben und diese überhaupt vor Entdeckung der Magneto-Electricität den Grad der Genauigkeit, den ich den meinigen zu geben im Stande war, nicht haben konnten, so mögen sie in dieser Note als Ergänzung zu meinen oben erwähnten Abhandlungen ihren Platz finden.

Ich fing damit an, dass ich die Enden eines jeden der Hufeisen so schleifen liess, dass sie in einer Ebene lagen, und eben so den cylindrischen eisernen Anker an den Stellen, wo er an den Magnet angelegt wurde; dadurch musste dieser alle Hufeisen auf gleiche Weise berühren. Hierauf magnetisirte ich alle 5 nochmals bis zur Sättigung und liess sie 24 Stunden liegen, damit sie diejenige Quantität von Magnetismus, die sie etwa über diesen Grad angenommen hätten, wiederum verlieren möchten. Der Anker ward hierauf mit einer Spirale umwunden und diese mit ihren Enden mit einem Multiplicator in Verbindung gesezt; das Abreissen des Ankers von dem Magneten erregte also einen Strom, dessen Einwirkung auf die Multiplicatornadel als Maass der electro-motorischen Kraft und diese wiederum als das des sie erzeugenden Magnetismus betrachtet wurde, wobei natürlicher Weise bei den Versuchen mit den verschiedenen Hufeisen sonst alle Umstände ganz unverändert blieben. Ausserdem bestimmte ich sowohl das

Gewicht eines jeden Magneten, als auch dasjenige, welches er im Maximo zu tragen vermogte, indem ich zu letzterem Zwecke in einer angehängten Waagschale allmählig kleine Gewichte bis zum Abreissen hinzufügte, wobei der Anker und die Waagschale natürlich mit als Gewicht in Anschlag gebracht wurden.

Die schon früher einmal angegebenen Dimensionen des Magneten waren folgende:

Er war zusammengesetzt aus 5 einzelnen Hufeisen, die durch 3 Schrauben an einander gepresst wurden und von welchen der mittelste um 0,7 Zoll engl. vor den übrigen hervorragte; die Länge der übrigen war 23 Zoll, die fast gleiche Breite 0″,8 und die Dicke 0″,22; der mittlere aber von 24″,4 lang und 0″,4 dick. Der innere Abstand der beiden Pole betrug 1″,64. Ich bezeichnete die einzelnen Hufeisen der Reihe nach, wie sie auf einander lagen, mit 1, 2, 3, 4, 5, wo also 3 den mittelsten, dicksten und längsten Stab bezeichnet.

Die Gewichte der Magnete und ihre Tragkräfte, in Granen des Nürnberger Medizinal-Gewichts ausgedrückt, waren folgende:

N°. 1.	Gewicht = 8989	Tragkraft = 33800	Verh.d.Gew.z. Tragkr. = 3,760
N°. 2.	„ = 9247	„ = 31400	„ = 3,396
N°. 3.	„ = 16040	„ = 42900	„ = 2,674
N°. 4.	„ = 9312	„ = 31400	„ = 3,372
N°. 5.	„ = 8610	„ = 26800	„ = 3,113
	Summa = 52198	„ = 166300	„ = 3,186
der ganze Magnet . . .		„ = 125300	„ = 2,400

Vergleichen wir das Verhältniss der Summe der Tragkräfte aller einzelnen Magnete zu der Tragkraft des ganzen, so finden wir dieses = 0,75346 oder der Magnet trägt nur etwa $\frac{3}{4}$ desjenigen Gewichts, welches er tragen würde, wenn bei der Zusammenlegung der einzelnen Magnete jeder seine ganze Kraft äusserte.

Viel genauer wird man dieses Verhältniss aber aus den magneto-electrischen Wirkungen ermitteln können, da die Bestimmung der Tragkraft durch Anhängen immer grösserer und grösserer Gewichte etwas sehr Ungewisses mit sich führt, indem es nicht plötzlich von der ganzen Endfläche der Magnetpole geschieht, sondern an einigen Stellen früher, so dass der Anker zuletzt nur an einer Kante an dem Magneten hängt. Bei den magneto-electrischen Versuchen kann die Abreissung viel gleichförmiger geschehn. Indessen werden die Versuche selbst den relativen Grad beider Beobachtungen am Besten zeigen.

Indem ich also die magneto-electrischen Beobachtungen jetzt folgen lasse, bemerke ich nur, dass die Beobachtungen ganz in der Art der, in meinen früheren Abhandlungen beschriebenen, angestellt wurden, nämlich an beiden Enden des Zeigers, der einen Durchmesser der getheilten Scheibe des Multiplicators darstellte und nach beiden Seiten der Theilung hin durch Umdrehung des Ankers beim Anlegen an die Magnetpole. Die Beobachtungen selbst sind folgende:

	Ablenkungswinkel.				Mittel od.
	1	2	3	4	α
N°. 3 . . .	29,2	30,7	29,0	30,2	29° 46′, 5
N°. 1 . . .	20,3	20,5	19,7	20,3	20 12, 0
N°. 2 . . .	20,1	20,7	20,3	20,4	20 22, 5
N°. 4 . . .	19,8	20,7	19,8	20,8	20 13, 5
N°. 5 . . .	19,8	20,7	19,9	20,5	20 13, 5
N°. 3 . . .	29,1	30,3	29,6	30,1	29 46, 5
der ganze Magnet	72,5	74,7	72,4	73,6	73 18, 0

Die beiden Beobachtungen von No. 3. sind darin verschieden, dass die erste vor den Versuchen über die Tragkraft, die letzte nach denselben angestellt wurde; man sieht also, dass durchs Abreissen die Kraft des Magneten ganz und gar nicht geschwächt wurde, ein Resultat, das ich schon bei vielen Gelegenheiten erhalten habe.

Aus meinen früheren Abhandlungen entlehne ich die dort nachgewiesene Formel

$$\frac{x}{L} = p \cdot \sin. \left(\tfrac{1}{2}\,\alpha\right)$$

in welchen x die electro-motorische Kraft, L den Leitungswiderstand der Dräthe, p einen Coefficienten, der von der magnetischen Kraft der Erde abhängig ist, und α den beobachteten Ablenkungswinkel bedeutet. Für unsre gegenwärtigen Versuche bleibt L und p constant, es werden sich also die electro-motorischen Kräfte wie die Sinus der halben Ablenkungswinkel verhalten. Setzen wir sie den Kräften der Magnete proportional und bezeichnen wir die des ganzen Magneten mit 1, so haben wir für den Ablenkungswinkel α die Proportion:

$$\sin. \left(\tfrac{1}{2}\,\alpha\right) : \sin. \left(\frac{73°18'}{2}\right) = x : 1$$

$$\text{folglich } x = \frac{\sin. \left(\tfrac{1}{2}\,\alpha\right)}{\sin. (36°39')}$$

Setzen wir für α die verschiedenen beobachteten Werthe, so haben wir folgende Kräfte der Magnete

für N°. 1 . . . $x = 0{,}29379$
N°. 2 . . . $x = 0{,}29631$
N°. 3 . . . $x = 0{,}43041$
N°. 4 . . . $x = 0{,}29415$
N°. 5 . . . $x = 0{,}29415$
Summa $= 1{,}60881$

Da die ganze Kraft = 1 angenommen wurde, so ergiebt sich das Verhältniss der Kraft des ganzen Magneten zu der Summe der Kräfte aller einzelnen Magnete = 0,62158, oder der zusammengesetzte Magnet hat nur etwa $\frac{5}{8}$ von der Summe der Kräfte der einzelnen Magnete; dieses Resultat ist noch ungünstiger wie oben ausgefallen, allein auf jeden Fall ist ihm der Vorzug zu geben.

Bemerkenswerth ist es, dass die Magnete 1, 2, 4, 5, die fast dieselben Dimensionen haben, auch beinahe dieselbe electro-metrische Kraft besitzen, ein Resultat, das sich aus den Versuchen über die Tragkraft nicht so deutlich ergab. Das geringe von No. 5. getragene Gewicht, was nach den letzten Versuchen offenbar fehlerhaft ist, ist wohl auch Ursache, dass das Gewicht der Summe der einzelnen Kräfte gegen die Kraft des ganzen Magneten zu klein ausgefallen ist.

Résumé des observations météorologiques, faites à St.-Pétersbourg en 1831, à l'observatoire de l'Académie des sciences, par MM. *Wisniewsky et Tarkhanoff, et calculées par* M. *A. T. Kupffer.*

(Lu le 20 septembre 1833.)

Le thermomètre est celui de Réaumur. Le baromètre est divisé en pouces français. Les hauteurs barométriques ont été reduites à une température de + 14° R. Les mois et les jours sont comptés d'après le nouveau style.

I. Moyennes des observations thermométriques pour tous les mois de l'année 1831.

Mois.	7 heures du matin.	2 heures après midi.	9 heures du soir.	Moyennes.
Janvier	—10°,34	— 9°,01	—10°,62	— 9°,99
Février	— 5, 00	— 3, 02	— 4, 09	— 4, 04
Mars	— 8, 73	— 2, 63	— 6, 76	— 6, 04
Avril	+ 0, 95	+ 5, 47	+ 0, 95	+ 2, 46
Mai	+ 5, 90	+ 9, 39	+ 5, 20	+ 6, 83
Juin	+12, 64	+16, 84	+11, 37	+13, 62
Juillet	+14, 17	+18, 30	+14, 13	+15, 53
Août	+11, 43	+14, 79	+11, 28	+12, 50
Septembre	+ 5, 46	+ 8, 68	+ 6, 91	+ 7, 01
Octobre	+ 2, 23	+ 4, 72	+ 3, 73	+ 3, 56
Novembre	— 1, 07	— 0, 31	— 0, 04	— 0, 47
Décembre	— 5, 61	— 5, 41	— 5, 07	— 5, 36
moyennes pour l'année entière	+ 1, 84	+ 4, 82	+ 2, 25	+ 2, 97

II. Variations extrêmes du thermomètre pour chacun des mois de l'année 1831, aux heures où l'on a observé, et maximum des différences, pour chaque mois, entre deux observations du même jour.

Noms des mois.	Maximum des températures, observées à 2 heures ap. m.	Minimum des températures observées à 7 heures du matin.	Différence.	Plus grande différence entre deux observations du même jour.
Janvier	— 0°,4	—22°,2	21°,8	8°,7
Février	+ 2, 5	— 9, 7	12, 2	5, 2
Mars	+ 5, 2	—18, 5	23, 7	10, 7
Avril	+11, 6	— 7, 4	19, 0	8, 9
Mai	+16, 8	+ 0, 2	16, 6	7, 4
Juin	+24, 0	+ 8, 2	15, 8	9, 6
Juillet	+23, 0	+ 9, 0	14, 0	8, 0
Août	+19, 1	+ 8, 0	11, 1	7, 1
Septembre	+13, 2	+ 1, 0	12, 2	8, 6
Octobre	+ 9, 5	— 5, 2	14, 7	8, 0
Novembre	+ 5, 2	— 6, 8	12, 0	4, 7
Décembre	+ 2, 0	—14, 7	16, 7	11, 0

III. Moyennes des observations barométriques, faites à 7 heures du matin, à 2 heures après midi et à 9 heures du soir, pour tous les mois de l'année 1831.

Noms des mois.	Hauteur barométrique.	Noms des mois.	Hauteur barométrique.
Janvier	27, 946	Juillet	28, 152
Février	28, 219	Août	28, 020
Mars	28, 334	Septembre	28, 134
Avril	28, 133	Octobre	28, 242
Mai	28, 126	Novembre	28, 030
Juin.	28, 028	Décembre	28, 171

Hauteur barométrique moyenne, pour l'année 1831 . . . . . 28,128.

IV. Variations extrêmes du baromètre, aux heures indiquées plus haut, pour chacun des mois de l'année 1831.

Noms des mois.	Maximum.	Minimum.	Différence.
Janvier	28, 62	27, 40	1, 22
Février	28, 57	27, 76	0, 81
Mars	28, 90	27, 77	1, 13
Avril	28, 77	27, 45	1, 32
Mai	28, 67	27, 49	1, 18
Juin	28, 43	27, 67	0, 76
Juillet	28, 44	27, 79	0, 65
Août	28, 35	27, 21	1, 14
Septembre	28, 52	27, 29	1, 23
Octobre	28, 63	27, 63	1, 00
Novembre	28, 53	27, 39	1, 14
Décembre	28, 84	27, 35	1, 49

V. Etat des vents, dont la direction a été observée trois fois par jour, à 7 heures du matin, à 2 heures après midi et à 9 heures du soir.

Noms des mois.	Nord.	Nord-Est.	Est.	Sud-Est.	Sud.	Sud-Ouest.	Ouest.	Nord-Ouest.	Calmes.
Janvier	5	15	6	7	6	29	17	4	4
Février	1	20	9	11	18	21	2	0	2
Mars	1	36	5	8	7	18	1	0	17
Avril	1	17	2	5	11	32	3	0	19
Mai	0	31	6	3	8	28	3	0	14
Juin	0	40	16	4	0	13	1	0	16
Juillet	0	32	12	6	2	26	11	0	4
Août	4	39	9	6	2	17	4	0	12
Septembre	5	33	5	0	1	31	9	0	6
Octobre	5	24	4	3	17	35	2	0	3
Novembre	4	8	13	20	23	11	5	0	6
Décembre	3	15	13	11	24	14	7	0	6
Sommes	29	310	100	84	119	275	65	4	109

VI. Hauteur moyenne du baromètre pour chaque vent.

Noms des vents.	Hauteur moyenne du baromètre.	Nombre des observations.	Noms des vents.	Hauteur moyenne du baromètre.	Nombre des observations.
Nord	28,194	29	Ouest	28,092	65
Nord-E	27,870	310	Nord-O	28,017	4
Est	28,160	100	Calme	28,197	109
Sud-E	28,122	84			
Sud	28,070	119			
Sud-O	27,911	275			

Il y a eu des vents forts et très forts les jours suivans:

Janvier le 21 et 22 S.O. le 29 N.O.
Février le 18 S.O.
Mai le 13 S.O. le 20 N.E.
Juillet le 8 N.E.
Août le 13 N.E.
Septembre le 1 et 2 O, S.O. et O.
Octobre le 17 N.E. le 24 S.
Décembre le 6 S.

Dans le cours de l'année 1831, il y a eu à St.-Pétersbourg,

68 jours de pluie.
57 jours de neige.
8 jours de tonnerre.
40 jours, durant lesquels le ciel a été entièrement découvert, depuis le matin jusqu'au soir.
135 jours, durant lesquels le ciel a été entièrement et uniformément couvert, depuis le matin jusqu'au soir.
153 jours de brouillard (ces brouillards s'élèvent ordinairement le matin ou le soir et durent fort rarement toute la journée.)
La dernière gelée eut lieu le 25 avril.
La première gelée eut lieu le 13 octobre.

Des aurores boréales furent observées les jours suivans:

Le 8 et 11 mars, faible.
Le 12 mars, aurore boréale très brillante.

Le 24 mars.
Le 19 avril, très brillante.
Le 13 septembre.

Il est tombé, dans le cours de cette année 11,8 pouces anglais d'eau, en forme de pluie, de neige et de grêle. Il y eut trois fois autant de pluie que de neige.

Résumé des observations météorologiques faites à St.-Pétersbourg en **1832**, *à l'observatoire de l'Académie des sciences, par* MM. *Wisniewsky et Tarkhanoff, et calculées par* M. *Spasky, élève de l'institut pédagogique.*

(Lu le 20 septembre 1833.)

Le thermomètre est divisé d'après Réaumur, le baromètre en pouces français. Les hauteurs barométriques ont été réduites à une température de + 14° R. Les mois sont comptés d'après le nouveau style.

I. Moyennes des observations thermométriques pour tous les mois de l'année 1832.

Mois.	7 heures du matin.	2 heures après midi.	9 heures du soir.	Moyennes.
Janvier	— 6, 44	— 5, 71	— 5, 71	— 5, 96
Février	— 3, 78	— 1, 60	— 3, 01	— 2, 80
Mars	— 4, 42	— 0, 94	— 3, 10	— 2, 82
Avril	+ 0, 22	+ 3, 25	+ 0, 63	+ 1, 37
Mai	+ 5, 49	+ 8, 57	+ 5, 56	+ 6, 54
Juin	+10, 58	+13, 97	+ 9, 60	+11, 38
Juillet	+10, 62	+13, 83	+10, 33	+11, 59
Août	+10, 52	+13, 90	+10, 76	+11, 73
Septembre	+ 5, 91	+ 9, 02	+ 7, 02	+ 7, 32
Octobre	+ 3, 21	+ 5, 10	+ 4, 15	+ 4, 15
Novembre	— 3, 87	— 2, 87	— 3, 31	— 3, 35
Décembre	— 6, 40	— 5, 57	— 5, 56	— 5, 84
moyennes pour l'année entière	+ 1, 80	+ 4, 25	+ 2, 28	+ 2, 78

II. Variations extrêmes du thermomètre pour chacun des mois de l'année 1832, aux heures où l'on a observé, et maximum des différences, pour chaque mois, entre deux observations du même jour.

Noms des mois.	Maximum des températures, observées à 2 heures ap. m.	Minimum des températures observées à 7 heures du matin.	Différence.	Plus grande différence entre deux observations du même jour.
Janvier	+ 1°, 2	—17°, 5	18°, 7	8°, 9
Février	1, 1	—10, 4	11, 5	7, 1
Mars	5, 2	—13, 2	18, 4	8, 7
Avril	9, 7	— 4, 8	14, 5	7, 5
Mai	20, 2	+ 0, 2	20, 0	8, 2
Juin	20, 8	+ 5, 0	15, 8	7, 0
Juillet	21, 1	+ 7, 3	13, 8	7, 8
Août	18, 0	+ 7, 6	10, 4	7, 0
Septembre	18, 0	— 1, 5	19, 5	6, 6
Octobre	10, 3	— 1, 5	11, 8	5, 0
Novembre	5, 1	—17, 5	22, 6	5, 4
Décembre	0, 2	—13, 0	13, 2	7, 4

III. Moyennes des observations barométriques, faites à 7 heures du matin, a 2 heures après midi et à 9 heures du soir, pour tous les mois de l'année 1832.

Noms des mois.	Hauteur barométrique.	Noms des mois.	Hauteur barométrique.
Janvier	28, 103	Juillet	27, 846
Février	28, 417	Août	28, 115
Mars	28, 178	Septembre	27, 928
Avril	28, 220	Octobre	28, 241
Mai	27, 986	Novembre	28, 406
Juin	28, 090	Décembre	28, 256

Hauteur barométrique moyenne, pour l'année entière $= 28^{p},149$.

IV. Variations extrêmes du baromètre, aux heures où l'on a observé, pour chacun des mois de l'année 1832.

Noms des mois.	Maximum.	Minimum.	Différence.	Moyenne entre maxim. et minim.
	p	p	p	p
Janvier	28, 73	26, 74	1, 99	27, 735
Février	28, 81	27, 90	0, 91	28, 355
Mars	28, 74	27, 29	1, 45	28, 015
Avril	28, 53	27, 62	0, 91	28, 075
Mai	28, 47	27, 51	0, 96	27, 990
Juin	28, 43	27, 71	0, 72	28, 070
Juillet	28, 23	27, 32	0, 91	27, 775
Août	28, 44	27, 52	0, 92	27, 980
Septembre	28, 33	27, 44	0, 89	27, 885
Octobre	28, 60	27, 63	0, 97	28, 115
Novembre	29, 24	27, 52	1, 72	28, 380
Décembre	28, 90	27, 54	1, 36	28, 220
Moyennes	28, 62	27, 48	1, 14	28, 050

V. Etat des vents, dont la direction a été observée trois fois par jour, à 7 heures du matin, à 2 heures après midi et à 9 heures du soir.

Noms des mois.	Nord.	Nord-Est.	Est.	Sud-Est.	Sud.	Sud-Ouest.	Ouest.	Nord-Ouest.	Calmes.
Janvier	4	9	2	10	9	39	16	1	3
Février	5	4	0	1	3	44	28	0	2
Mars	0	10	3	20	21	27	6	0	6
Avril	3	26	6	0	7	24	18	0	6
Mai	3	14	6	12	6	27	14	0	11
Juin	0	39	5	6	13	8	10	0	9
Juillet	8	8	8	12	8	20	18	0	11
Août	0	21	13	7	5	16	18	0	13
Septembre	11	0	0	5	19	31	19	2	3
Octobre	5	0	0	6	27	36	13	1	5
Novembre	5	10	8	13	18	28	8	0	0
Décembre	0	7	1	12	34	27	1	0	11
Sommes	44	148	52	104	170	327	169	4	80

VI. Hauteur moyenne du baromètre pour chaque vent.

Noms des vents.	Hauteur moyenne du baromètre.	Nombre des observations.	Noms des vents.	Hauteur moyenne du baromètre.	Nombre des observations.
Nord	28,065	44	Ouest	28,085	169
Nord-E	28, 214	148	Nord-O	28,142	4
Est	28, 217	52	Calme	28,196	80
Sud-E	28, 124	104			
Sud	28, 138	170			
Sud-O	28, 110	327			

Il y a eu des vents forts et très forts les jours suivans:

Janvier le 28 S., le 31 O.
Avril le 3 S.O.
Juin le 21 et 22 N.E.
Juillet le 1 N., le 5 S., le 15 O.
Août le 16 O.
Septembre le 6 O, le 7 N.O.
Octobre le 13 S., le 14 S.O.
Décembre le 18 S.
La dernière gelée eut lieu le 30 Avril.
La première gelée eut lieu le 27 Septembre.
Le thermomètre s'est élevé au-dessus de zéro, pour la première fois le 21 Janv.; pour la dernière fois le 9 Décembre.

Dans le cours de l'année 1832, il y a eu à St.-Pétersbourg:

100 jours de pluie.
61 jours de neige.
2 jours de tonnerre.
35 jours, durant lesquels le ciel a été entièrement découvert, depuis le matin jusqu'au soir.
83 jours, durant lesquels le ciel a été entièrement couvert, depuis le matin jusqu'au soir.
248 jours, durant lesquels le ciel a été nuageux pendant une partie du jour.
95 jours de brouillard (les brouillards s'élèvent ordinairement le matin, moins souvent le soir, et durent fort rarement au-delà de midi.)
On n'a observé qu'une seule aurore boréale, le 13 Novembre.

Résumé des observations météorologiques exécutées à l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg en 1833, par M. Wisniewsky et calculées par M. Spasky.

(Lu le 20 septembre 1833.)

I. Températures moyennes de chaque mois de l'année 1833.

Mois	7^h du matin	2^h après midi	9^h du soir	Moyennes.
Janvier	— 6,98	— 6,15	— 6,95	— 6,69
Février	— 5,58	— 3,52	— 4,62	— 4,57
Mars	— 7,52	— 2,50	— 5,90	— 5,30
Avril	+ 0,07	+ 4,47	+ 0,70	+ 1,75
Mai	+ 5,72	+ 9,47	+ 5,26	+ 6,82
Juin	+12,64	+15,75	+12,00	+13,45
Juillet	+13,23	+15,91	+12,92	+14,02
Août	+ 9,69	+12,30	+ 9,88	+10,62
Septembre	+ 7,34	+11,92	+ 8,76	+ 9,34
Octobre	+ 3,52	+ 5,84	+ 4,54	+ 4,63
Novembre	+ 0,99	+ 1,96	+ 1,39	+ 1,45
Décembre	— 6,48	— 5,90	— 6,03	— 6,13
Moyennes	+ 2,23	+ 4,97	+ 2,77	+ 3,32

II. Variations extrêmes du Thermomètre, pour chaque mois et plus grandes différences observées dans le cours du même jour.

Mois	Maximum de température pour chaque mois	Minimum de température pour chaque mois.	Leur différence	La plus grande différence observée dans le même jour.
Janvier	+ 0, 5	— 21, 6	22, 1	7, 9
Février	+ 3, 0	— 16, 1	19, 1	6, 9
Mars	+ 3, 5	— 16, 9	20, 4	10, 6
Avril	+ 13, 2	— 8, 9	22, 1	9, 7
Mai	+ 16, 2	— 0, 2	16, 4	9, 1
Juin	+ 21, 1	+ 5, 3	15, 8	7, 7
Juillet	+ 23, 7	+ 7, 6	16, 1	6, 3
Août	+ 18, 8	+ 6, 5	12, 3	6, 4
Septembre	+ 17, 8	+ 1, 2	16, 6	7, 7
Octobre	+ 8, 9	— 1, 2	10, 1	5, 8
Novembre	+ 5, 6	— 9, 9	15, 5	5, 2
Décembre	+ 1, 1	— 15, 0	16, 1	6, 2

III. Hauteurs moyennes du Baromètre observée trois fois par jour à 7 heures du matin, à 2^h après midi et à 9^h du soir.

Mois	Moyenne du Baromètre	Mois	Moyenne du Baromètre
Janvier	28, 216	Juillet	27, 965
Février	28, 089	Août	27, 770
Mars	28, 286	Septembre	28, 418
Avril	28, 053	Octobre	28, 326
Mai	28, 110	Novembre	27, 913
Juin	28, 102	Décembre	27, 805

La hauteur moyenne du Baromètre pour l'année entière est 28,088.

IV. Maxima et Minima de la hauteur barométrique pour chaque mois.

Mois	Maximum	Minimum	Différence
Janvier	28, 90	27, 59	1, 31
Février	28, 96	27, 34	1, 62
Mars	28, 75	27, 75	1, 00
Avril	28, 53	27, 55	0, 98
Mai	28, 52	27, 52	1, 00
Juin	28, 47	27, 67	0, 80
Juillet	28, 35	27, 29	1, 06
Août	28, 12	27, 27	0, 85
Septembre	28, 83	27, 48	1, 35
Octobre	28, 69	27, 90	0, 79
Novembre	28, 73	26, 93	1, 80
Décembre	28, 69	26, 97	1, 72

V. Hauteurs moyennes du Baromètre pour chaque vent.

Nom des vents.	Hauteur moyenne du Baromètre.	Nombre des observations.	Nom des vents.	Hauteur moyenne du Baromètre.	Nombre des obvservations.
Nord	28, 104	32	Sud-Ouest	28,064	197
Nord-Est	28, 070	197	Ouest	28,067	147
Est	27, 951	76	Nord-Ouest	27,929	14
Sud-Est	28, 103	144	Calme	28, 233	162
Sud	27, 977	126			

VI. Tableau des vents observés trois fois par jour.

Mois	Nord	Nord-Est	Est	Sud-Est	Sud	Sud-Ouest	Ouest	Nord-Ouest	Calme
Janvier	5	13	10	1	3	37	14	1	9
Février	0	10	5	29	9	20	3	0	8
Mars	5	25	3	12	3	10	17	1	17
Avril	4	25	11	8	16	8	5	0	13
Mai	3	18	0	2	3	18	30	2	17
Juin	1	15	6	4	8	16	17	0	23
Juillet	0	40	5	7	5	11	5	1	19
Août	5	15	12	14	7	16	12	2	10
Septembre	1	11	11	25	7	3	4	0	28
Octobre	0	5	4	19	25	18	7	3	12
Novembre	5	4	3	4	18	28	27	0	1
Décembre	3	16	6	19	22	12	6	4	5
Sommes	32	197	76	144	126	197	147	14	162

Les vents les plus forts ont été:

Le 31 Mars S.E., le 21 Mai O., le 15 Juin S.E., le 28 Juillet N.E., le 2 Août O., le 29 Août O. et N.O., le 5 Novembre O., le 6 Novembre S. et le 22 S.O.

Dans le cours de cette année il y a eu:

86 jours, pendant lesquels le ciel a été entièrement découvert.
139 jours, pendant lesquels le ciel a été entièrement couvert.
140 jours, pendent lesquels le ciel été nuageux.

88 jours de pluie. 63 jours de neige. 5 jours de tonnerre. 164 jours de brouillard.

Des aurores boréales ont été observées:

Le 13 Mars, le 21 Août, le 17 Septembre, le 12 Octobre.

Beschreibung eines Stand-Heber-Barometers, von T. Girgensohn.

(Gelesen den 31. October 1834.)

Die häufigen Unglücksfälle, denen die Barometer bei dem Verschicken in das Innere Russlands ausgesetzt sind, und die Unmöglichkeit, diese so nützlichen Instrumente in einem von einer grossen Stadt entfernten Orte zurecht machen zu lassen, falls sie bedeutend beschädigt worden wären, hatten mich schon lange her

veranlasst, obigen Unbequemlichkeiten wo möglich abzuhelfen. Bei einer solchen Einrichtung suchte ich auch den Vortheil zu erzielen, dass jeder Inhaber desselben alle nöthigen Berichtigungen auf leichte und bequeme Art selbst vornehmen könnte. Nach mehreren Versuchen wage ich es, die Beschreibung und Zeichnung des von mir construirten *Stand-Heber-Barometers*, wie ein solches von meiner Arbeit vor kurzer Zeit von dem Herrn Akademiker Kupffer vorgezeigt wurde, der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen.

Um das Barometer so fest und dauerhaft als möglich zu machen, damit es jeden Transport ohne Beschädigung aushalte, und sich weder durch Nässe noch Trockenheit werfe, verfertigte ich den Rahmen desselben aus flachen stark gehämmerten messingenen Stangen $\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{8}$ Zoll dick. Diese Stangen *a a a a* sind durch Verbindungsstücke $r\,r\,r\,r'\,r''$ vermittelst Seitenschrauben verbunden, von welchen ersteren das oberste Verbindungsstück r' mit einem Ringe zum Aufhängen des Barometers versehen ist; das untere Verbindungsstück r'' ist sehr breit und rund ausgedreht, damit man das eiserne Quecksilbergefäss *b* hineinstecken könne. Dieses letztere wird vermittelst zweier Schrauben *qq* und einer Platte *f* mit den zugehörigen Plättchen *uu* festgehalten, und in ihr bewegt sich die Druckschraube *d*, mit welcher man durch ein Leder das Quecksilber im Gefässe heben oder senken kann. Die Seitenplättchen *u u* dienen dazu, das Barometer durch zwei Seitenschrauben *s s* festzuklemmen, welche letztere in flachen Stücken *x x* laufen, die man in die Wand treibt.

Auf den drei mittleren Verbindungsstücken *r r r* läuft die flache messingene Stange *e e e* von $30\frac{1}{2}$ Zoll Länge ungefähr, welche an ihren Enden mit zwei feststehenden Visiren versehen ist, deren Entfernung von einander bei Coincidenz der vorderen und hinteren Striche jedes Visires 30 Zoll englisch oder 28 Zoll französisch oder 760 Millimeter beträgt, je nachdem man die mittlere Barometerhöhe annehmen will. Diese Entfernung, hier 30 Zoll englisch angenommen, ist bei *w* auf der Stange angemerkt, und bedeutet, dass man jedesmal beim Gebrauche des Barometers damit anfangen muss, den Nullpunkt des Verniers *v* auf 30 Zoll der Eintheilung der Stange zu stellen, wozu die Micrometerschraube *m* mit der Lösungsschraube *o* dient; der Knopf u' wird gebraucht die Stange anzufassen, und ihr nach Lösung der Schraube *o* die grobe Bewegung hinauf und herunter zu geben. Durch die feststehenden Visire glaubte ich den doppelten Zweck zu erreichen, dass sie immer in derselben Lage gegeneinander beim Bewegen der Stange bleiben, und dass man an beiden Schenkeln des Barometers auf eine gleiche Art beobachtet. Die Entfernung von 30 Zoll lässt sich vermittelst eines Stangenzirkels sehr leicht auf die gerade und flache Stange tragen. Den Vernier *v* befestigte ich ziemlich in der Mitte des Instruments, an dem Rahmen desselben, auf eine unbewegliche Art, und theilte die Stange in englische halbe Linien so weit ein*), als der Vernier beim Hinauf- oder Hinunterbewegen dieselbe

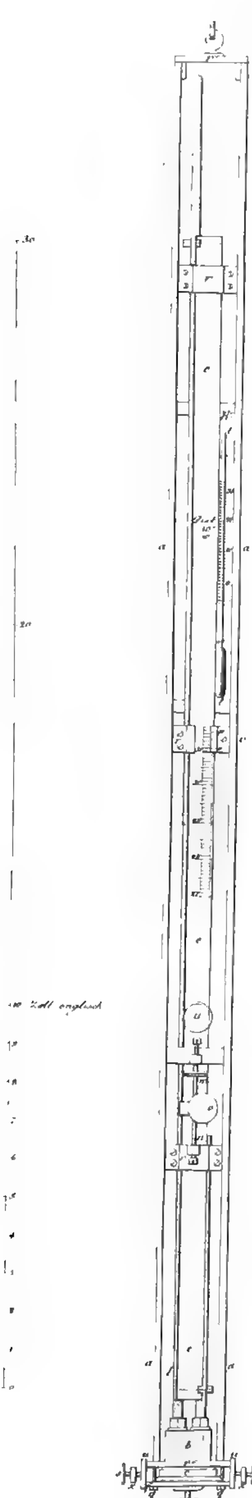
*) Auf der Zeichnung sind nur ganze Linien angedeutet.

berührt: durch den Vernier kann man $\frac{1}{20}$ englische Linien ablesen, welches wohl hinreichend sein möchte, ausser in sehr seltenen Fällen. Da 31 Zoll mehr als der höchste Stand des Barometers ist, so setze ich diese Zahl an einer solchen Stelle, dass das obere Visir noch nicht an das unter ihm befindliche Verbindungsstück *r* stösst, und erhielt dadurch hinlänglichen Spielraum für das Steigen und Fallen des Barometers. Bei *t* befindet sich das Thermometer, und ist an der hinteren Seite des messingenen Rahmens *a a a a* befestigt.

Im Falle das Barometer vollkommen ausgekocht ist, hat man, wenn eine Beobachtung gemacht werden soll, die Null des Verniers zuerst mit 30 Zoll in Uebereinstimmung zu bringen; hierauf treibt man das Quecksilber durch die Druckschraube *d* in die Höhe, bis die obere Wölbung desselben das obere Visir streift. Dann löst man die Stange, bewegt sie nach Erforderniss entweder hinauf oder herunter, bis die untere Quecksilber-Oberfläche das untere Visir streift, so giebt der Vernier den Barometerstand an.

Da aber die ausgekochten, mit Quecksilber gefüllten Barometer fast immer zerbrechen, wenn nicht besondere Sorgfalt auf den Transport angewendet wird, so habe ich das Barometer so eingerichtet, dass es ohne Quecksilber versandt und mit demselben erst an dem Orte seiner Bestimmung versehen werden kann. Um den Luftdruck zu finden, welcher in diesem Falle im oberen Ende der Röhre stattfindet, lässt sich die Stange bis an das Ende der langen Röhre hinaufbringen, so, dass man also das Stück der Röhre von der Einstellung bei 30 Zoll an bis zur Spitze messen kann. Nachdem dies geschehen, stelle man die Scale auf die halbe Länge des oberen Endes der Röhre ein, und treibe das Quecksilber durch die Schraube *d* in die Höhe, bis seine Wölbung das obere Visir streift. Hat man den bei 30 Zoll Einstellung beobachteten Stand sich gemerkt, und zieht den zuletzt beobachteten von demselben ab, so giebt der Rest zum erst beobachteten Stande addirt die wahre Barometerhöhe. Es versteht sich von selbst, dass man beim Höherstellen des Quecksilbers auf die halbe Länge des oberen Rohr-Endes nicht vergessen darf, die nöthigen Additionen an den Zahlen vorzunehmen.

Sollte man aber vorziehen, sich nur ausgekochter Barometer zu bedienen, so dient die obige Einrichtung sich jederzeit zu überzeugen, ob ein wirkliches Vacuum vorhanden ist. Durch das Einstellen des oberen Visires wird auch der nicht unbedeutende Vortheil erreicht, dass das obere Ende der Röhre bei dem Steigen oder Fallen des Barometers einen immer gleich grossen Raum einnimmt, und deswegen der Fehler, der durch etwa dort befindliche Luft entstehen kann, sich ziemlich gleich bleibt, vorausgesetzt, dass nicht sehr grosse Temperatur-Unterschiede stattfinden, und dass nicht eine bedeutende Menge Luft zugekommen ist.



Baromètre de M. Girgensohn.

№ 2.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Ueber doppelleibige Missgeburten. Von C. E. von Baer.

(Gelesen den 3. Juli 1835.)

Seitdem man anfing zu ahnen, dass auch in den organischeu Missbildungen nicht unbedingte Willkühr des Bildungstriebes herrsche, sondern nur Störungen des regelmässigen Verlaufes sie erzeugen können, musste man auch die Art der Störungen und Abweichungen einer wissenschaftlichen Untersuchung unterwerfen. Aber noch viel früher, so lange man gewohnt war, in den Missbildungen nur Strafen und Warnungen der Vorsehung oder blossen Stoff für bereitwillige Verwunderungs-Lust zu erkennen, hatte man für eine Classe derselben — für die doppelleibigen Missgeburten — ganz unbewusst und unwillkührlich eine Theorie ihrer Entstehung sich gebildet, indem man sie *zusammengewachsene Embryonen* nannte.

Wenn man an einem Embryo einen grössern oder kleinern Abschnitt des Leibes in der Doppelzahl vorfand und eine solche Missgeburt mit der regelmässig gebildeten Frucht verglich, so war es wohl natürlich, dass man zuvörderst eine Verwachsung zweier regelmässig gebildeten Früchte zu erkennen bemüht war; so ungefähr, wie man dergleichen in der Pflanzenwelt durch Pfropfen und Oculiren täglich erzeugt oder in seltenen Fällen eng an einander gedrängte Bäume verwachsen findet. Man folgte dabei weniger einer wissenschaftlichen Prüfung oder einem besonnenen Urtheile, als einer psychologischen Nöthigung, indem man, wie überall, das weniger Bekannte durch unmittelbare Vergleichung mit dem zunächst Bekannten zum Verständniss zu bringen sich bestrebte. Allein auffallend ist es und einen sprechenden Beweis, wie wenig die Theorie der Bildung der Monstruositäten entwickelt ist, finden wir darin, dass die angedeutete Ansicht noch bis auf den heutigen Tag selbst bei den Physiologen die vorherrschende ist, obgleich sie dem bekannt gewordenen Fortgang der thierischen Ausbildung am wenigsten entspricht. In der That haben bis auf den heutigen Tag fast alle Physiologen, welche diesen Gegenstand einer besondern Prüfung unterwarfen, sich für jene ursprüngliche Ansicht erklärt, obgleich wir nirgends in der normalen Entwickelung der Thiere eine Vereinigung getrennter Individualitäten zu Einer Individualität finden (wenn man nicht den Beobachtungen einiger Naturforscher Glauben schenken will, welche zu sehen vermeinten, dass mehrere Infusorien sich zu Einem Individuum vereinten), — obgleich man ferner, um jene Ansicht zu retten, zu den sonderbarsten, durch nichts gerechtfertigten Annahmen sich genöthigt sah, z. B. zu den Annahmen, dass zwei getrennte Embryonen sich anziehen, sich einander nähern, mit einander verwachsen und wäh-

rend der Verwachsung ganze Hälften des Körpers schwinden und dass bei der Verwachsung die gleichnamigen Theile genau aufeinander treffen, z. B. die Wirbelsäule auf die Wirbelsäule, das Rückenmark auf das Rückenmark, ja die Aorta auf die Aorta.

Viel naturgemässer hätte die entgegengesetzte Ansicht erscheinen sollen, dass das ursprünglich Einfache gedoppelt werde. Erfolgt eine solche Spaltung zu einer Zeit, wo die Substanz des Embryo noch ziemlich homogen ist, so liesse sich der Vorgang mit der Spaltung, die wir an vielen Infusorien und Polypen als normal kennen, vergleichen und es bedarf nicht mehr der Annahme von Schwinden ganzer Abschnitte zweier Leiber, der Anziehung zweier Embryonen und der Annäherung derselben, welche besonders in der ersten Zeit, wo sie nur Wucherungen innerhalb der Keimhaut sind, unmöglich scheint. Diese zweite Ansicht versetzt dagegen die Entstehung der Doppelbildung nothwendig in eine sehr frühe Zeit.

Sie nähert sich dadurch der noch möglichen dritten Ansicht von der Entstehung dieser Missgeburten, derjenigen nämlich, welche die Doppelbildung als ursprünglich, oder zusammenfallend mit der Belebung des Eies annimmt.

Welche von diesen Erklärungs-Weisen von der Entstehung der doppelleibigen Missgeburten die allein richtige sey, oder ob alle drei Wahrheit für die verschiedenen Arten von Missgeburten haben, wird sich erst dann durch die Beobachtung entscheiden lassen, wenn man eine hinreichende Anzahl von Doppelbildungen aus der ersten Zeit des Embryonenlebens beobachtet haben wird.

Ich halte es daher für einen sehr glücklichen Zufall, dass ich am 28. Mai d. J. zwei doppelleibige Barsche aus sehr früher Zeit fand.

In beiden war der hintere Theil des Leibes einfach, das Kopfende doppelt, der Theilungspunkt war aber sehr verschieden. In dem einen lag er so weit nach vorn, dass nur der Kopf doppelt war und dieser nicht einmal ganz, denn auf zwei Mäuler und vier Augen kamen nur zwei Ohren. In dem andern war nur der hinterste Theil der Wirbelsäule und der Schwanz einfach, alles Uebrige aber doppelt.

Beide schliessen die Ansicht von der Verwachsung zweier Individuen völlig aus, da, als ich sie bemerkte, keine 24 Stunden seit dem Auftreteu des Embryo verflossen seyn konnten und ein Verschwinden der nicht doppelten Theile in so kurzer Zeit nicht denkbar ist, auch die Embryonen so eng an die Dotterkugel gefesselt, wie sie in der ersten Zeit sind, unmöglich sich einander nähern konnten. Die Ansicht von einer später eingetretenen Spaltung könnte für das erste Individuum mit doppeltem Kopfe Wahrscheinlichkeit haben, nicht aber für das zweite mit doppeltem Rumpfe. Von diesem ist vielmehr, da die Leiber in einen Winkel von 120° aus einander liefen, wahrscheinlich, dass schon die erste Anlage zum Embryo, die im Primitivstreifen entsteht, nach vorn gedoppelt war, wofür auch schon die ungewöhnliche Breite des gesammten Eies sprach. Dennoch war es immer nur Eine Dotterkugel, an welcher der doppelleibige Embryo entstanden war und dieser immer aus einer Einheit hervorgegangen.

№ 3.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Extrait d'un mémoire sur la probabilité des erreurs des tribunaux.

Dans la séance de l'Académie du 12 juin 1834, M. Ostrogradsky a lu un mémoire sur la probabilité des erreurs des tribunaux, où il a considéré le cas d'inégale véracité des juges, lequel cas est celui de tous les tribunaux.

En supposant que les limites de la véracité de chaque juge soient connues, l'auteur donne les formules analytiques, relatives aux différents cas qui peuvent se présenter, pour la probabilité de l'erreur d'un tribunal composé d'un nombre donné de juges. Il suppose d'abord que l'on connaît nominalement les juges qui décident affirmativement une question litigieuse, et par conséquent que l'on connaît aussi ceux qui votent contre; il examine aussi le cas, où il n'y a qu'une partie de juges d'un même avis, et une partie de ceux d'avis contraire, qui soient connus nominalement; ensuite il indique les moyens pour déterminer les limites de la véracité des juges d'après l'expérience, et il termine son mémoire par la considération du cas d'égale véracité, cas que Condorcet et Laplace ont déjà traité.

M. Ostrogradsky, dans l'hypothèse que les véracités des juges se trouvent toutes comprises entre les mêmes limites, trouve que la probabilité de l'erreur à craindre ne dépend que de la majorité, c'est-à-dire de la différence entre les nombres de juges d'avis opposés. Laplace et Condorcet ont pensé qu'un pareil résultat serait contraire à l'indication de la simple raison naturelle; mais M. Ostrogradsky ne se rend pas à l'autorité de ces géomètres célèbres, il prétend que le résultat de son analyse n'a rien qui puisse choquer le bon sens, et après avoir cité le passage où Laplace parle de l'extrême différence entre la probabilité de l'erreur d'un jugement rendu à l'unanimité, par un tribunal de douze juges, et la probabilité de l'erreur du jugement rendu à la majorité de 12 voix par un tribunal de deux cent douze juges *), M. Ostrogradsky dit:

*) Théorie analytique des Probabilités, introduction, page LXXXIX et suivantes: premier supplément page 29.

„ Pour avoir moins à discuter, comparons un seul juge se prononçant affir-
„ mativement dans une question, à un tribunal A de trois juges, dont deux se pro-
„ noncent affirmativement, le troisième négativement. Sans rien changer à la que-
„ stion, on peut remplacer le seul juge par un tribunal B de trois juges, dont
„ un affirme, et les opinions des deux autres sont inconnues. Nous pourrons, rela-
„ tivement au tribunal B, faire trois hypothèses suivantes:

1° „ Les deux juges à opinions inconnues sont de même avis que le premier.

2° „ L'un des deux partage l'opinion du premier, et l'autre ne la partage pas.

3° „ Tous les deux contredisent le premier.

„ La seconde hypothèse est exactement dans le cas du tribunal A, la première
„ est à l'avantage du tribunal B, ou ce qui revient au même, à l'avantage d'un
„ seul juge, et la dernière, au contraire, est à l'avantage du tribunal A; or, je ne
„ vois pas pourquoi la première hypothèse augmenterait la probabilité d'un seul
„ juge, plus que la dernière ne l'affaiblit,

„ Dans un tribunal de deux cent douze juges, la majorité de douze voix montre
„ que cent douze juges sont d'accord, mais dans un tribunal de douze juges qui
„ prononcent à l'unanimité, on n'est sûr que de l'accord de douze voix, et on ignore
„ si, en portant le nombre de juges à deux cent douze, les deux cents que l'on
„ aurait ajoutés, ne seraient pas d'avis contraire aux douze premiers juges.

„ On accorde la plus grande confiance à un tribunal impartial et éclairé com-
„ posé de douze juges, qui décideraient unanimement; mais si le tribunal était
„ composé de deux cent douze juges, dont on ne saurait l'opinion que de douze,
„ d'accord entr'eux, on attendrait pour se fixer, que l'opinion de la majorité soit
„ connue. Cependant, ignorant l'opinion de deux cents juges, nous sommes juste
„ dans le cas du tribunal de douze juges, qui décident unanimement. D'où vient
„ la grande différence dans la confiance que nous accordons au même nombre de
„ juges, également véridiques, et dans la même situation relativement à nous?
„ Cette différence, il n'y en a point; nous sommes induits en erreur, faute d'avoir
„ suffisamment approfondi la matière. Je me permettrai encore une observation.

„ La décision d'un tribunal de mille juges, par exemple, dont cinq cents dé-
„ cident une question affirmativement, et cinq cents autres la décident négative-
„ ment, est nulle: les cinq cents votes positifs sont détruits par les cinq cents
„ votes négatifs, comme seraient détruites deux forces égales, contraires, et appli-
„ quées au même point. Ajoutons un vote affirmatif de plus; d'après l'opinion
„ reçue, ce vote additionel sera affaibli par les votes qui se sont détruits, ou af-
„ faiblira le poids de cinq cents votes affirmatifs qui l'on précédé, car, avant le
„ vote additionnel, les cinq cents votes affirmatifs détruisaient les cinq cents votes
„ négatifs, et après l'addition, ils ne les détruisent plus, les votes négatifs l'em-
„ portent sur les positifs, puisque la différence des cinq cents un votes positifs et
„ cinq cents votes négatifs est moindre qu'un vote. On sent que l'affaiblissement
„ du vote additionnel par les votes qui, en quelque sorte, n'existent plus, ne sau-

„ rait être admis; on sent également, qu'une voix de plus ne peut qu'ajouter à „ la force de celles, auxquelles on l'a adjointe.

„ S'il est vrai qu'on est porté à considérer comme nulle la décision d'un nom„ breux tribunal, rendu à une très faible majorité, et qu'au contraire, on donne „ un grand poids à une décision unanime du tribunal composé d'un petit nombre „ de juges, je crois que ce qui nous y porte est plutôt un préjugé, que le bon „ sens et la considération exacte de la matière.

„ Au reste, ce que je viens de dire ne décide point entre la formule de La„ place et de Condorcet, et celle que je propose pour la remplacer; mais j'ai une „ objection à faire contre l'analyse de ces géomètres célèbres, objection qui doit „ décider la chose.

„ J'ai admis, dans ce mémoire, les mêmes principes de l'analyse des probabi„ lités que ceux que Laplace et Condorcet ont suivis: ce ne sera donc pas sur ces „ principes que portera mon objection, mais sur la manière de les employer; or, „ je ne crois pas qu'il soit permis dans les questions des tribunaux de représen„ ter les véracités de tous les juges par une même lettre. Ces véracités ont chacune „ les mêmes limites, mais elles doivent aller de la première limite à la seconde, „ indépendamment les unes des autres; il faudra, par conséquent, les désigner cha„ cune par une lettre différente, et l'on aura, au lieu d'une seule, autant d'inté„ grales à considérer qu'il y a de juges.

„ Supposons que la véracité de chaque juge ne puisse avoir qu'un certain „ nombre déterminé de valeurs, par exemple, que chaque véracité ne peut être „ que $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ ou 1. D'après Laplace et Condorcet, en prenant pour une véracité „ quelconque une des valeurs qu'elle peut avoir, on doit donner, en même temps, „ la même valeur à toutes les autres, ensorte que, dans le cas dont il s'agit, il „ n'y aurait que trois combinaisons des véracités, savoir: toutes les véracités $= \frac{1}{2}$, „ ou $= \frac{3}{4}$, ou $= 1$. Or, il me semble, qu'on doit en faire toutes les combinaisons „ possibles, ensorte, qu'au lieu de trois combinaisons, il y en aurait 3^n, n étant „ le nombre des juges.“ —

Nous terminerons cet extrait par la citation de quelques formules contenues dans le mémoire de M. Ostrogradsky.

Un tribunal étant composé de $m+n$ juges, m juges condamnent un prévenu, et n l'acquittent on cherche la probabilité de l'erreur dans le cas de la condamnation. Soient x_1, x_2, $x_3 \cdots\cdots x_m$ les véracités des juges qui condamnent, et y_1, y_2, $y_3 \cdots\cdots y_n$ les véracités de ceux qui acquittent. Si les véracités ne pouvaient avoir que les valeurs précédentes, la probabilité cherchée serait

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots\cdots(1-x_m)\,y_1 y_2\cdots\cdots y_n}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)\,y_1 y_2\cdots y_n + x_1 x_2\cdots x_m\,(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)};$$

mais x_1, $x_2 \cdots x_m$, y_1, $y_2 \cdots y_n$ ayant chacune une infinité de valeurs différentes, il faut encore multiplier l'expression précédente par la probabilité

$$\frac{[(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)y_1y_2\cdots y_n+x_1x_2\cdots x_m(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)]\,dx_1dx_2\cdots dx_m dy_1dy_2\cdots dy_n}{\int[(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)y_1y_2\cdots y_n+x_1x_2\cdots x_m(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)]\,dx_1dx_2\cdots dx_m dy_1dy_2\cdots dy_n}$$

de l'existence simultanée des véracités x_1, $x_2 \cdots x_m$, y_1, $y_2 \cdots y_n$, ce qui donnera

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)y_1y_2\cdots y_n\,dx_1dx_2\cdots dx_m dy_1dy_2\cdots dy_n}{\int[(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)y_1y_2\cdots y_n+x_1x_2\cdots x_m(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)]\,dx_1dx_2\cdots dx_m dy_1dy_2\cdots dy_n}$$

pour la portion de la probabilité de l'erreur du tribunal, portion due aux seules véracités x_1, $x_2 \cdots x_m$, y_1, $y_2 \cdots y_n$. La probabilité totale sera évidemment la somme de toutes les probabilités partielles, relatives à toutes les véracités possibles. Cette somme est

$$\frac{\int(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)y_1y_2\cdots y_n\,dx_1dx_2\cdots dx_m dy_1dy_2\cdots dy_n}{\int[(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_m)y_1y_2\cdots y_n+x_1x_2\cdots x_m(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)]\,dx_1dx_2\cdots dx_m dy_1dy_2\cdots dy_n}$$

l'intégrale du numérateur et du dénominateur sera relative à toutes les valeurs x_1, $x_2 \cdots x_m$, y_1, $y_2 \cdots y_n$.

Désignons les limites inférieures des quantités x_1, $x_2 \cdots x_n$, y_1, $y_2 \cdots y_n$ respectivement par x'_1, $x'_2 \cdots x'_m$, y'_1, $y'_2 \cdots y'_n$, et les limites supérieures de ces mêmes quantités respectivement par x''_1, $x''_2 \cdots x''_m$, y''_1, $y''_2 \cdots y''_n$; la probabilité de l'erreur du tribunal deviendra

$$\frac{1}{1+\frac{x''_1+x'_1}{2-x''_1-x'_1}\cdot\frac{x''_2+x'_2}{2-x''_2-x'_2}\cdots\frac{x''_m+x'_m}{2-x''_m-x'_m}\cdot\frac{2-y''_1-y'_1}{y''_1+y'_1}\cdot\frac{2-y''_2-y'_2}{y''_2+y'_2}\cdots\frac{2-y''_n-y'_n}{y''_n+y'_n}}$$

Il est remarquable que la probabilité précédente ne dépende que des sommes des valeurs extrêmes des véracités, c'est-à-dire de $x''_1+x'_1$, $x''_2+x'_2 \cdots$ Ainsi ces sommes restent les mêmes quelles que soient d'ailleurs x''_1, x'_1, x''_2, $x'_2 \cdots$; la probabilité de l'erreur ne variera pas, si toutes les quantités $x''_1+x'_1$, $x''_2+x'_2 \cdots$ $y''_1+y'_1$, $y''_2+y'_2 \cdots$ sont égales entr'elles, et, en désignant par z leur valeur commune, la probabilité de l'erreur se réduira à $\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2-z}\right)^{m-n}}$. Ce cas comprend évidemment celui, où les limites de toutes les véracités seraient les mêmes; on voit par l'équation précédente que la probabilité de l'erreur du tribunal ne dépend que de la différence $m-n$ entre le nombre des juges qui condamnent et celui des juges qui acquittent, c'est-à-dire, elle ne dépend que de la majorité. En faisant $z=1$, la probabilité précédente se réduira à $\frac{1}{2}$. La même fraction $\frac{1}{2}$ représentera aussi la probabilité de la validité du jugement; ainsi dans le cas où la somme des limites des véracités de chaque juge est égale à l'unité, on est dans une indécision complète sur la valeur d'une décision; il reviendrait au même de remettre au hasard le sort du prévenu, pourvu qu'on égalise les chances pour la condamnation et pour l'absolution. La décision d'un tribunal n'acquerra une valeur que dans le cas où la somme des véracités extrêmes dépasse l'unité, et plus cette somme s'approche de la limite supérieure 2, plus on doit espérer de ne voir que des décisions conformes à la vérité.

Supposons dans la dernière expression $z = \frac{3}{2}$; nous aurons $\frac{1}{1+3^{m-n}}$ pour la probabilité de l'erreur relative à cette supposition: en admettant $\frac{1}{2}$ et 1 pour les limites des véracités, on satisfait évidemment à l'équation $z = \frac{3}{2}$; donc $\frac{1}{1+3^{m-n}}$ est l'expression de la probabilité de l'erreur du tribunal, quand les véracités des juges sont comprises entre les limites $\frac{1}{2}$ et 1. La formule de Laplace relative à ce cas est

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx};$$

elle diffère de beaucoup de la précédente.

Considérons de nouveau un tribunal de $m+n$ juges, dont m condamnent et n acquittent un prévenu; mais on ne sait pas quels sont les juges qui condamnent, et par conséquent on ignore aussi quels sont ceux qui absolvent. Soient x_1, $x_2 \cdots x_{n+m}$ les véracités des juges; x_1 est compris entre les limites x'_1 et x''_1, x_2 entre les limites x'_2 et x''_2, ainsi de suite. Faisons

$$V = [x_1 + (1-x_1) y] \, [x_2 + (1-x_2) y] \cdots [x_{m+n} + (1-x_{m+n}) y];$$

le coëfficient de y^m dans le développement de V exprime la probabilité que le tribunal s'est partagé en deux parties, l'une de m et l'autre de n juges, et que la véracité est du côté des n juges. Désignons par P ce coëfficient. Le coëfficient Q de y^n dans le développement de V exprimera la probabilité du même partage du tribunal dans le cas, où la véracité serait du côté des m juges; donc

$$\frac{P}{P+Q}$$

est la probabilité de l'erreur des m juges dans l'hypothèse que chaque véracité n'a qu'une seule valeur. Mais les véracités ayant chacune une infinité de valeurs différentes, la probabilité qu'elles soient précisément égales à x_1, $x_2 \cdots x_{n+m}$ est:

$$\frac{(P+Q)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+m}}{\int (P+Q)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+m}};$$

l'intégrale doit être étendue à toutes les valeurs de x_1, $x_2 \cdots x_{n+m}$.

En multipliant cette probabilité par la précédente, on obtiendra

$$\frac{P dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+m}}{\int (P+Q)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+m}}$$

pour la portion de la probabilité de l'erreur de m juges, due aux véracités x_1, $x_2 \cdots x_{n+m}$; toute autre combinaison des véracités fournira une portion semblable; la somme

$$\frac{\int P dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+m}}{\int (P+Q)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+m}}$$

de toutes les portions sera la probabilité cherchée de l'erreur de m juges.

Pour effectuer commodément les intégrations indiquées, remarquons qu'en faisant $y = e^{x\sqrt{(-1)}}$, nous aurons

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V e^{-mx\sqrt{(-1)}}\, dx$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V e^{-nx\sqrt{(-1)}}\, dx;$$

donc la probabilité de l'erreur deviendra

$$\frac{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-mx\sqrt{(-1)}} \int V dx_1 dx_2 \cdots dx_{m+n}}{\int_{-\pi}^{+\pi} (e^{-mx\sqrt{(-1)}} + e^{-nx\sqrt{(-1)}})\, dx \int V dx_1 dx_2 \cdots dx_{m+n}}$$

Or, il est évident que le numérateur de cette fraction est le coëfficient de y^m dans le développement de

$$\frac{1}{2\pi} \int V dx_1 dx_2 \cdots dx_{m+n} =$$
$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(x''_1 - x'_1)(x''_2 - x'_2) \cdots (x''_{n+m} - x'_{n+m})}{2^{n+m}} [x''_1 + x'_1 + y(2 - x''_1 - x'_1)]$$
$$[x''_2 + x'_2 + y(2 - x''_2 - x'_2)] \cdots [x''_{n+m} + x'_{n+m} + y(2 - x''_{n+m} - x'_{n+m}))$$

et le dénominateur est la somme des coëfficients de y^m et de y^n dans le même développement. Donc, en désignant par X le coëfficient de y^m dans le développement du produit

$$[x''_1 + x'_1 + y(2 - x''_1 - x'_1)]\,[x''_2 + x'_2 + y(2 - x''_2 - x'_2)] \cdots\cdots$$
$$[x''_{m+n} + x'_{m+n} + y(2 - x''_{m+n} - x'_{m+n})]$$

et par Y le coëfficient de y^n dans le même développement, nous aurons, pour la probabilité de l'erreur du jugement rendu à la majorité de $m - n$ voix, l'expression suivante:

$$\frac{X}{X+Y}.$$

La fraction

$$\frac{Y}{X+Y}$$

exprimera la probabilité de la validité du jugement. On voit que les probabilités précédentes ne dépendent que des sommes $x''_1 + x'_1$, $x''_2 + x'_2$, $x''_2 + x'_2 \cdots$ $x''_{m+n} + x'_{m+n}$ des véracités extrêmes, et si l'on fait $x''_1 + x'_1 = x''_2 + x'_2 = \cdots$ $\cdots = x''_{m+n} + x'_{m+n} = z$, on trouvera

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdots (m+n)}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots n} z^n (2-z)^m$$
$$Y = \frac{1 \cdot 2 \cdots (m+n)}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots n} z^m (2-z)^n.$$

Donc la probabilité de l'erreur devient

$$\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2-z}\right)^{m-n}}.$$

Cette expression coïncide, comme cela doit être, avec celle qu'on a trouvée pour le cas, où l'on connaît nominalement les juges votant pour, et les juges votant contre.

Rapport de M. l'Académicien Parrot sur son second voyage au lac de Burtneck en 1835.

(Lu le 18 Septembre 1835.)

Ensuite de la commission dont l'Académie m'avait chargé, de continuer mes recherches d'ossemens fossiles sur les bords et surtout dans l'intérieur du lac de Burtneck, j'avais fait construire à Pétersbourg les machines propres aux fouilles sous l'eau d'après les dessins que j'avais eu l'honneur de présenter à l'Académie. De même j'avais fait préalablement acheter et transporter à la cure de Burtneck les bois nécessaires pour joindre l'un à l'autre les deux bateaux conjugués, pour l'échafaudage du grand treuil, et établir un pont et un radeau pour parvenir à sec à la profondeur qu'exigent les bateaux. A mon arrivée je trouvai le premier désappointement. Le pont avait été construit au commencement d'avril tout près de la cure; mais la sécheresse qui avait régné dès lors avait fait baisser le niveau du lac de près d'un pied, ce qui me força de chercher un autre point qui me fournirait la profondeur nécessaire, que je trouvai à environ ½ w. de la cure, et où j'établis ce pont.

Cela étant fait, je fis les constructions nécessaires pour joindre les bateaux conjugués, pour l'échafaudage et le grand levier placé sur le bateau libre, destiné à soulever sous l'eau la caisse de fer avec son contenu dans les cas où cela serait nécessaire. Le tout étant monté, la machine et les cables placés; je fis un essai qui réussit à mon gré. Je labourais dans une journée de 10 heures, avec 8 hommes, une longueur de 1728 pieds du Rhin, ce qui fait un peu plus d'une demi-werste, sur 3 pieds de largueur; la corbeille de fer amenait, à chaque marche de 4 à 5 toises, 15 pieds cubes de matière, qui contenait quelquefois des pierres d'un poud et même de deux ponds.

Cela étant fait, je me mis à sonder le fond du lac sur de nombreuses directions, selon mes indications géognostiques et consultant ensuite les pêcheurs des bords

du lac. On m'avait annoncé, ilya 3 ans, que la plus grande profondeur était de 56 pieds. Mais quel fut mon ètonnement lorsque je la trouvai de 12 pieds seulement, et cela environ à moitié chemin de la cure de Burtneck à Bauenhof, c'est-à-dire très près de la plus grande largeur et longueur, à environ $\frac{2}{5}$ de celle-ci. La carte géognostique du lac, que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie offre en *b* ce point de la plus grande profondeur, et aux autres points marqués, les principales profondeurs que j'ai mesurées avec les routes, dont la somme se monte à plus de 64 w. sans compter plusieurs petits détours.

Mais ces sondes me fournirent bientôt le second et le plus grand désappointement qui put contrarier mes travaux. Le premier jour où j'opérai avec la machine, au point *a*, je n'amenai à bord qu'une vase si visqueuse, que je fus forcé quelquefois de soulever la corbeille de fer pour la détacher de cette vase. Elle paraît tout-à-fait noire à sa sortie de l'eau et, séchée à l'air, elle prend une couleur grise d'ardoise. Nous reviendrons bientôt sur cette vase extrêmement remarquable.

Mes sondes m'apprirent qu'elle couvre toute la surface du lac à l'exception des bords qui offrent du sable fin, du gravier, des pierres roulées et, à quelques points de la glaise bleuâtre. La plus grande largeur de ces bords se trouve entre la cure et le ruisseau Lecla-Uppe et atteint environ 250 toises.

Il m'importait infiniment de savoir quelle épaisseur cette couche de vase pouvait avoir; mais nayant trouvé ni à la cure, ni aux terres voisines, une tarrière propre à ce but, j'employai une grosse barre de fer de 4′ 9 de longueur, presant 32 livr. et terminée à un bout en pyramide carrée d'acier, très pointue. Je la liai très solidement à une petite corde, à laquelle je fis faire plusieurs tours sur la barre de distance en distance, afin d'amener quelques parties du fond, et la faisais lancer avec la plus grande force en direction verticale. Cette méthode ne m'instruisait à la vérité pas toujours du maximum d'épaisseur de la couche de vase; mais j'apprenais par elle que la vase s'étendait au moins jusqu'à la profondeur, où la barre pénétrait. Cette épaisseur allait de 6 pieds 3 pouces à 12 pieds 10 pouces; et là où cette épaisseur allait à moins, la barre amenait une vase mêlée de très fin sable, et à environ 3 pieds sous l'eau du sable pur. Ainsi je dus admettre que la surface du lac, à l'exception des bords, est couverte d'un lit de vase pure, dont la plus grande épaisseur va à 12′ 10″ au moins, comme le plan l'indique. Cette certitude me prouva que j'avais espéré en vain trouver une grande profondeur d'eau, et un fond de pierres et de gravier tel que les bords du lac à l'est me l'avaient offert, et que, par conséquent, mes fouilles devaient se borner à ces bords. Car si cette vase était antérieure à l'arrivée des débris fossiles que je cherchais, il était impossible de les trouver sous cette vase; et si elle était postérieure, leur grande pesanteur spécifique les eût fait enfoncer à une profondeur également inaccessible. Aussi les fouilles que j'ai faites pendant trois jours sur différens points n'ont amené d'autres matières solides que quelques coquillages fluviatiles et quelques morceaux de bois de bouleau et de sapin carbonisés sous l'eau, dont j'ai l'honneur de présenter deux exemplaires.

Le plan géognostique ci-joint, indique les courses que j'ai faites sur le lac pour le sonder; on y trouve également les profondeurs sous l'eau, et les épaisseurs de la vase, reconnaisances qui m'ont mis en état de dessiner deux profils du lac, l'un sur la plus grande longueur B A, et l'autre sur la plus grande largeur C D, profils où j'ai dû (à l'exemple des orographes) augmenter de beaucoup les profondeurs pour les rendre sensibles. Elles sont ici 80 fois plus grandes qu'elles ne devraient être d'après l'échelle des longueurs. La profondeur moyenne de l'eau, au-dessus de la vase, peut être évaluée à 8 pieds 2 pouces, et celle de la vase à 7 pieds 1 pouce; or comme la surface de cette vase est d'environ 30 w. carrées, il s'en suit que le volume de la vase contenue dans ce petit lac monte à 345,650,000 pieds cubes. Le fond sous la vase est, autant que j'ai pu l'apprendre par mes fouilles, du sable très fin, sans couleur, gisant sur la couche inclinée vers le lac de la roche rouge que j'ai décrite dans mon premier mémoire.

Instruit, comme on vient de le voir, par mes sondes, que le lac n'a point de ces grandes profondeurs, que l'on m'avait annoncées, où j'espérais trouver des ossemens fossiles plus grands, et surtout plus entiers que ceux que j'avais trouvés sur le littoral décrit dans mon premier mémoire, et que les fouilles sous l'eau se borneraient à une étroite lisière, près du bord, je consacrai tout le tems pendant lequel les vents ne permettaient pas de travailler sur le lac, à des fouilles sur ce littoral, et ce sont ces dernières fouilles qui m'ont fourni la bien majeure partie des fossiles que j'ai rapportés.

Je passe sous silence les peines que j'ai eues pour calfeutrer parfaitement mes trois bateaux, les difficultés, les encombres, même un naufrage, que j'ai essuyés de la part des vents pendant le cours de mes travaux sur l'eau, cet été n'ayant presque offert que des calmes parfaits et des vents violens, dont les directions changeaient à tout moment. J'ai eu des journées où le lac n'était pas plus ridé qu'une glace de miroir, et d'autres, où dans ce petit lac de 11½ w. de longueur et de 5 w. de plus grande largeur, les vagues s'élevaient jusqu'à 3 pieds de hauteur verticale. Je vais parler des objets que j'ai trouvés et d'abord de la *vase* comme d'une chose importante pour la géologie.

Cette vase n'est pas un amas de sable, de pierres, de glaise et de débris de plantes, tel que nous l'offre la plupart des rivières. C'est un limon noir, parfaitement homogène, d'une extrême finesse, qui frotté entre les doigts offre la sensation d'amidon cuit, et n'annonce rien de dur, rien qui se distingue du reste de la masse. Seulement à l'approche de ses limites vers les bord du lac le tact y découvre du sable de la plus grande finesse. Séché à l'ombre, il prend la couleur de l'ardoise et une dureté qui surpasse celle de la brique cuite. Chauffé lentement jusqu'à l'incandescence il perd de son poids, et se change en une masse argileuse extrêmement dure, et singulièrement crevassée. Filtré dans un sac de toile immédiatement au sor-

tir du lac, il laisse écouler l'eau avec une transparence parfaite, et broyé dans l'eau s'y divise parfaitement et se précipite promptement.

A mon passage à Dorpat M. le professeur Göbel a eu la bonté d'analyser cette vase pour satisfaire ma curiosité surtout sur la quantité de matière carbonisée qu'elle contient. Une portion, séchée à la température de l'eau bouillante, a fourni 50,5 de substance brûlée et 69,5 d'une cendre rouge-brune.

Silice	55,75
Alumine	42,25
Oxide de fer et de manganèse	1,75
Chaux et talk	0,25
	100,00

Ainsi cette vase contient, ainsi séchée

Matière inflammable	30,500
Silice	38,746
Alumine	29,364
Oxides de fer et de manganèse	1,216
Chaux et talk	0,174
	100,000

Si l'on compare cette masse destituée de matière inflammable avec les substances qui forment l'écorce de notre globe, l'on s'étonnera de la grande proportion de substance cristallisable (56), à la substance non cristallisable (44), sans qu'il se soit formé un produit cristallisé à l'exception de quelques paillettes presque microscopiques de mica. Dans l'amphibole, par ex., qui offre de si grands cristaux lamellaires dans la syénite, la proportion des matières cristallisables est = 1 : 0,83, tandis que dans notre vase elle est = 1 : 0,78. Il paraît donc décidé que la substance charbonnée fait ici l'office d'une substance non cristallisable qui affaiblit, détruit même la force de cristallisation dans la silice de ce mélange, et par conséquent que cette substance a été formée en même tems que les terres auxquelles elle se trouve mêlée. Nous nous abstenons pour le présent de toute hypothèse sur cette formation.

En jetant un coup-d'oeil sur les profils de la carte ci-jointe, l'on voit que le gisement de cette vase est précisément analogue à celui des houilles et des lignites, celui d'une jatte très plate, dans laquelle se trouvent ces substances charbonneuses, au milieu d'une épaisseur considérable qui, vers les bords, se réduit à zéro. Ainsi notre vase de Burtneck est peut-être le dernier chaînon dans la suite des substances combustibles géognostiques relativement à la petite proportion de la substance charbonnée mêlée aux terres et oxides. Il est intéressant d'examiner si cette substance contient du bitume, examen que je me propose de faire au plus tôt, cette question tenant au problème général de l'origine des anthracites, des houilles et des lignites. Ce n'est pas le moment de rappeler mon opinion sur ces formations, que j'ai émise dans plusieurs de mes ouvrages; mais la vase du lac Burtneck, non recouverte par des

roches, me paraît susceptible de nous fournir de nouvelles lumières sur cette question qui, outre son importance pour la géologie, offre encore un intérêt agricole.

Un nouveau phénomène m'a singulièrement frappé pendant que j'exécutais mes sondes. Lorsque dans ces jours d'un calme parfait, je voyagais sur la surface du lac vers la fin de juin, je vis l'eau couverte d'une poudre jaune extrêmememt fine qui s'étendait précisément jusqu'aux limites de la vase, de sorte que, lorsque je passais la limite de cette poudre, la sonde m'annonçait un fond de sable, et lorsque j'y rentrais elle m'anonçait de la vase. Mon pilote (un paysan de Burtneck) ayant appris cela, m'avertissait chaque fois, à la vue de cette poudre jaune, le passage de la vase au sable, ou du sable à la vase. Quelques jours plus tard, cette matière jaune était devenue verdâtre et ses particules avaient une grandeur mesurable à l'oeil nu. Etait-ce une mousse croissant sur la vase qui émettait son pollen, ou une conferve qui s'y formait par une légère fermentation et s'élevait au-dessus de l'eau? Du reste cette vase ne nourrit aucune plante phanérogame, et je me suis assuré que partout où croissaient le roseau, le jonc ou d'autres plantes aquatiques, c'était sur un terrain de sable ou d'argile bleuâtre. Malheureusement mes occupations principales ne m'ont pas permis de rassembler de cette matière en quantité suffisante pour la soumettre à un examen approfondi.

Les fossiles que les travaux de cette année ont fournis sont des os, des tégumens, des dents, des coraux et quelques concrétions très remarquables.

Des os.

Les fragmens sont de configurations très variées et nous offrent divers points de vue sous lesquels il faut les considérer.

D'abord ils diffèrent entre eux par *la couleur*. Ceux qui ont été retirés du lac sont presque entièrement noirs, ceux du littoral à quelques pouces ou pieds au-dessus du niveau de l'eau sont plus ou moins bruns et quelques uns trouvés dans le sable rouge au-dessus de la roche pourraient passer pour tout-à-fait blancs, s'ils n'avaient à l'intérieur quantité de petits points bleus qui, vus à une certaine distance, produisent comme une légère teinte bleuâtre. La couleur noire des os ne provient pas, comme on pourrait le croire au premier abord, de la vase du lac; car cette vase est absolument insoluble dans l'eau, et est par conséquent incapable de produire des infiltrations comme le font les sels métalliques. Il se trouve dans notre collection un seul exemplaire de tégument couvert de cette vase, qui, enlevée de la surface, laisse la couleur naturelle de l'os à découvert. La couleur noire des os, de plusieurs tégumens et d'un grand nombre de dents provient, selon nous, d'une portion de substance animale qu'ils contiennent encore, charbonnée sous l'eau par la même fermentation qui a formé les houilles et charbonné les papyrus d'Herculanum sous l'influence d'une très haute pression. Lorsque nous macérâmes, il y a deux ans, à la manière de Berzélius, un de ces os, en le suspendant à un fil de soie dans de l'eau un peu acidifiée par de l'acide nitrique, la partie fibreuse et la gélatine étaient

parfaitement noires, tandis que le calcaire de l'os précipité était incolore; et comme ces os dissous dans l'acide hydrochlorique, et traités par la prussiate ne donnent que de faibles indices de fer, l'on ne peut attribuer cette couleur noire qu'à la cause que nous venons d'énoncer.

La cassure de ces os, tels qu'ils ont été trouvés sous l'eau et sur terre, est encore un objet d'un intérêt géognostique tout particulier. Les uns, et ce sont surtout les petits fragmens, ont perdu leurs angles, leurs arêtes et leur surfaces naturelles, attestant par là qu'ils sont venus de loin, ou qu'ils ont été roulés long-tems dans une même contrée. Les autres, et c'est un grand nombre des plus grands fragmens, ont encore la majeure partie de leur surfaces naturelles; seulement les angles et les arêtes sont un peu émoussés. D'autres enfin, et ce sont presque les plus gros, ont également leur surface naturelle presque intacte, et les angles et les arêtes sont aussi tranchans que s'ils venaient d'être cassés. Nous nous en sommes assuré aisément en les confrontant avec des fragmens que les ouvriers ont cassés en fouillant sur le littoral avec une grosse pioche. Ne doit-on pas conclure de là, que ces fragmens, qui ont encore tout le tranchant d'une cassure fraîche, et n'ont rien perdu de leur surface par voie de frottement, ont été fracassés sur les lieux mêmes, et qu'un violent courant a enlevé et entraîné dans la jatte, qui forme le lac d'aujourd'hui, les autres débris qui leur appartenaient?

Mais quel mécanisme, quelles forces la nature a-t-elle employées pour fracasser tellement des os dont les fragmens ont jusqu'à 10 pouces de contour? L'on sait que les contrées au sud de la Baltique, et des lacs Ladoga et Onéga, jusqu'à plusieurs centaines de werstes des bords de ces nappes d'eau, sont parsemées de grands et de petits blocs erratiques provenant des monts de la Scandinavie et de la Laponie. La Finlande est couverte de ces blocs dont la grosseur égale souvent, et surpasse même celle de grands édifices; et les bords du lac de Burtneck, précisément là où se trouvent les os fossiles, depuis la Dure jusqu'au château de Burtneck nous offrent des groupes de ces masses granitiques dont la grosseur va jusqu'à 6 et 8 pieds de diamètre. Ce sont ces blocs erratiques qui ont fracassé les grands animaux dont les restes font l'objet de nos recherches.

La conformation de ces ossemens est la considération la plus importante au zoologue et au zootome qui cherchent à deviner les familles, et même les genres et les espèces auxquels ils appartiennent pour enrichir l'histoire naturelle de l'ancien monde et fournir de nouvelles données au géologue. Cette conformation est extrêmement variée et nous distinguons d'abord deux classes, celle des os solides, pleins, qui font à coup sûr le plus grand nombre, et des os creux. Nous croyons devoir attribuer la première classe à des amphibies, ces os n'offrant dans leur intérieur point ou très peu de masse cellulaire, et la seconde à des mammifères. Du reste, il sera nécessaire de polir nombre de ces os sur leur tranche transversale, pour s'assurer à l'égard de plusieurs d'entre eux de leur structure interne, et pour reconnaître avec sûreté quelles sont les surfaces naturelles, et quelles sont les surface fracturées.

Quant à la figure ou conformation extérieure, nous avons distingué les formes suivantes comme les principales :

1) Plusieurs fragmens de gros os dont la coupe est ovale, mais rentrante sur un des larges côtés, en sorte qu'il s'y forme un rebord saillant bien prononcé. Nous croyons que la zoologie actuelle, de même que l'antidiluvienne, n'offre aucun os de cette forme. Des recherches exactes nous instruiront plus sûrement sur ce point.

2) Des fragmens triangulaires plus épais vers la base que vers le sommet, et plus ou moins voûtés. On ne peut guères les rapporter qu'à des omoplates ou des bassins (Becken.)

3) De gros fragmens quadrilatères à surfaces naturelles, opposées, parallèles. Il est difficile de les rapporter à autre chose qu'à des crânes. Mais quels crânes énormes, qui ont jusqu'à $1\frac{1}{4}$ de pouce d'épaisseur!

4) Des fragmens dont la coupe est ovale, large d'un côté et presque tranchante au côté opposé, d'autres d'une coupe semblable ou presque ronde, qui se terminent en pointe. Ils ont l'air de fragmens de côtes.

5) Des rotules plus ou moins complètes.

6) Des fragmens d'articulations de très différentes grosseurs, dont un, très petit, offre trois cavités très distinctes. (*)

7) Des fragmens de vertèbres, également de grosseurs très variées.

8) Un os qui affecte la figure d'une griffe, et un second qui paraît être de même nature.

9) Un os qui ressemble à un bout de langue dont la racine fait corps avec la mâchoire, et dont la surface inférieure, plate est couverte de protubérances coniques radiées comme la plupart des tégumens de la collection.

10) Deux os, dont il est difficile de donner une description, surtout relativement aux figures de leur surfaces. Ce sont les plus étranges os que j'aie jamais vus.

11) Plusieurs petits fragmens de côtes de tortue, faciles à reconnaître aux rainures qui règnent sur la longueur.

12) Un os tout noir, qui a la figure d'un casque grec avec un creux conique et profond à sa base. Il est presque entier, n'offrant que deux très petites cassures aux bouts de sa crête. Il serait difficile de ne pas le prendre pour un organe de l'ouïe, si la symétrie de ses parties ne s'y opposait pas, le creux pouvant représenter la caisse du tympan et la crête contenir la lame spirale. L'anatomie comparée décidera apparemment sur ce point. Un second os de cette espèce, plus grand, mais fracturé, ne fournit pas de nouvelles données.

Le reste des fragmens nombreux de cette collection, qui va sûrement à aumoins 10,000 exemplaires de toute grosseur, offre vraisemblablement encore des formes que l'oeil exercé du zoologue trouvera importantes.

(*) Peut-être ce fragment est-il un morceau de mâchoire avec trois dents à bases plates comme notre collection en contient un grand nombre.

Des Tégumens.

L'on connaît d'après notre premier mémoire sur les fossiles du lac de Burtneck ces plaques énigmatiques couvertes de petits cônes ramifiés que quelques naturalistes ont mises au nombre des coraux, erreur que nous avons dévoilée par l'analyse chimique. Nous avons retrouvé cette fois-ci les mêmes formes et quelques nouvelles, dont la description serait trop prolixe pour ce rapport, et que nous nous réservons pour le mémoire qui contiendra nos recherches ultérieures sur les fossiles du lac de Burtneck. Les formes et même la distribution des protubérances de ces tégumens sont si variées que, de même que nous sommes éloignés d'assurer que chaque type de ces tégumens à protubérances positives et négatives, constitue une espèce d'amphibie à part, nous sommes également convaincus que ces formes si variées de la surface de ces tégumens ne peuvent nullement appartenir toutes à une seule et même espèce d'animal.

Des dents.

Nous avons trouvé plusieurs centaines de fragmens de dents de toutes les espèces décrites dans notre premier mémoire et quelques-unes d'espèces nouvelles. Parmi les premières se distingue une dent de saurien parfaitement conservée, d'un beau luisant, plus grande que toutes les autres de la même espèce, fournies par les bords du lac, ne se distinguant d'une dent fraîche que par sa couleur presque noire, qui règne sur toute sa longeur, excepté à la racine. Elle est un peu plus courte que celle de Dorpat, et son épaisseur d'un tiers moindre. Elle n'a pas cette grande cavité qui caractérise celle-ci comme une dent de crocodile.

Parmi les nouvelles trouvailles se distinguent les morceaux suivans:

1) Une dent très bien conservée qui se distingue des autres dents de sauriens du lac de Burtneck par trois caractères très marqués.

a) Elle n'offre aucun vestige des deux arêtes tranchantes, et sa tranche est circulaire. b) Elle est courbe, mais pas à double courbure comme les dents des autres sauriens. Son axe se trouve dans un seul plan. c) Elle a à sa base un renflement très marquant, que nous n'avons trouvé à aucune autre dent de la première collection et de celle-ci. Ce renflement est strié comme le reste de la dent; ce qui prouve que ce n'est pas un fragment de la mâchoire. Sa base, par laquelle elle tenait à la mâchoire, est inclinée d'environ 45° à la partie inférieure de l'axe de la dent et le canal qui contenait le nerf s'y présente d'une manière très sensible. Cet exemplaire est très bien conservé, mais peu luisant.

Une autre dent qui paraît, à raison de sa grande cavité, avoir appartenu à une espèce de crocodile, comme celle de Dorpat, dont au reste elle diffère sensiblement par la courbure et par une base triangulaire qui s'arrondit vers le haut. Cette dent doit avoir eu un prolongement vers la pointe qui manque entièrement, et vers la base, la surface à laquelle nous venons de donner ce nom n'étant sûrement pas la base naturelle, puisqu'elle est aussi compacte que tout le reste. S'il était possible de la restaurer, elle approcherait de la taille de celle de Dorpat.

Quel naturaliste ne s'étonnera pas de trouver dans notre collection une dent très bien conservée, courbe dans un seul sens, plate, mince, striée, à base latérale et *armée à sa pointe d'un crochet comme d'un hameçon.* Mon fils, le pasteur de Burtneck, en a un autre exemplaire, mais dont le crochet est un peu émoussé. Cette espèce de dent est jusqu'à présent absolument inconnue. Notre première collection et celle-ci contiennent plusieurs exemplaires de dents de cette forme, mais auxquelles la pointe manque, en sorte que l'on ne peut savoir si elles avaient un crochet ou non.

Nous signalons dans cet article des dents un petit fragment de mâchoire de forme carrée, au milieu duquel se trouve la racine d'une dent dont toute la partie supérieure manque, et entourée de deux côtés (apparemment l'extérieur et l'intérieur) de 5 très petites dents fracturées. Ce fragment ne peut avoir appartenu qu'à un saurien, peut-être du genre monitor de Cuvier, opinion que nous examinerons par la suite avec soin.

5) Un autre fragment de mâchoire offre une partie un peu proéminente d'une dent avec deux alvéoles qui doivent avoir contenu chacune une dent apparemment expulsée par celle dont on voit encore la racine.

6) Enfin nous avons été frappé de trouver un petit fragment de mâchoire qui offre 7 petites dents et un de ses côtés (vraisemblablement l'extérieur) tout couvert de petites protubérances coniques ramifiées. Or comme ces dents, quoique mutilées, sont évidemment des dents de l'espèce dont notre collection abonde le plus, c'est-à-dire des dents d'une espèce quelconque de saurien, il est évident qu'il a dû exister des sauriens avec protubérances coniques ramifiées.

Les bornes d'un simple rapport nous interdisent de parler des coraux et des concrétions que les nouvelles fouilles nous ont fournies; nous remettons cet article au tems où nous livrerons le fruit de nos travaux ultérieurs dans un second mémoire, qui fondé sur la réunion des deux collections et travaillé avec l'assistance obligeante de deux de nos très honorables collègues, fournira sûrement des résultats qui ne seront pas indignes de l'attention des naturalistes.

Je ne puis terminer ce rapport sans faire mention de fouilles zoo-géologiques qui ont eu lieu depuis quelque tems à Dorpat et dans ses plus proches environs, fouilles dont les produits ont une grande analogie avec ceux du lac de Burtneck. J'ai visité moi-même cinq de ces lieux, où MM. les professeurs Huek et Kutorga ont trouvé des débris très intéressans et si nombreux qu'il ne me fallait pas deux minutes pour en trouver. Il en existe même une couche entre des couches de sable, épaisse d'un demi-pouce et au jour sur plusieurs toises de longueur, qui paraît n'être composée que de ces débris, mais tellement morcelés qu'ils ne forment que des parcelles minimes d'une ligne carrée au plus.

Le plateau qui domine Dorpat, sillonné par le vallon de l'Embach, ressemble singulièrement au plateau qui domine le lac de Burtneck du côté sud-est, soit que nous comparions nos propres observations sur les deux points, soit que nous con-

sultions d'un côté la description qui se trouve dans notre premier mémoire, et de l'autre celle que M. Kutorga a livrée dans son mémoire intitulé: *Beitrag zur Geognosie und Paläontologie Dorpats* 8°. 1835; ce qui prouve la vérité de notre opinion sur la grande étendue de cette formation, émise dans notre premier mémoire. Seulement, il paraît que M. Kutorga n'a pas distingué la roche vive des couches charriées qui la couvrent, quoique elle soit au jour dans plus d'un point où les fouilles ont lieu.

Cet auteur a trouvé des débris de deux espèces de tortues et d'un saurien qu'il range dans le genre des monitors de Cuvier. Non seulement des débris d'écailles semblables à deux espèces de tégumens trouvés au lac de Burtneck, mais aussi plusieurs os très reconnaissables prouvent réellement que le sol des environs de Dorpat a été autrefois parsemé d'une infinité de tortues; ce dont nous nous sommes persuadé également par notre inspection des lieux où se font les fouilles et par la belle collection de M. le professeur Huck.

L'auteur, en plaçant sans hésiter les débris de tortue qu'il a trouvés dans le genre des trionix, paraît admettre que les protubérances appartiennent à la peau qui couvre le bouclier de ce genre de tortues. Cependant il faut se garder de croire que cela soit général, c'est-à-dire que les protubérances ne se trouvent que sur de pareilles peaux. Nous avons déjà découvert que des sauriens (dont on ne connaît aucune espèce couverte de peau), ont aussi de pareilles protubérances et un examen soigné des fossiles de Dorpat prouvera sans doute qu'elles se trouvent également sur des parties solides de ces fossiles.

Les fragmens fossiles de Dorpat se distinguent de ceux du lac de Burtneck par un degré extrême de fragilité. Cette fragilité est propre, plus ou moins, aux fossiles analogues que l'on trouve près de Wenden et en quelques autres contrées de la Livonie. Les os, les dents, et les tégumens se trouvent dans des veines de sable ou de glaise sous des couches de sable de 15 ou 20 pieds de profondeur au plus. Là ils se trouvent en conflit avec l'air et l'eau atmosphériques qui pénètrent facilement ces couches très poreuses et ont apparemment enlevé toute la matière animale de ces fossiles sans y substituer du carbonate de chaux; ce qui se confirme par leur grande porosité et légèreté. Après être déterrés et séchés ils prennent un peu plus de consistance, mais sans égaler en dureté ceux de Burtneck. Peut-être ont-ils été long-tems exposés à l'air, et délités avant d'avoir été enterrés sous le sable rouge qui les couvre.

Les fossiles du lac de Burtneck ont conservé une portion très notable, les os environ $\frac{1}{3}$, de leurs principes organiques qui s'y trouvent charbonnés à des degrés très variés, indiqués par la couleur. Cette perte d'environ $\frac{2}{3}$ de la substance animale et la carbonisation du reste prouvent que les fossiles de Burtneck, après la mort des individus auxquels ils ont appartenu, se sont tvouvés successivement dans deux états différens. Dans le premier, ils ont perdu la majeure partie de leur substance animale, et le second a produit la carbonisation du reste. Nous pou-

vons en conclure que ces restes d'animaux antidiluviens ont séjourné assez longtems à l'air pour perdre tant de leur substance organique et qu'en suite une révolution locale les a enfouis à une grande profondeur dans l'océan dont la haute pression a empêché les gaz, que la fermentation eût d'ailleurs dégagés, de se former et forcé cette fermentation à n'opérer que la carbonisation de cette substance et non sa volatilisation, précisément comme cela a eu lieu, selon nous, pour la formation des houilles.

Nous avons vu plus haut que les fossiles de Burtneck ont été fracassés par de grosses masses erratiques, et dispersés en partie par des courans. Ceux de Dorpat, par contre, paraissent n'avoir été qu'écrasés par la masse des sables qui les ont couverts; car on trouve, par exemple, des tégumens de tortue très fracassés à la vérité, mais dont les débris sont absolument restés en place, adjacens l'un a l'autre, de sorte que M. le professeur Huek rassembla de ces débris et les colla sur des feuilles de papier.

C'est ainsi que la nature emploie divers moyens pour nous cacher et nous trahir en même tems ses trésors antidiluviens. A Dorpat, comme nous venons de le voir, elle les a enterrés sous des couches de sable; en d'autres lieux elle en a caché des familles entières dans des cavernes accessible au naturaliste; en d'autres lieux elle en a enfouis sous des roches que l'industrie humaine perce pour y chercher des métaux, des houilles ou des pierres. Ce n'est qu'auprès du lac de Burtneck que, marâtre atroce, elle a fracassé, roué ses vieux enfans, éparpillé les fragmens de leurs membres et caché ceux qui sont restés près du lieu de cette cruelle scène sous une couche impénétrable de vase. Ainsi, si l'on nous faisait un reproche de n'avoir pu, dans nos courses argonautiques, enlever la toison d'or entière, c'est-à-dire rapporter du lac de Burtneck des membres ou des squelettes complets, nous nous consolerions avec Ross et Parry, qui ont fait chacun deux grands voyages infructueux pour découvrir le passage nord-ouest dans la mer pacifique.